Tricks och tips för din grafräknare

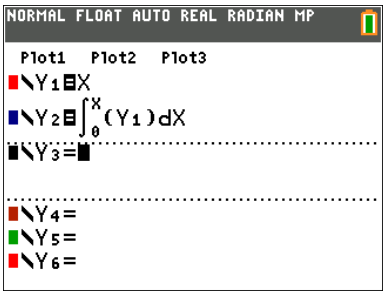
Integralberäkningar

Areafunktionen

En areafunktion är en bestämd integral där den undre gränsen har ett värde medan den övre gränsen är en variabel. Areafunktionen

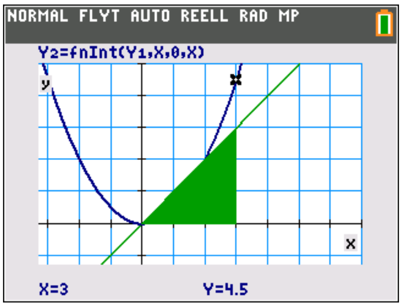
$$\int_a^x x\,dx$$

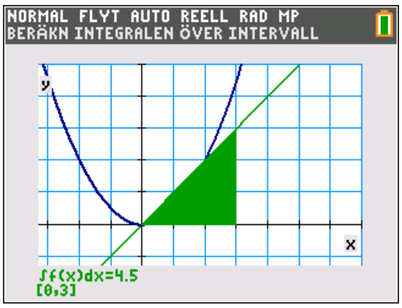
kan numeriskt plottas genom inmatningar i Y1 och Y2. Se skärmen nedan.



Funktionen **fnInt** hittar du i menyn under knappen math. Med inställning Mathprint är det enkelt att göra inmatningen. Genom att använda trace kan du sedan beräkna areafunktionens värde för olika värden på *x*. Se skärmbilden nedan.

Den översta skärmbilden visar den integralens värde med undre gränsen 0 och övre gränsen 3. Vi får värdet 4,5. I detta fall får vi ett exakt värde.





$$\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$

Den undre figuren visar en spårning i areafunktionen och vi får värdet 4,5 för *x*=3.

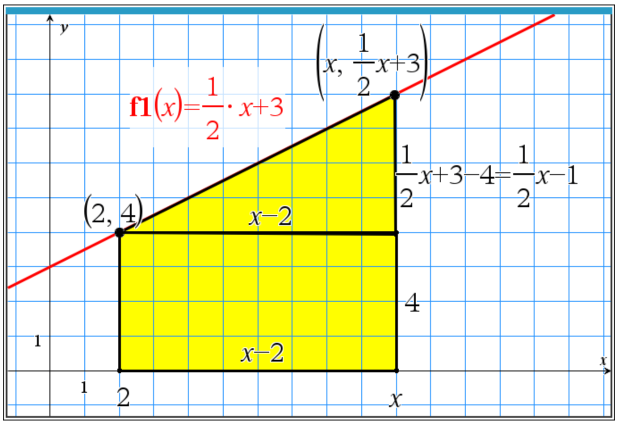
Vi tar nu ett lite svårare exempel. Vi låter funktionen vara $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Vi ska nu göra en beräkning av arean under kurvan med den undre gränsen **2** och den övre gränsen ***x***, som är vår variabel.

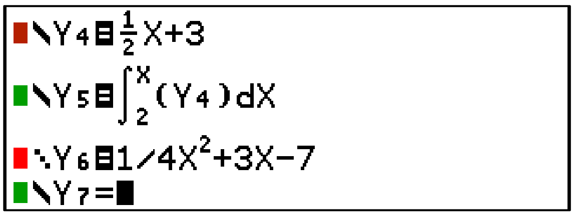
Arean under kurvan består av en rektangel och en triangel. Se figur nedan. Den totala arean *A*(*x*) blir:

$$A(x) = (x-2)\cdot 4 + \frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x - 1\right)}{2} = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 7$$

Detta är alltså formeln för areafunktionen.

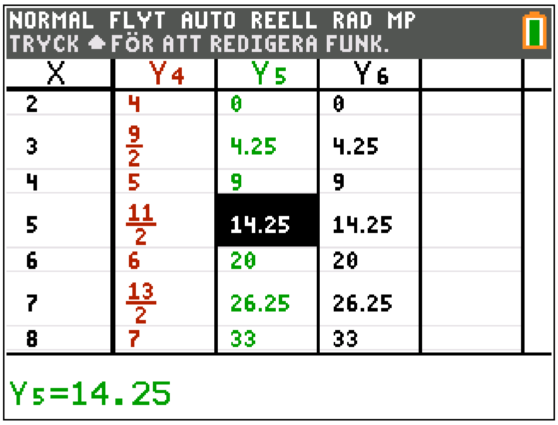


Vi plottar nu areafunktionen $\int_2^x \frac{1}{2}x + 3\,dx$ tillsamman med den räta linjen. Vi har också lagt in funktionen $Y6 = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 7$. Se inmatningsfönstret nedan.



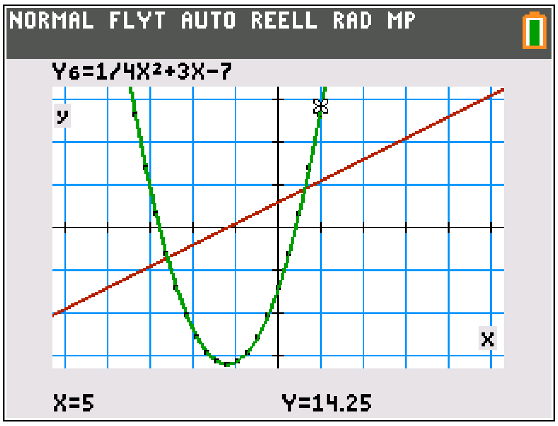
Tricks och tips för din grafräknare

Så här blir plottningen! Vi har spårat i kurvan och värdet för *x*= 5 blir 14,25. Y5 och Y6 överlappar ju varandra. Man kan också visa en tabell.

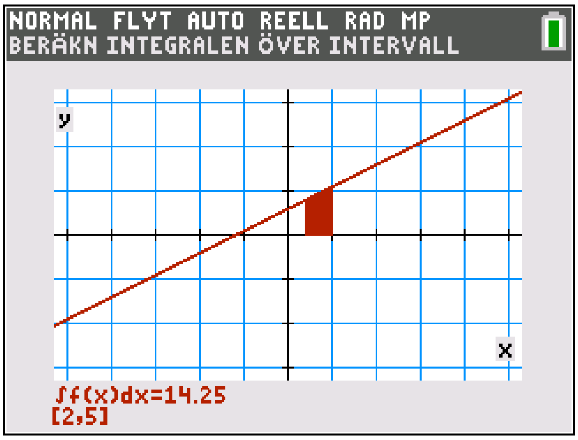


X	Y4	Y5	Y6
2	4	0	0
3	$\frac{9}{2}$	4.25	4.25
4	5	9	9
5	$\frac{11}{2}$	14.25	14.25
6	6	20	20
7	$\frac{13}{2}$	26.25	26.25
8	7	33	33

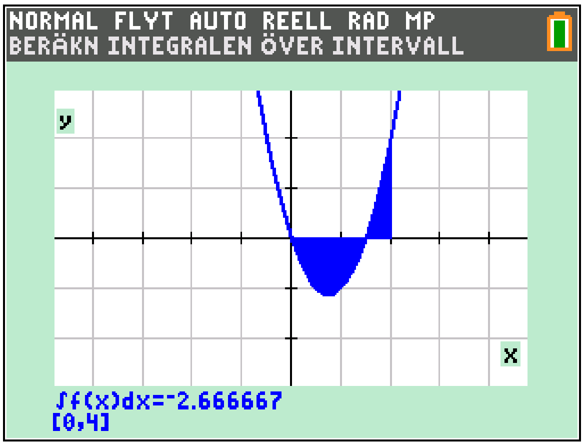
Y5=14.25



Skärmbilden till höger visar en beräkning av arean med räknarens inbyggda funktion. När du är i grafönstret och har funktionen uppritad trycker du på [2nd] [calc] och väljer **7 ∫f(**x) dx.) Därefter väljer du nedre och övre gräns och trycker på [enter]. Arean markeras och du får resultatet direkt.

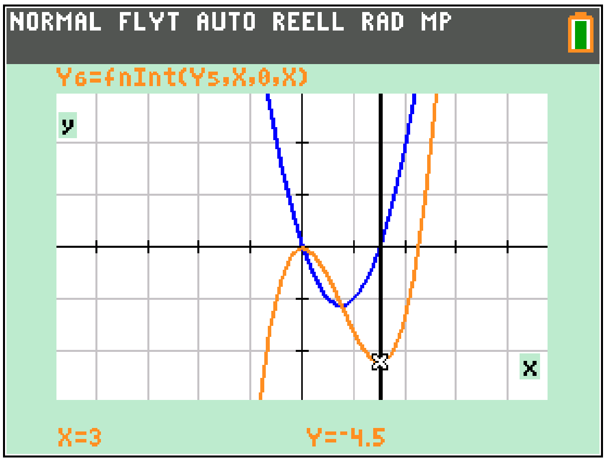


Vi tar nu ett nytt exempel, nu med en andragrads-funktion. Funktionen är $y = x^2 - 3x$ och vi gör en beräkning av integralen mellan 0 och 4. I grafönstret ser det ut så här:



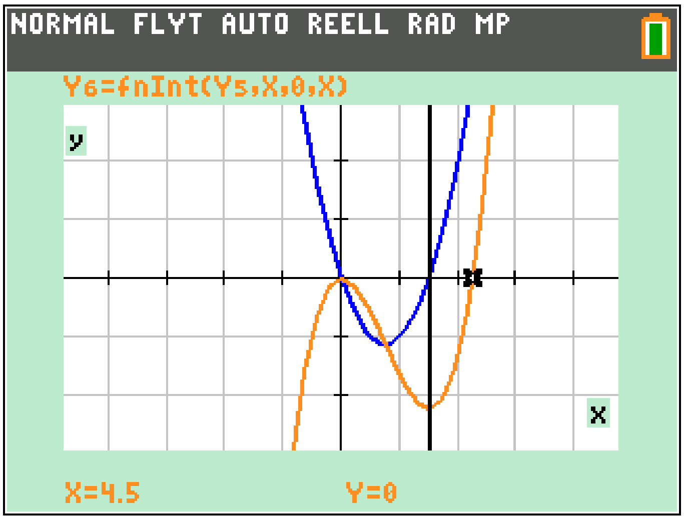
I detta fall får vi ett negativt värde på integralen eftersom den vänstra skuggade delen som ligger under *x*-axeln har en area som är större än den del som ligger ovanför *x*-axeln.

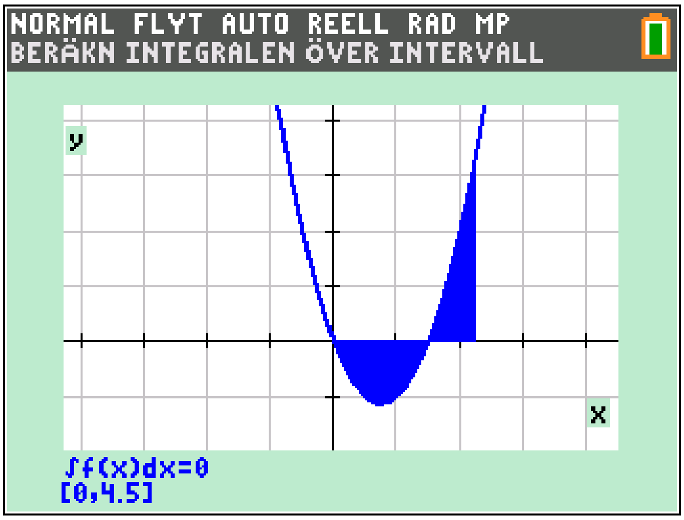
När vi plottar funktionen och areafunktionen med undre gräns 0 ser det ut så här. Se figuren nedan.
Vi ser här att areafunktionens värde har sitt minimum när funktionens värde är noll och att om vi spårar i areafunktionens så är värdet för *x* = 4 lika med -2,666667 (exakt värde 8/3).



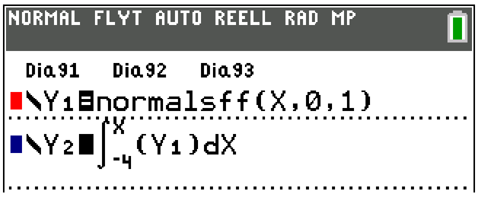
Tricks och tips för din grafräknare

När är areafunktionens värde 0, dvs. när att arean under och över funktionskurvan lika? Vi spårar i areafunktionen och för 4,5 är värdet på areafunktionen, *A*(x), lika med 0. Se figuren nedan. För övre gräns 4,5 ser vi att integralen får värdet 0. Se den nedre figuren.

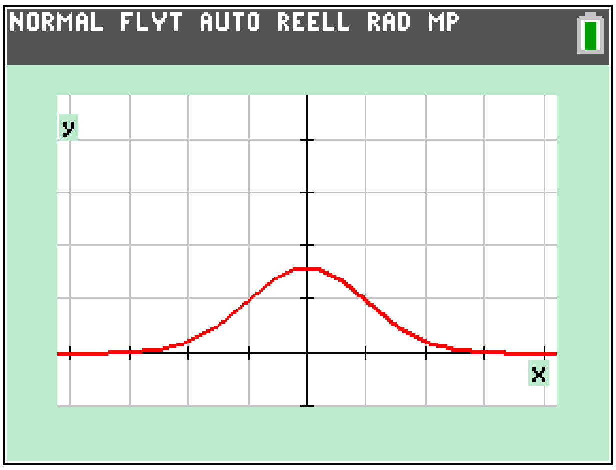


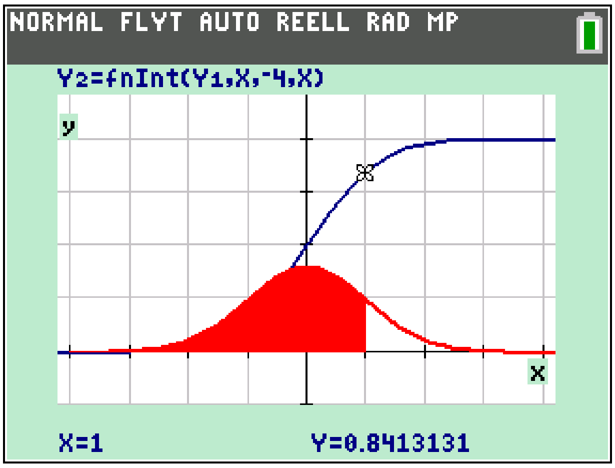


Det sista exemplet blir nu normalfördelningens täthetsfunktion med väntevärde 0 och standardavvikelse 1. Se inmatningsfönstret nedan. Där vi matat in täthetsfunktionen i Y1 och areafunktionen i Y2. Du når täthetsfunktionen genom att trycka [2nd] [distr] och väljer där 1:normalsff. Med engelsk språkinställning heter det normalpdf.



Nu plottar vi i den nedre grafen areafunktionen med undre gräns -4 och den övre gränsen som variabel. Sedan har vi i rött plottat arean under normalfördelningskurvan (Y1) från -4 till 1. Den arean är ungefär 0,84 a.e. Man ser att detta värde också kan avläsas ur kurvan för areafunktionen för *x*-värdet 1.



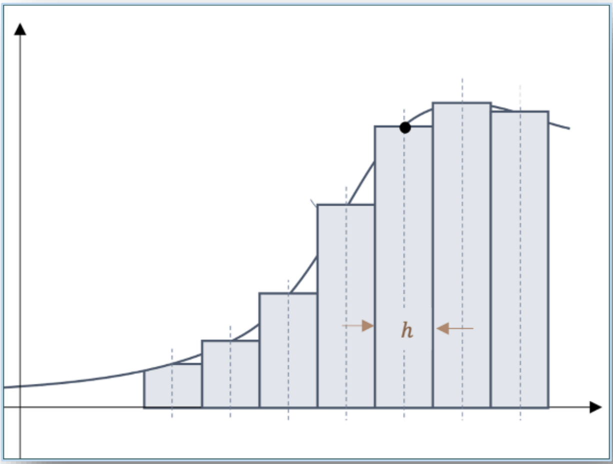


Tricks och tips för din grafräknare

Numerisk beräkning av integraler

Tänk dig att du *inte* har tillgång till de numeriska integral-verktygen på räknaren! Kan jag då beräkna arean under en kurva?

Vi visar här hur du på räknaren enkelt hur man kan uppskatta arean under en kurva genom att sum-mera arean av ett antal rektanglar. Vi använder här den s.k. *mittpunktsmetoden*. Se figuren nedan.



Om man ska vara formell så kan den uttryckas så här:

Om vi delar intervallet $a \le x \le b$ i n lika långa intervall så kommer intervallängden h att vara $h = \dfrac{b-a}{n}$ och

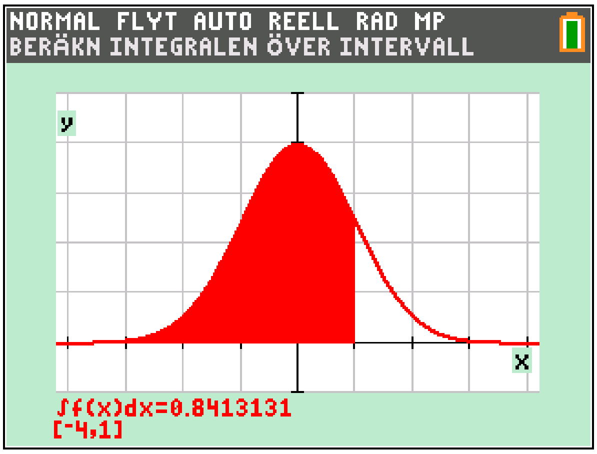
vi kan beräkna x-värdena för rektanglarnas mitt med sambandet $x_1 = a + \dfrac{h}{2}$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, o.s.v.

Detta leder till följande approximation:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right)$$

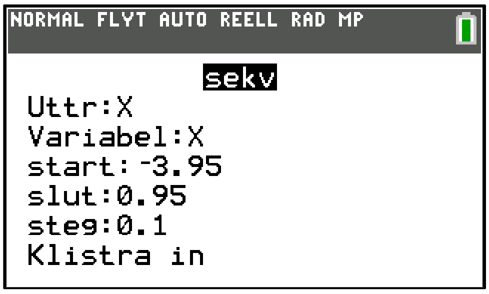
Vi tänker oss vi vill beräkna arean under den normala täthetsfunktionen mellan -4 och 1, alltså precis som på förra sidan.

Vi delar in intervallet i 50 delar. Det betyder att bredden på varje rektangel blir 5/50=0,1. Nu går vi över till **Statistikeditorn** för att göra beräkningen.

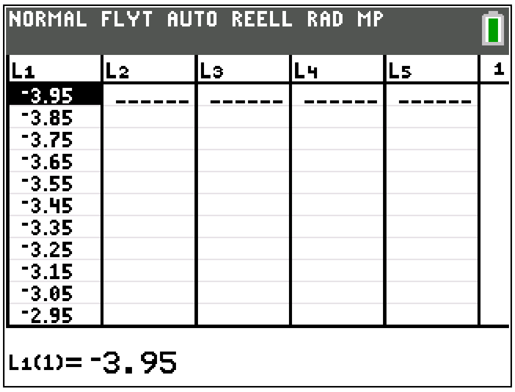


Arean är med räknarens numeriska analysverktyg **0,8413131**.

I den första listan ska vi nu ha mittpunkterna i de 50 rektanglarna. Vi behöver då skapa en talföljd med första term -3.95 och sista term 0.95. Bland statistikverktygen finns en sådan funktion. Placera markören i kolumn-huvudet i L1 och tryck sedan på [2nd] [list]. Där väljer du sedan under OPS alternativ 5 **sekv(**. Tryck nu på [enter]. Nu kommer en dialogruta fram på skärmen där du skriver dina värden för talföljden. Se skärmen nedan.



Välj nu Klistra in. Då kommer formeln för talföljden in på inmatningsraden i statistikeditorn. Tryck nu på [enter] igen. Nu får vi alla termer i talföljden i lista L1.



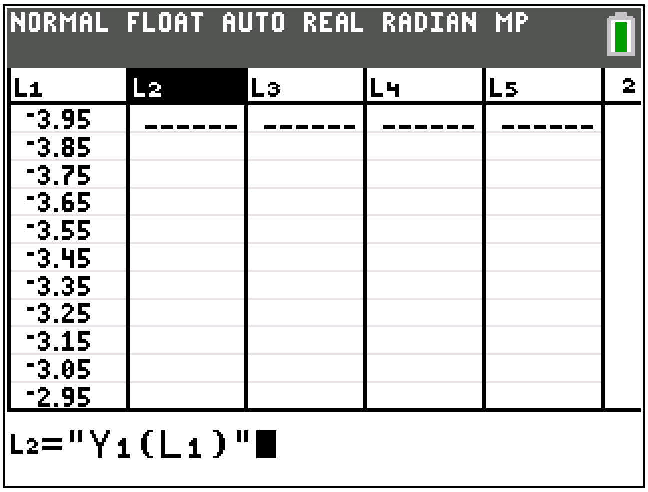
Tricks och tips för din grafräknare

Nu ska vi i lista L2 ha värdena för täthetsfunktionen vid de olika värden som finns i L1. Se till att du har täthetsfunktionen i Y1. Se förra sidan.

Placera markören i kolumnhuvudet i L2 och skriv där enligt skärmen till höger. Vi har med citattecken för att formeln ska synas i kolumnhuvudet och att ändringar i L1 ska uppdatera värden i L2.

Tryck nu på [enter] igen. Nu kommer alla värden för täthetsfunktionen.

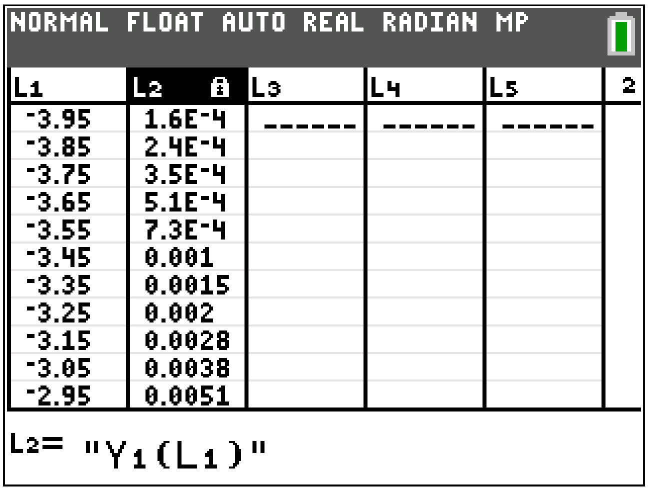
För att nu beräkna arean ska du multiplicera varje värde i L2 med rektangelbredden 0,1 och sedan ska vi summera dessa värden.



NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

L1	L2	L3	L4	L5	2
-3.95	------	------	------	------	
-3.85					
-3.75					
-3.65					
-3.55					
-3.45					
-3.35					
-3.25					
-3.15					
-3.05					
-2.95					

L2="Y1(L1)"

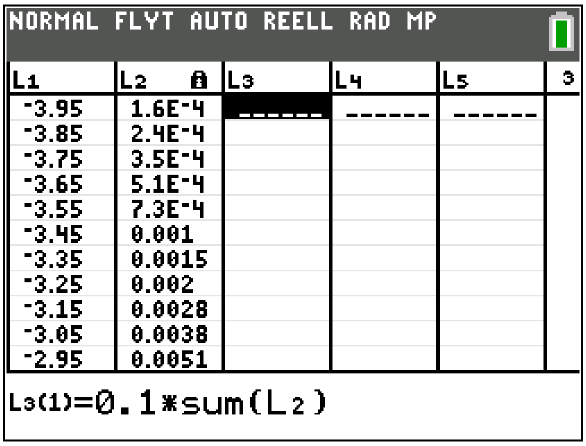


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

L1	L2	L3	L4	L5	2
-3.95	1.6E-4	------	------	------	
-3.85	2.4E-4				
-3.75	3.5E-4				
-3.65	5.1E-4				
-3.55	7.3E-4				
-3.45	0.001				
-3.35	0.0015				
-3.25	0.002				
-3.15	0.0028				
-3.05	0.0038				
-2.95	0.0051				

L2= "Y1(L1)"

Skriv alltså så härpå första raden i L3.

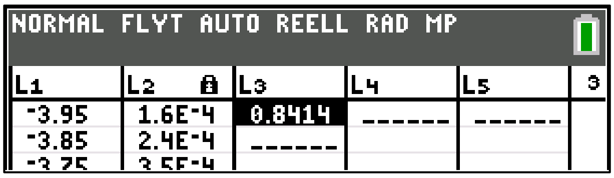


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5	3
-3.95	1.6E-4	------	------	------	
-3.85	2.4E-4				
-3.75	3.5E-4				
-3.65	5.1E-4				
-3.55	7.3E-4				
-3.45	0.001				
-3.35	0.0015				
-3.25	0.002				
-3.15	0.0028				
-3.05	0.0038				
-2.95	0.0051				

L3(1)=0.1*sum(L2)

Tryck sedan på [enter] och du får resultatet på beräkningen efter ett par sekunder. Funktionen **sum** når du genom att trycka på [2nd] [list] och väljer där bland verktygen under rubriken MA (matematikfunktioner för statistik)**.**



NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5	3
-3.95	1.6E-4	0.8414	------	------	
-3.85	2.4E-4	------			

Resultatet blir **0,8414**. Med den inbyggda funktionen (se förra sidan) blev det 0,8413.

