

# Tricks och tips för din grafräknare



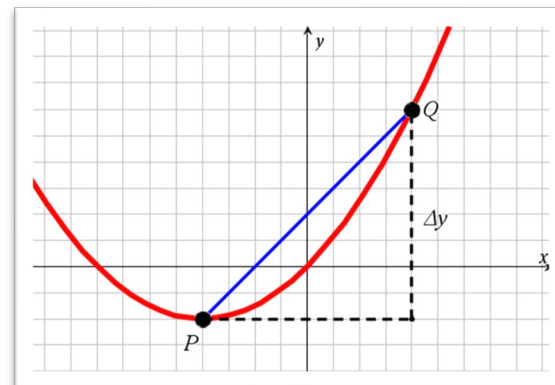
## Derivatans geometriska tolkning

De flesta moderna räknare brukar ha *numerisk derivering* inbyggt. I räknarens program och då approximeras derivatan i en punkt med hjälp av en *differenskvot*. Det kan naturligtvis användas om man har en funktion som man inte klarar av att derivata. Man kan också använda funktionen för att kontrollera att beräkningen som man gjort ger ett rimligt svar. Observera dock att räknaren inte använder samma differenskvot som i derivatadefinitionen utan utgår från en *symmetrisk differenskvot*:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \text{ där } h \text{ är litet}$$

Om du inte anger något annat så använder räknaren värdet 0,001 på  $h$ .

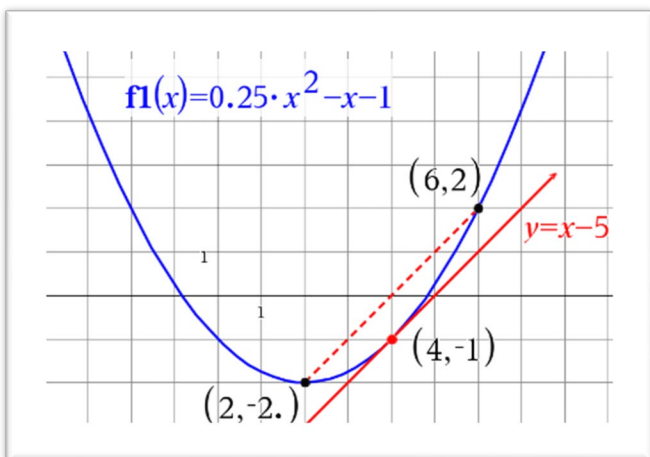
Vid approximationer ger den formeln oftast lite bättre svar. För andragradare får man ett exakt resultat. Titta på figuren till höger. I bilden är tangenten ritad med rött, och sekanten genom två punkter på lika avstånd från tangeringspunkten med prickad stil. Vi ser att tangenten och sekanten verkar ha samma lutning.



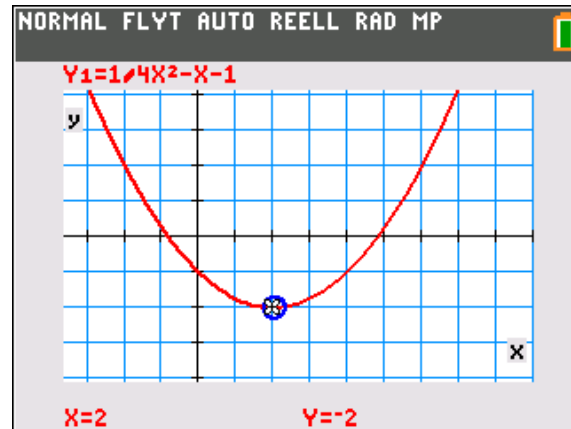
Vi börjar med att välja en bra funktion. Vi väljer funktionen

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$$

Vi lägger in denna funktion i Y1. Vi ska nu undersöka vad som händer med sekanterna när sekantens högra punkt närmar sig punkten P, som har koordinaterna (2, -2). Se figuren där vi markerat denna punkt med en liten cirkel.



I undervisningen tar du säkert upp derivatans geometriska tolkning och att ändringskvoten kan ses som riktningskoefficienten för linjen genom punkterna P och den rörliga punkten Q i som i figuren här. Vi ska nu visa hur man på ett kreativt sätt kan plotta sekanterna via algebra och koppling mellan funktionsinmatningar och formler i statistikeditorn.



Vi ska nu rita några senarter som gå igenom P och den rörliga punkten Q som ska närma sig punkten P i steg.

Ekvationen för en rät linje som går igenom punkten  $(x_1, y_1)$  kan man skriva som

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Vi kan omforma detta uttryck så här:

$$y = k(x - x_1) + y_1$$

$x_1$  och  $y_1$  är alltså koordinaterna för punkten P.

# Tricks och tips för din grafräknare



Vi ska nu utnyttja räknarens listfunktion för att plotta flera sekanter. Vi lagrar då x-koordinaterna för punkten Q i lista L1 och i lista L2 ska vi lagra ändringskvoterna för dessa sekanter. Öppna nu statistikeditorn genom att trycka på ... och välj sedan **REDIGERA**. Skriv sedan in värdena i 5, 4, 3, 2,5, 2,1 i L1.

L1	L2	L3	L4	L5	5
5	-----	-----	-----	-----	
4					
3					
2.5					
2.1					
-----					

$L2 = \left( (Y_1(L_1)) - Y_1(2) \right) / (L_1 - 2)$

I L2 har vi sedan ändringskvoterna för sekanterna. Du ser formeln i inmatningsfönstret längst ner. Omslut formeln med citat-tecken. Det gör att om du ändrar värden i L1 så uppdateras listan L2. Dessutom ligger formeln kvar i kolumnhuvudet. Efter att du tryckt på  $\checkmark$  så kommer värdena på ändringskvoten i lista L2.

L1	L2	L3	L4	L5	6
5	$\frac{3}{4}$	-----	-----	-----	
4	0.5				
3	$\frac{1}{4}$				
2.5	0.125				
2.1	0.025				
-----	-----				

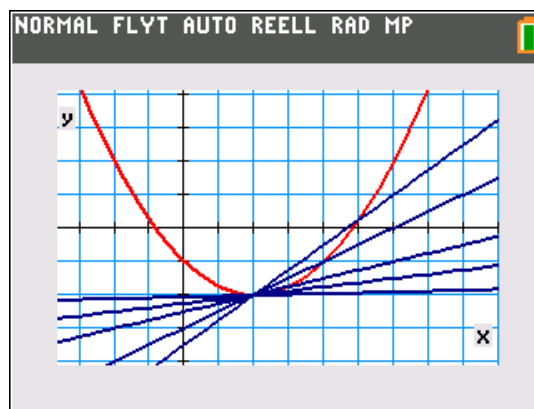
$L3(1) =$

Nu kommer det riktigt fiffiga. I inmatningsfönstret för funktioner ska vi nu lägga in funktionsuttryck så att vi kan plotta sekanterna. Se nästa spalt.

Vi ska alltså sätta in värden på ändringskvoten i formeln  $y = k(x - x_1) + y_1$ . Så här blir det:

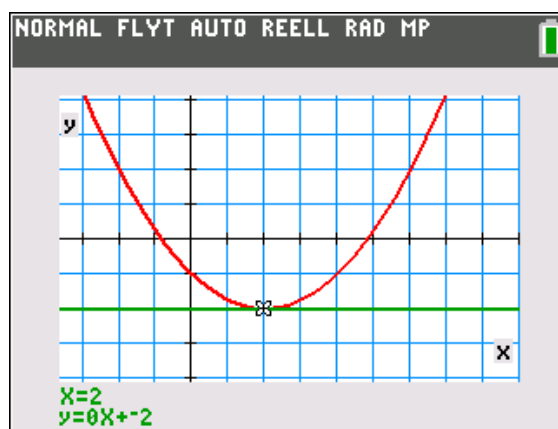
NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP		
Di.91	Di.92	Di.93
$Y_1 = \frac{1}{4}X^2 - X - 1$		
$Y_2 = L_2 * (X - 2) + Y_1(2)$		
$Y_3 =$		

Nu kan vi plotta alla sekanterna. Ställa in **Xres** till 3 så går det fortare att plotta. Det är ett omfattande beräkningsarbete som ska göras och det tar lite tid.



Om du trycker på  $2^{nd}$  [draw] kommer du åt en mängd ritverktyg. Bland annat kan du rita tangenter till kurvor. Först stänger du av plottningen av sekanterna genom att avmarkera Y2. Det görs genom att placera markören vid likhetstecknet och trycka på  $\checkmark$ .

Så här blir det. Du får resultatet  $y = 0x - 2$ . Det är ju funktionens minimipunkt och där är derivatans värde 0.



# Tricks och tips för din grafräknare



Man kan även göra motsvarande undersökning genom att använda en av de förinstallerade *apparna*. Det finns en aktivitet som heter **Från ändringskvot till derivata** där vi gör samma aktivitet som här fast med en annan funktion. Där använder vi funktionen  $y = 2 - x + \frac{1}{2}x^2$ .

**Interaktiv övning på ändringskvot**

Den här aktiviteten handlar om samma sak som aktiviteten Derivata geometriskt bevisning. Skillnaden här är vi kommer att använda en av de förinstallerade apparna som finns på din räknare. Ligen i vilken riktning vi har en knapp bevakas med formeln  $\Delta y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

i rätta i meter och i sekunder. Vi vill nu bestämma punkternas medelhastighet mellan  $t = 1$  sekund och  $t = 2$  sekunder. Medelhastigheten är  $v$  som den ställiga hastigheten ändras med med tiden det tag. Vi formeln kan vi beräkna  $\Delta y = 2 - 1 + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = 1.5$  (m)  $\Delta x = 2 - 1 = 1$  (s)  $v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.5}{1} = 1.5$  (m/s)

Den beräknade medelhastigheten är närmare för den figur som markerade ligen, som är en sekant till kurvan. Se figuren.

Titta nu på figuren nedan.

Figuren har vi ritat upp på en koordinatplan och en sekant genom P och Q.

Y-koordinaten för P är  $f(x)$  och x-koordinaten för Q är  $f(x + \Delta x)$ . Detta ger att  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  och ändringskvoten är  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Ändringskvoten kan ses som riktningskoefficienten för ligen genom punkterna P och Q. Nu ska vi på ett lite fluffigt sätt rita sekanten och få en beräkning av riktningskoefficienten när Q närmar sig P.

Först väljer vi en funktion vi ska titta närmare på. Vi väljer funktionen  $y = 2 - x + \frac{1}{2}x^2$ , som den funktion vi tog upp i det inledande exemplet med medelhastighet.

Vi ska titta på vad som händer med riktningskoefficienten för sekanterna liigen punkter när sig punkten med x-koordinaten 1 på kurvan. Vi har markerat ut denna punkt liigen med en liten röd fyrkant. Punkten har koordinaterna (1, 1.5).

Vi ser från bilden tydligt att en röd triangel med riktningskoefficienten  $k$  som går genom punkten  $(x_1, y_1)$  kan skrivas  $y - y_1 = k(x - x_1)$  (Egenskapsformeln). Vi kan skriva om detta uttryck som  $y = k(x - x_1) + y_1$ , som motsvarar punkten P i vårt exempel är  $\Delta y = 2 - 1 + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = 1.5$ . Se nu figuren nedan. Vi har en fast punkt (1, 1.5) på funktionen och sedan en "rörlig" punkt med koordinaterna (1+A, (2+A)-2). Vi ser nu ut vilka funktioner i raderna:

lign i funktionen som Y1 i funktionens eddorn.

Riktningskoefficienten för den röda ligen i figuren blir då  $\frac{Y2 - Y1}{X - 1} = \frac{(2+A)-2 - 1.5}{(2+A)-1 - 1} = \frac{A - 1.5}{A - 2}$ .

Y1 är alltid samma funktionen. Y2 är ekvationen för sekanten och uttrycket Y1 är riktningskoefficienten för ligen. Dess värde beror ju inte på vinstörans värde A. Vi har markerat ut Y2. Tryck nu på tangenten  $\left[\frac{\Delta}{\Delta x}\right]$ . Då här blir det om värdet på A är 2.

Y1 är alltid samma funktionen. Y2 är ekvationen för sekanten och uttrycket Y1 är riktningskoefficienten för ligen. Dess värde beror ju inte på vinstörans värde A. Vi har markerat ut Y2. Tryck nu på tangenten  $\left[\frac{\Delta}{\Delta x}\right]$ . Då här blir det om värdet på A är 2.

Om man gör inställningen Spår och steg 0.1 kan det bli så här om vi minskar värdet på A med lite tangenten  $\left[\frac{\Delta}{\Delta x}\right]$ . Se nästa sida!

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP  
TRANSFORMATION GRAPHING APP

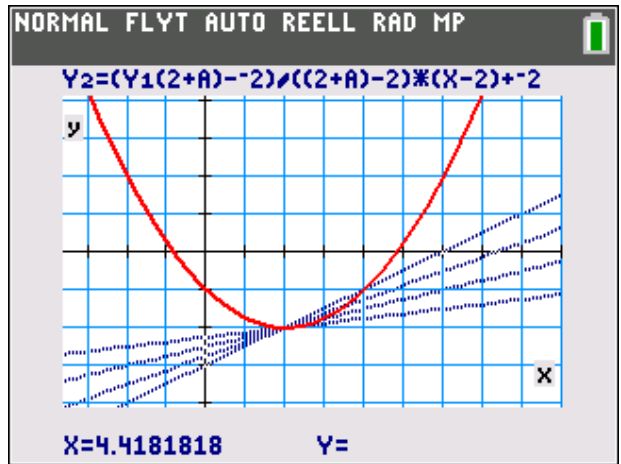
DiA.91 DiA.92 DiA.93 AVSLUTA APP

Y1 =  $\frac{1}{4}X^2 - X - 1$

Y2 =  $\frac{Y1(2+A) - 2}{(2+A) - 2} * (X - 2) + -2$

Y3 =

Y4 =



Gör nu samma undersökning med appen *Transformation Graphing*. Man kan säga att appen är mer skräddarsydd för att göra just den här typen av undersökningar. Tips och trickset som beskrivs här kan väl anses vara mer kreativt och kräver större matematiskt kunnande.

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP  
TRANSFORMATION GRAPHING APP

**TEXAS INSTRUMENTS TRANSFORMATION GRAPHING**

**[WINDOW] Xres=3 FÖR ANIMERINGAR, Xres=1 FÖR STANDARDGRAF.**

5.3.1.0034  
Tryck på valfritt tangent...

© 2001-2019 TEXAS INSTRUMENTS

Det ser ungefär likadant ut när sekanterna plottas. Skillnaden är bland annat är att man i appen använder en rörlig parameter,  $A$ , i stället för en lista med värden. Titta på uttrycket för Y2 här till höger.