Matchande födelsedagar-avancerad version

Här kommer en mer avancerad version av det intressanta sannolikhetsproblemet om födelsedagar. Vi behöver då först gå igenom lite om ***upprepade beräkningar*** och hur det fungerar på räknaren. Principen för sådana här beräkningar kan uttryckas så här:

Utgå från ett startvärde som du matar in i en formel. Då får du ett nytt värde. Det blir det nya startvärdet. Du matar in detta nya startvärde i formeln en gång till och får ett nytt värde. Det blir återigen det nya startvärdet osv.

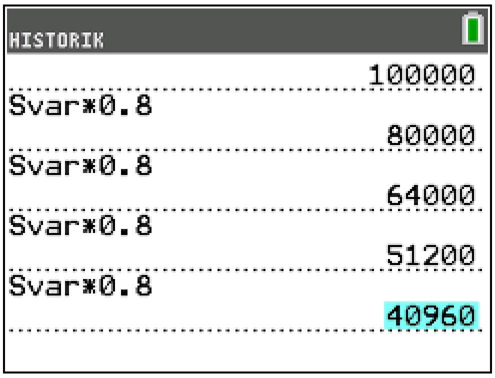
Du köper en begagnad bil för 100 000 kr och värdeminskningen beräknas bli 20 % varje år. Visa vad värdet blir under de fyra första åren om du behåller bilen.

1) Först matar vi in 100 000 och trycker på [enter].
2) Sedan trycker du [×] 0.8 och trycker på [X,T,θ,n] igen. Då infogas ANS i uttrycket
3) Vi fortsätter att trycka på [enter].

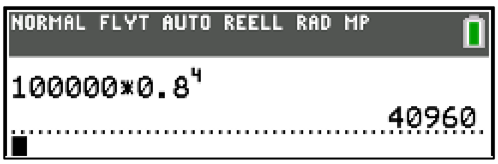
Resultatet ser du på skärmbilden nedan:

Vad som har hänt är att instruktionen "*sist beräknade värdet multipliceras med 0,8*" utförs gång på gång. Det sist beräknade värdet uppdateras varje gång vi trycker på [enter].

Efter fyra år har således sjunkit till ca 41 000 kr. Vi ska se på ett ytterligare två exempel eftersom ANS-funktionen är mycket användbar.



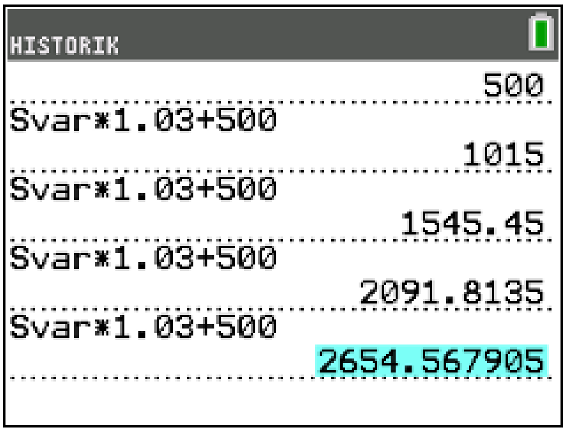
Det här var ett enkelt exempel. Vi hade direkt kunnat beräkna värdet efter fyra år som



Vi tar ett något mer avancerat exempel:

500 kr sätts in på ett konto i början av varje år. Räntan är 3 %. Visa hur det samlade kapitalet utvecklas.

1) Vi börjar med att mata in 500 och trycka på [enter].
2) Sedan trycker vi [×] 1.03 + 500 och avslutar med [enter].
3) Vi fortsätter att trycka på [enter].



På fyra år har kapitalet vuxit till 2655 kr.

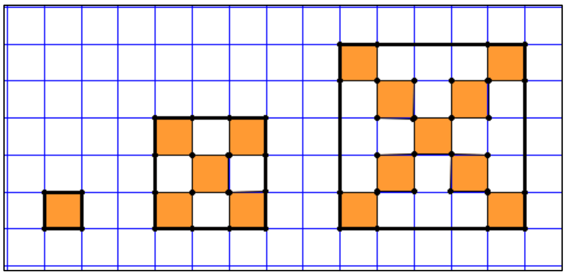


Fig 1 Fig 2 Fig 3

Figurerna ovan visar ett mönster med ett antal färgade kvadrater.

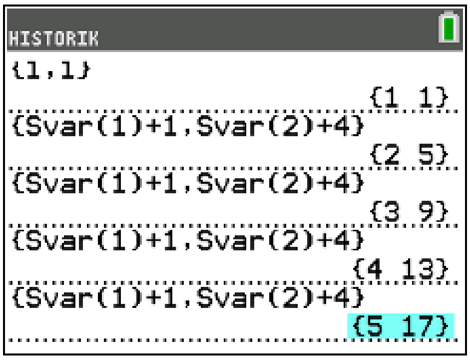
a) Hur många kvadrater är det i figur nr 10?

b) Teckna en formel som visar antalet kvadrater a_n i figur nr n.

Vi kan ju naturligtvis räkna oss fram figur för figur eller också kan vi tänka så här: I figurerna så ökas antalet med 4 varje gång. Från figur 2 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir det då **1 + 9 · 4 = 37**.

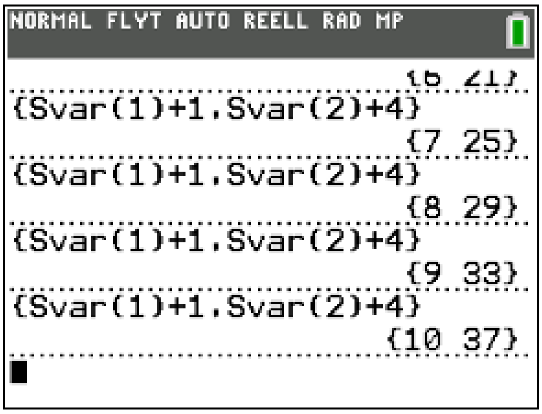
Ett annat sätt är att börja med att skriva enligt skärmbilden. Vi använder här klammerparenteser som är [2nd]-funktion till vanliga parenteser.

Se skärmbild från räknaren på nästa sida.



Talen inom klammerparentesen står för figurnummer och antalet kvadrater. Det är ju ***en*** kvadrat i figur 1. Fortsätt nu att skriva enligt skärmen. Sista svar får du genom att trycka på [2nd][ans]. ans(1) betyder det först beräknade värdet i raden ovanför (som är 1) och Ans(1) + 1 betyder då att vi ska lägga till 1 nästa gång vi gör en beräkning. På motsvarande sätt är det för Ans(2) i raden ovanför (som är 1) Där ska man lägga till 4. Klart!

Tryck nu upprepade gånger på [enter]. Nu får vi antalet kvadrater i figur 2, figur 3 osv. Om vi fortsätter att trycka på [enter] så ser vi att det i figur 10 blir 37 st. Varje rad i räknarfönstret ger figurnummer och antalet kvadrater.

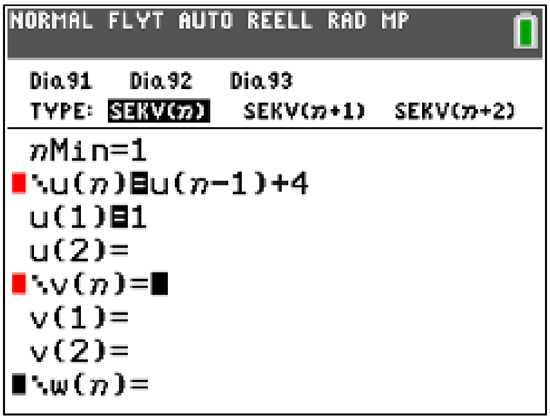


Det här är ju lite omständligt. Nu finns det ett annat sätt att göra beräkningarna. Vi ska skriva in ett uttryck för den följd av tal vi får för antalet kvadrater. Det kallas för en *talföljd* och har beteckningen SEKV (står för sekvens) på räknaren om du har inställningar på svenska. Du får studera talföljder närmare och lite mer avancerat i kurs 5 men vi tar upp det redan här när vi ska arbeta formler. Det känns väldigt naturligt.

Gå då först till räknarens allmänna inställningar genom att trycka på [mode]. Det finns fyra olika typer av inställningar för grafer och du ska här välja SEKV. I dina studier kommer du annars mest att arbeta med inställningen för funktioner.

Se till att du markerar SEQ (SEKV med svensk språkinställning) på 5:e raden. Tryck nu på [y=]. Då kommer inmatningsmenyn.

- *Första raden* säger att vi ska börja räkna från *n*=1.
- *Andra raden* är formeln. Det är en formel i *rekursiv* form som betyder att varje nytt värde, (u(*n*), är det föregående, u(*n*-1), + 4.
- *Tredje raden* säger att det minsta värdet då *n*= 1 är 1.

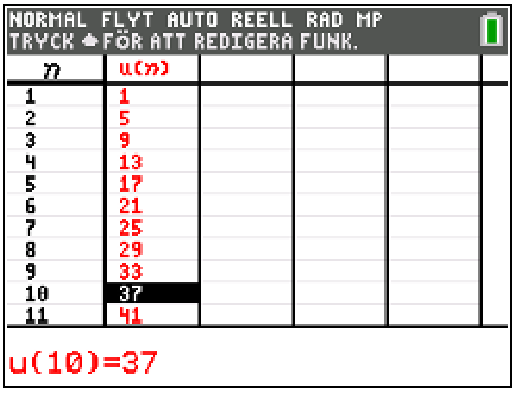


Vi har också ställt in att vi ska plotta i röd färg och prickat. Kan se lite annorlunda ut på äldre skärmar eftersom färg saknas där.

När du skriver in detta uttryck så behöver du komma åt beteckningen **u**. Tryck på [2nd] [7]. Du ser att det står ett litet u ovanför tangenten 7.

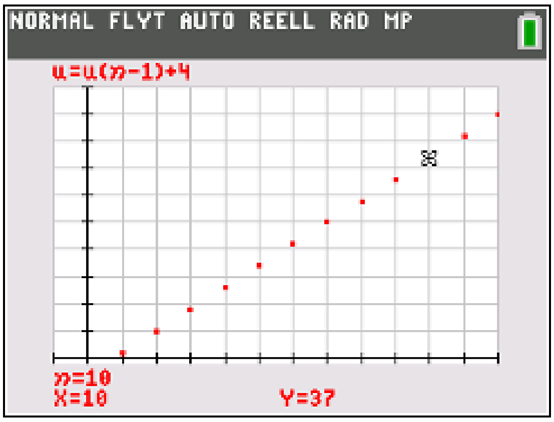
För att skriva in ***n*** så trycker du på [X,T,θ,n].

Nu kan vi plotta om vi vill. Vi är dock just mest intresserade av att få en tabell med värden. Då trycker vi på [2nd] [table] högst upp till höger på knappsatsen. Vi ser antalet kvadrater för olika för olika värden på *n*, som i detta fall är figurnummer.



För att få en bra graf måste man först ställa in ett bra fönster. Då trycker man på tangenten för graffönster, window. Nedan har du ett bra fönster. Yscl, dvs avstånd mellan rutnätsliner vertikalt syns inte här men det är 5.

När man är klar med inställningarna trycker man på graph. Nu plottas grafen som består av punkter för heltal 1 till och med 10. Man kan få grafen så att det dras linjer mellan punkterna men det vill vi ju inte har här. Det finns ju inga värden på antalet kvadrater för figur 3,5 t.ex.

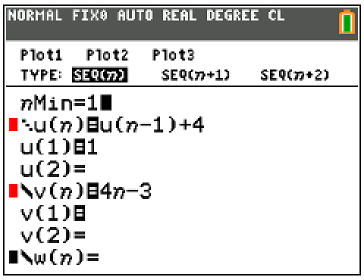


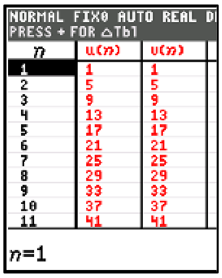
Regeln för de beräkningar vi gjort är: nästa tal i talföljden följer från tidigare tal enligt en bestämd regel (formel). Man behöver sedan ett tal som sätter i gång talföljden och de kallas startvärden.

Hur ska man nu hitta en formel i *sluten* form som direkt ger antalet kvadrater i figur nr *n*? Om vi räknar från figur 1 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir antalet kvadrater i figur 10: 1 + 9 · 4 = 37.

Om vi nu räknar från figur 1 till figur *n* blir det $1+(n-1)\cdot 4$. Formel blir då alltså $u(n)=1+(n-1)\cdot 4$. Uttrycket kan förenklas till: $u(n)=4n-3$.

Vi matar nu in denna formel under $v(n)$. Resultatet syns i tabellen. Vi får samma värden!

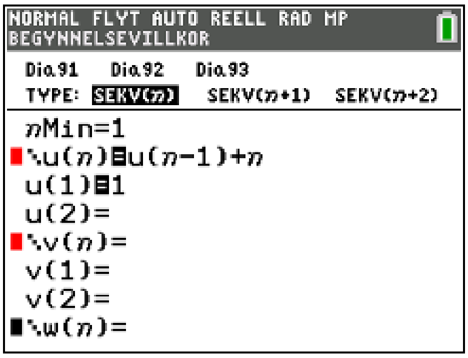




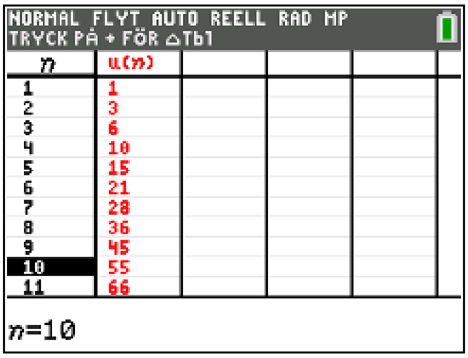
Nu till ett sista problem. Titta på triangel-mönstren i nästa spalt, där vi visar de första fyra stegen. Antag att vi vill veta hur många prickar det är i figur nr 10?

fig. 1 **fig. 2** **fig. 3** **fig. 4**

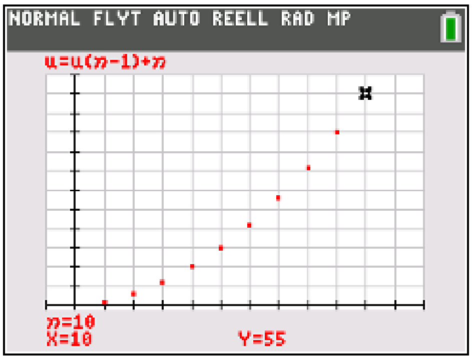
Om vi tittar på figur nr 3 t.ex. så ser vi att antalet prickar där är antalet prickar i föregående figur, dvs. figur nr 2, plus det antal prickar som figurnumret anger (3 st). Samma sak gäller om vi går till figur nummer 4. Vi har funnit ett mönster och kan skriva in en *rekursiv* formel på samma sätt som i förra problemet. Se inmatningsmenyn nedan.



Vi tar fram en tabell. Tryck på 2nd:



Motsvarande graf!



Det här var bara uppvärmning för det intressanta sannolikhetsproblemet. Du har nu bekantat dig med hur man kan arbeta med formler i s.k. rekursiv form.

Vi ska nu gå igenom hur du kan lösa problemet i ett kalkylbladsprogram. Vi har valt den app som finns i programmet TI-Nspire.

Här har vi löst problemet direkt i kalkylarket utan att använda beräkningar med fakulteter. Vi har gjort beräkningar för upp till 50 personer . Så här går det till.

Skapa först en kolumn *antal* från 1 till 50. Skriv då 1 i cell A1. I cell A2 skriver du "a1+1" och trycker på enter. Markera sedan cell a2 till och med cell A50 och kopiera sedan nedåt till och med rad 50.

Andra kolumnen är gjord på liknande sätt fast nu har vi dalande tal från 365 ned till 316.

I tredje kolumnen kan du se hur vi har gjort genom att klicka i cell C2, C3 osv och titta på formeln. Man kopierar alltså cell C2, placerar markören i cell C3 och fyller på ned till rad 50 och klistrar sedan in. Resultatet vi får är alltså sanno-likheterna, räknat på 1 till 50 personer, att ingen har samma födelsedag.

I fjärde kolumnen (kolumn D) har vi sedan beräknat sannolikheterna att flera delar födelsedag.

Till höger har vi kalkylarket för de 38 första raderna.

I cell C2 så har vi formeln $=\dfrac{\boldsymbol{b2}}{\mathbf{365}}\cdot \boldsymbol{c1}$

Och i cell C3 $=\dfrac{\boldsymbol{b3}}{\mathbf{365}}\cdot \boldsymbol{c2}$ osv nedåt i kolumnen

Vi ska nu använda din räknares funktioner för uttryck i rekursiv form för att göra motsvarande beräkningar. Se nästa sida.

	A antal_personer	B omkastat	C	D sannolikhet	E
=				=1−c[]	
1	1.	365.	1.	0.	
2	2.	364.	0.99726…	0.00273972…	
3	3.	363.	0.99179…	0.00820416…	
4	4.	362.	0.98364…	0.01635591…	
5	5.	361.	0.97286…	0.02713557…	
6	6.	360.	0.95953…	0.04046248…	
7	7.	359.	0.94376…	0.05623570…	
8	8.	358.	0.92566…	0.07433529…	
9	9.	357.	0.90537…	0.09462383…	
10	10.	356.	0.88305…	0.11694817…	
11	11.	355.	0.85885…	0.14114137…	
12	12.	354.	0.83297…	0.16702478…	
13	13.	353.	0.80558…	0.19441027…	
14	14.	352.	0.77689…	0.22310251…	
15	15.	351.	0.74709…	0.25290131…	
16	16.	350.	0.71639…	0.28360400…	
17	17.	349.	0.68499…	0.31500766…	
18	18.	348.	0.65308…	0.34691141…	
19	19.	347.	0.62088…	0.37911852…	

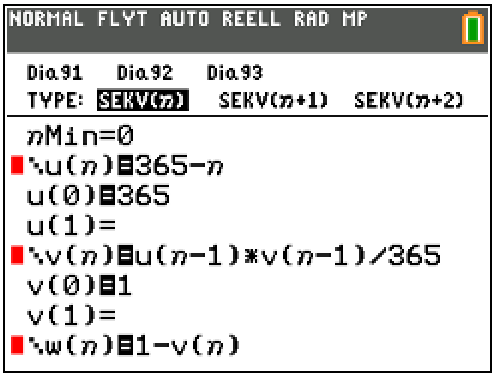
C2 $=\dfrac{b2}{365}\cdot c1$

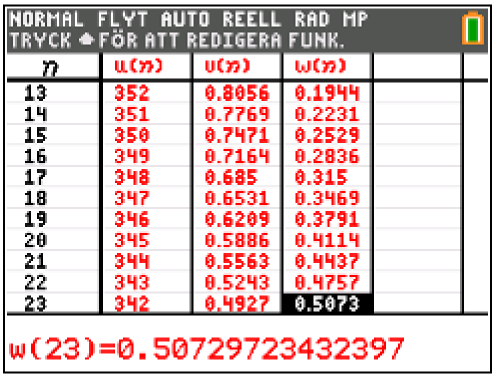
	A antal_personer	B omkastat	C	D sannolikhet	E
=				=1−c[]	
20	20.	346.	0.58856…	0.41143838…	
21	21.	345.	0.55631…	0.44368833…	
22	22.	344.	0.52430…	0.47569530…	
23	23.	343.	0.49270…	0.50729723…	
24	24.	342.	0.46165…	0.53834425…	
25	25.	341.	0.43130…	0.56869970…	
26	26.	340.	0.40175…	0.59824082…	
27	27.	339.	0.37314…	0.62685928…	
28	28.	338.	0.34553…	0.65446147…	
29	29.	337.	0.31903…	0.68096853…	
30	30.	336.	0.29368…	0.70631624…	
31	31.	335.	0.26954…	0.73045463…	
32	32.	334.	0.24665…	0.75334752…	
33	33.	333.	0.22502…	0.77497185…	
34	34.	332.	0.20468…	0.79531686…	
35	35.	331.	0.18561…	0.81438323…	
36	36.	330.	0.16781…	0.83218210…	
37	37.	329.	0.15126…	0.84873400…	
38	38.	328.	0.13593…	0.86406782…	

C23 $=\dfrac{b23}{365}\cdot c22$

För att beräkna sannolikheterna kan du mata in enligt nedan. Du kan jämföra med kalkylblads-formlerna på förra sidan.

u(n), v(n) och w(n) motsvarar kolumnerna B, C och D i kalkylarket på förra sidan.





n	u(n)	v(n)	w(n)
13	352	0.8056	0.1944
14	351	0.7769	0.2231
15	350	0.7471	0.2529
16	349	0.7164	0.2836
17	348	0.685	0.315
18	347	0.6531	0.3469
19	346	0.6209	0.3791
20	345	0.5886	0.4114
21	344	0.5563	0.4437
22	343	0.5243	0.4757
23	342	0.4927	0.5073

w(23)=0.50729723432397

Så här blir nu plottningen av w(n):