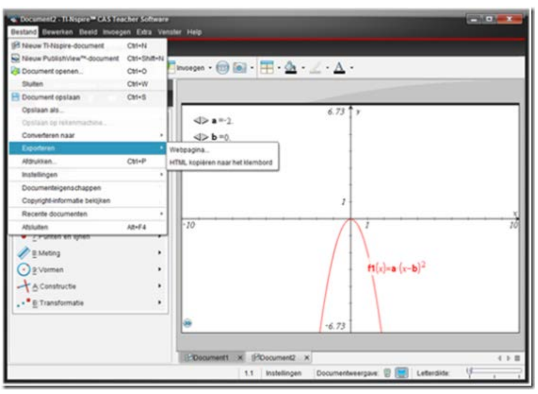
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 32

Het functiebegrip in de 2de graad

Een didactische aanpak met TI-rekentoestellen en software

Annelies Droessaert



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

INHOUDSOPGAVE

DEEL 1: Functies in de 2de graad

DEEL 2: Didactische hulpmiddelen

Deel 1

Functies in de tweede graad

I. DE GESCHIEDENIS VAN HET BEGRIP "FUNCTIE"

Om te weten hoe men het functiebegrip bij leerlingen in de tweede graad kan ontwikkelen, is het interessant om eens te kijken naar de geschiedenis van de analyse en in het bijzonder het begrip functie.

1. Analyse in de oudheid

De Grieken waren vooral echte meetkundigen, al kan je zeggen dat ze wel al met een aantal zaken uit de analyse bezig waren.

Zo hield het begrip "oneindig" hen al duidelijk bezig, denk maar aan de paradox van Achilles en de schildpad:

Achilles hield met de schildpad een hardloopwedstrijd. Achilles loopt 1000 maal zo snel als de schildpad. Daarom krijgt deze 1000 meter voorsprong. Die 1000 meter heeft Achilles in 100 seconden al afgelegd. De schildpad is dan slechts 1 meter verder gekomen. Over die ene meter doet Achilles slechts 0,1 seconde, maar de schildpad is daarna nog steeds 0,001 meter voor. En voor die 0,001 meter heeft Achilles weer een beetje tijd nodig waarin de schilpad ook weer een stukje vooruit komt. Kennelijk haalt Achilles de schildpad nooit in…

Ook wisten Eudoxus, maar vooral ook Archimedes, een methode te ontwikkelen om de oppervlakte van een cirkel en de inhoud en oppervlakte van een bol te bepalen. De gebruikte methode was eigenlijk een voorloper van integreren.

2. 14de, 15de en 16de eeuw

In de 14de eeuw begon men zich vragen te stellen over het verband tussen grootheden. Zo zocht men bijvoorbeeld een antwoord op de vraag hoe je kan bepalen hoe ver een voorwerp met een varabele snelheid op een bepaalde tijd geraakt. Nicole Oresme (1323-1382), bisschop van Lisieux, was de eerste die op het idee kwam om de variabele snelheid voor te stellen in een grafiek. Horizontaal plaatste hij de tijd en verticale lijnstukken stelden de snelheid voor. Dit was het begin van het werken met grafieken van functies.

In de 15de, 16de en 17de eeuw ontwikkelde het werken met lettervariabelen in de algebra zich verder. Pas in 17de eeuw gebruikte Galileï voor het eerst het woord functie in zijn bewegingsleer. In dezelfde periode legden Descartes en Fermat de grondslag voor de analytische meetkunde. Door deze ontwikkelingen kon men functies en grafieken verder beginnen bestuderen.

3. De 17de eeuw

Je zou kunnen zeggen dat de analyse werd ontwikkeld om de natuurwetenschappelijke vraagstukken van de 17de eeuw op te lossen. De problemen in die tijd hadden voornamelijk te maken met de beweging van lichamen, raaklijnen aan krommen (bv. voor optica), extremumproblemen (bv. om de raakwijdte van een kanon te bepalen), inhouds-, oppervlakte en lengtebepaling.

Bekende namen uit deze periode zijn Johannes Kepler, Galileo Galileï, Cavalieri, John Wallis en natuurlijk ook Fermat.

4. Newton en Leibniz

Isaac Newton en Gottfried Willhelm Leibniz voegden onafhankelijk van elkaar essentiële zaken toe aan het werk van hun voorgangers. Daardoor kan je zeggen dat zij de echte uitvinders zijn van wat we nu analyse noemen. Wie van beide eerst was, staat nog steeds ter discussie. Het was namelijk Newton die de theorie eerst bedacht, maar Leibniz kwam er onafhankelijk van Newton ook achter en publiceerde zijn theorie eerst. Ze ontdekten dat de bestaande differentieermethode voor veeltermen kon veralgemeend worden. Ook voerden zij bruikbare notaties in (dy/dx en het integraalteken komen bijvoorbeeld van Leibniz). De regels om te differentiëren en te integreren werden door hun beschreven en heel belangrijk is ook dat zij het verband tussen differentiëren en integreren ontdekten. De analyse die beide wiskundigen ontwikkelden komt telkens neer op de principes van integreren en differentiëren, bv. raaklijnen, extrema, booglengtes, oppervlaktes onder krommen, inhouden van omwentelingslichamen, enz.
Leibniz was de eerste die het woord “functio” gebruikte in 1673. Functio is afgeleid van het Latijnse “fungor”, wat betekent “ik voer een taak uit”. Hij bekeek een functie als een grootheid die verbonden is met een kromme , die ten opzichte van die kromme een taak uitvoert, een wiskundige taak.

5. Latere ontwikkelingen

Toen Leibniz in 1684 en 1688 zijn ideeën publiceerden was de interesse op het Europese vasteland groot. Vooral de Zwitsers Jakob en Johann Bernouilli en de Fransman L’Hôpital ontwikkelden zijn theorie verder. Het is trouwens Johann Bernouilli die in 1698 als eerste een functie definieerde als een analytische uitdrukking. Hij deed dit in de oplossing van een probleem omtrent grafieken. Hij stelde als symbool de Griekse letter ϕ of ϕx voor. Hij gaf de volgende omschrijv*ing* voor een functie: *"[On appelle fonction] d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes”.*
Euler was een leerling van Bernouilli en mogelijk de meest productieve wiskundige uit de geschiedenis. De notaties f en f(x) zijn door hem ingevoerd en met zijn boek “Introductio in Analysin Infinitorium” (1748) schreef hij mogelijk het belangrijkste boek voor de analyse. Eulers eerste definitie voor een functie leek zeer goed op die van Bernouilli: “*Eine Function einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgröossen zusammengestellt ist”.*
In 1755 past hij deze aan en verschilt deze wel wezenlijk van die van *zijn leraar: “If some quantities so depend on other quantities that if the latter are changed the former undergo*

change, then the former quantities are called functions of the latter. This denomination is of broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others. If therefore, x denotes a variable quantity, then all quantities which depend upon x in any way or are determined by it are called functions of it."
Belangrijk was ook Joseph Louis Lagrange, omdat hij grondlegger was van de moderne theorie van functies met reële variabelen.

6. De moderne analyse

Tot nu had men al ontzettend veel ontdekkingen gedaan op vlak van analyse, maar aan de logische opbouw was nog niet veel aandacht besteed. Dit kwam in de 19de eeuw, toen de axiomatische aanpak terrein won. Begrippen werden nauwkeurig vastgelegd en de definitie van reële getallen werd ook ingevoerd. De fransman Augustin Louis Cauchy voerde in 1821 het begrip limiet in en ging van een meetkundige benadering naar een rekenkundige benadering.
Zijn tijdsgenoot Lejeune Dirichlet verbreedde het functiebegrip. Hij was het die invoerde dat elk voorschrift waar voor elke x-waarde ten hoogste één y-waarde kan bepaald worden. Dit leverde hem merkwaardige discontinue en niet-afleidbare functies op, waardoor zijn theorie moest worden aangescherpt. Intussen had Bernard Bolzano twee soorten oneindig ontdekt: tussen 0 en 1 zitten oneindig veel reële getallen, waardoor alle reële getallen oneindiger zijn dan oneindig. Een merkwaardige tegenspraak dus.
In 1872 publiceerden Richard Dedekind en Georg Cantor een geheel nieuwe manier om reële getallen te definiëren in termen van verzamelingen, waarmee ze het probleem van Bolzano wisten aan te pakken. Dit leidde tot de verzamelingenleer en een geheel nieuwe opzet van de getallentheorie. Het fundament van de analyse kon verder vervolmaakt worden.

De definitie van een functie die we momenteel bij leerlingen in de 2de graad gebruiken is die van Dirichlet: "*Als een variabele y zo gerelateerd is aan een variabele x, dat elke keer dat een numerieke waarde aan x wordt toegekend er een regel is waarmee een unieke waarde van y is bepaald, dan is y een functie van de onafhankelijke variabele x."*

7. Didactische aanpak geïnspireerd op de evolutie in de geschiedenis

Wanneer we de geschiedenis van het begrip "functie" bekijken, merken we dat dit begrip ook sterk gegroeid is en dat de definitie die we aan onze leerlingen leren eigenlijk één van de laatste is. Nu verzamelingenleer niet tot de leerstof behoort, is de abstracte definitie dan ook moeilijker te begrijpen voor leerlingen van de tweede graad.
In Uitwiskeling (jaargang 13; nummer 3) lezen we het volgende in de paragraaf "lessen trekken uit de geschiedenis".
In het onderwijs zou het grondig fout zijn te doen alsof het functiebegrip een afgewerkt product is dat men in een supermarkt kan kopen. Als een expliciete functiedefinitie aan bod moet komen, dan kan dat pas gebeuren nadat de leerlingen eerst enkele jaren gewerkt *hebben met*

functionele verbanden (via tabellen, grafieken, formules, computerprogrammas's, …) en met meetkundige transformaties.

II. HET CONCEPT "FUNCTIE"

1. Een algoritme

In de eerste graad leerden leerlingen reeds regelmaat te ontdekken in een rij of patroon, formules op te stellen en vergelijkingen op te lossen. Hiervoor moesten ze dus eigenlijk op zoek naar een algoritme. Het kan handig zijn om dit eventjes op te frissen alvorens echt over functies te spreken.

> *"Een **algoritme** is een eindige reeks instructies - meestal voor berekening of dataverwerking- om vanuit een gegeven begintoestand het daarbij behorende doel te bereiken. Dat doel kan van alles zijn met een duidelijk resultaat. De instructies kunnen in het algemeen omgaan met eventualiteiten die bij het uitvoeren kunnen optreden. Algoritmen hebben in het algemeen stappen die zich herhalen (iteratie) of die beslissingen (logica of vergelijkingen) vereisen om de taak te voltooien.*
>
> *Eenzelfde taak kan gewoonlijk met verschillende reeksen instructies worden opgelost. Het verschil ligt dan meestal in de hoeveelheid tijd, ruimte of inspanning die het algoritme vergt; dit is de complexiteit van een algoritme. Een recept is een voorbeeld van een algoritme. Om aardappelsalade te maken kan het ene recept de instructie "schil de aardappel" bevatten en daarna de instructie "kook de aardappel". Bij een ander recept kunnen die twee stappen omgedraaid zijn. Beide recepten zullen echter vragen deze stappen voor alle aardappelen uit te voeren en het eindresultaat is een lekkere aardappelsalade."*
>
> *(http://nl.wikipedia.org/wiki/Algoritme)*

Het spreekt voor zich dat we leerlingen niet gaan confronteren met deze uitgebreide definitie, maar door middel van opdrachten kunnen we hun laten ondervinden wat een algoritme is.

Opdracht: voorbeeld van een algoritme

- Kies een getal (dit is de **input**).
- Verdubbel het resultaat.
- Trek 4 af van het resultaat.
- Deel de uitkomst door 2.
- Vermeerder de uitkomst met 7.
- Zo bekom je de **output.**

Werken met dit algoritme

a. De input is 3, wat is de output?
b. De input is 7, wat is de output?
c. De input is n, wat is de output?
d. De output is 7, wat is de input?
e. De output is 19, wat is de input?

Door deze eenvoudige oefening merken leerlingen dat het algoritme op zich iets anders is dan de formule die ze in c vonden. De formule is dus een manier om voor te stellen wat dit algoritme doet.
In d en e gaan ze op zoek naar de input, waardoor ze dus eigenlijk de inverse doen. Sommige leerlingen zullen alle stappen achterstevoren doen, anderen zullen misschien een vergelijking oplossen. Door stil te staan bij hun manier van werken, kan je hieruit al heel wat herhalen. Als je dat wil kan je na e vragen om hier ook algoritme voor op te stellen en daarbij de formule te bepalen. Zo heb je het eerste algoritme en het tweede algoritme dat het eerste ongedaan maakt. Later wordt dat functie en inverse functie.

Een algoritme is dus een opeenvolging van instructies. Soms kan dit ook zeer eenvoudig zijn, zoals bijvoorbeeld "tel bij ieder getal 2 bij" of "kijk of een getal deelbaar is door 2". Hiervoor hoef je amper nog iets uit te voeren, omdat onze hersenen deze algoritmes reeds automatisch uitvoeren. Ook in machines zitten algoritmes. Denk maar aan een frisdrankenautomaat (die degelijk werkt tenminste). We duwen op een knop (input), waardoor een algoritme uitgevoerd wordt en we een blikje frisdrank krijgen (output).

2. Een functie

Hierboven hadden we het over algoritmes waarbij we vertrokken van een input en door de uitvoering van het algoritme een output kregen. Dit was een voorbeeld van een functie. Om beter te begrijpen wat een functie is, kunnen we bijvoorbeeld met een tabel zoals hieronder werken.

Input		**Output**
Een geheel getal Vb. *5* …	$\mapsto$	Even of oneven *oneven* …
Een land Vb. *België* *Nederland*	$\mapsto$	De hoofdstad … …
De zijde van een vierkant Vb. *3*	$\mapsto$	Oppervlakte van het vierkant …
Een woord Vb. *functie*	$\mapsto$	De eerste letter van dat woord …
Een getal *Vb. 5*	$\mapsto$	Een kleiner getal …
Een geheel getal Vb. *12*	$\mapsto$	Een deler van dit getal …
Een provincie Vb. *Oost-Vlaanderen*	$\mapsto$	Een stad in die provincie …

Tussen de input en output bestaat een verband (voorgesteld door de pijl). In een aantal situaties gaat het om een functie, in andere niet. Laat de leerlingen deze classificatie maken en er zo zelf achter komen wat precies typisch is aan een functie.

Bij een functie kunnen we de input en output ook voorstellen als koppel, bijvoorbeeld (2, even), (België, Brussel), (3,9), (functie, f) enzovoort. Wanneer we het eerste element hebben, kunnen we het tweede daarbij ondubbelzinnig bepalen.

Hierna kunnen we de definitie van een functie geven. Deze kan afhangen van het gekozen handboek.

3. Tabel, formule of voorschrift en grafiek

In de eerste graad hebben de leerlingen reeds regelmaat moeten leren ontdekken, formules opstellen en omvormen en recht- en omgekeerd evenredige verbanden gezien. Vanuit verschillende voorbeelden kunnen we dit opnieuw opfrissen. Hierbij zullen we vooral oefeningen zien waarin leerlingen een beschreven verband, een formule, een tabel en een grafiek moeten combineren.

Zo komen we dus tot het feit dat een functie kan voorgesteld worden door een tabel, voorschrift en grafiek. We moeten er zeker en vast zelf over waken dat we een functie niet verwarren met de grafiek of het voorschrift op zich. Hierbij denk ik bijvoorbeeld aan vragen zoals:

- "Hieronder zie je een functie. Geef het voorschrift." Beter is: "Hieronder zie je de grafiek van een functie. Geef het voorschrift."
- "Geef een functie die door de oorsprong en P(1,3) gaat." Beter is: "Geef het functievoorschrift van een functie waarvan de grafiek een rechte door de oorsprong en P(1,3) is."

III. BEGRIPPENKADER

1. Een overzicht van de begrippen

- **De onafhankelijk veranderlijke en de afhankelijk veranderlijke.**
  Als twee grootheden met elkaar in verband staan:
  - noemt men de grootheid waarvoor men de waarden kiest de onafhankelijk veranderlijke.
  - noemt men de grootheid waarvan men de waarden bepaalt de afhankelijk veranderlijke.

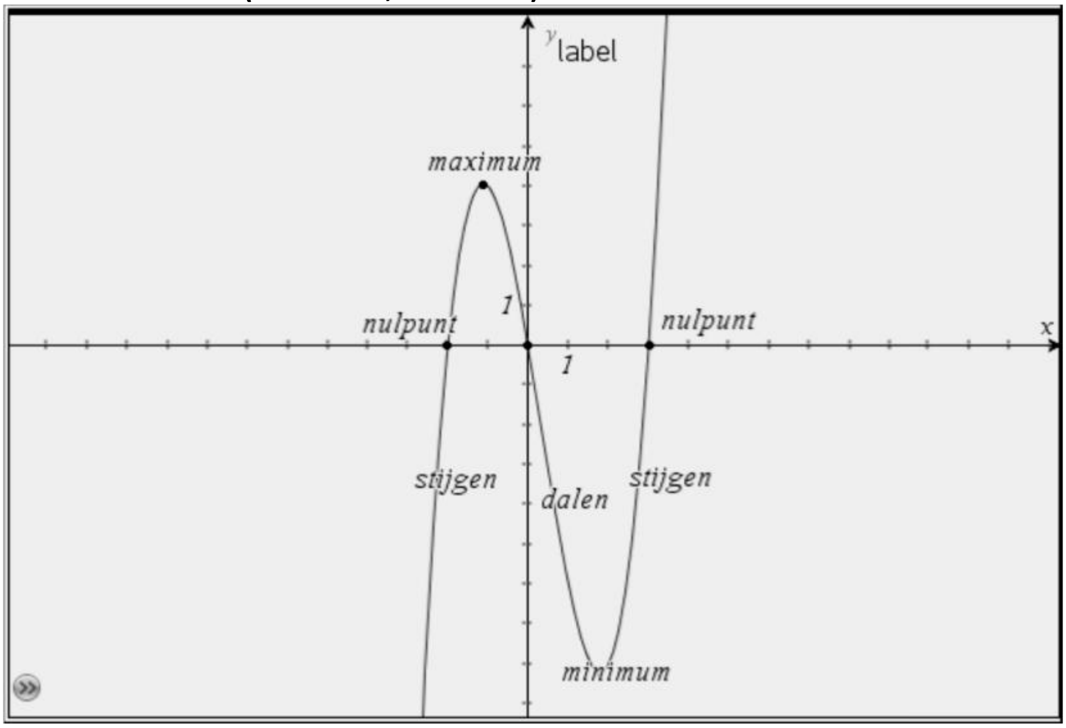
- **Een functie is** een verband tussen twee veranderlijken zo dat bij elke waarde van de onafhankelijk veranderlijke **hoogstens één** waarde van de afhankelijk veranderlijke behoort.
- **Een functie kan op drie manieren voorgesteld worden:**
  - **Tabel**: voor een (meestal) beperkt aantal waarden van x kan je de overeenstemmende waarde van y aflezen.
  - **Grafiek**: voor een grote reeks waarden van x kan je, bij benadering, de overeenstemmende waarde van y aflezen.
  - **Functievoorschrift**: voor elke waarde van x kan je de overeenstemmende waarde van y berekenen.

- **Invoerwaarde en functiewaarde**
  In het functievoorschrift "f(x) = y":
  is x de invoerwaarde, de x-waarde of het origineel
  is y de functiewaarde of het beeld van x

- **Het verloop van een functie.**
  - Een functie is **stijgend** in een interval als: in dat interval bij toenemende waarden van x de functiewaarden groter worden.
  - Een functie is **dalend** in een interval als: in dat interval bij toenemende waarden van x de functiewaarden kleiner worden.
  - Een functie is **constant** in een interval als: in dat interval bij toenemende waarden van x de functiewaarden gelijk zijn.

- **Domein en bereik van een functie.**
  De verzameling van alle getallen x waarvoor de functiewaarde bestaat noemen we het **domein** van de functie.
  De verzameling van alle functiewaarden van een functie noemen we het **bereik** van de functie.
  Opmerking: in opgaven bij concrete situaties wordt vaak gewerkt met een praktisch (of zinvol of realistisch) domein waarbij dan ook een praktisch beeld hoort.

- **Extreme waarden (maximum, minimum)**



- **Nulwaarde (nulpunt).**
  Een nulwaarde is een x-waarde of origineel waarvoor de functiewaarde gelijk is aan nul;
  - **grafisch** is deze te vinden door het eerste coördinaatgetal te bepalen van snijpunt(en) van de grafiek met de x-as;
  - **in de tabel** te vinden door y-waarden te zoeken die gelijk zijn aan nul en daarvan de bijhorende x-waarde af te lezen;
  - **algebraïsch** te vinden door het oplossen van f(x)=0.

2. Domein en beeld aanbrengen met behulp van TI-nSpire

Met behulp van applets kan je het domein en het beeld visueel voorstellen. Op het net kan je er zo verscheidene vinden, maar met TI-nSpire kan je dit ook prima illustreren. Het voordeel is dat je hiermee ook snel een ander voorschrift kan ingeven en zo verschillende functies na elkaar bestuderen.

2.1 Bestaand materiaal

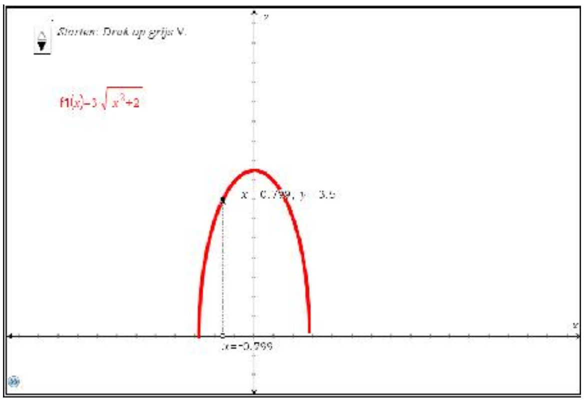
Zowel van Gert Treurniet als van Etienne Goemaere kreeg ik enkele voorbeelden. Deze kunnen gedownload worden op de website van T³-Vlaanderen.
Verder lees je ook hoe je zelf iets dergelijk kan maken of laten maken door jouw leerlingen.

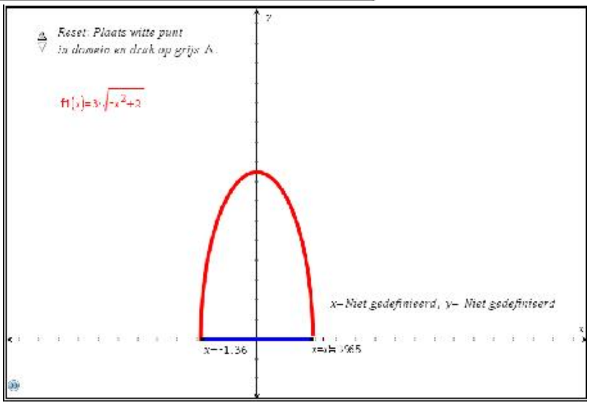
a) Domein

"Het domein van een functie"

Dynamische presentatie van bepalen domein

Aanwijzingen voor de docent:
- Op de volgende pagina kan het worden gedemonstreerd.
- Beweeg het witte punt.
- Het functievoorschrift kan worden veranderd als volgt:
  - Verander het functievoorschrift door erop te dubbelklikken en het te wijzigen.
  - Plaats het witte punt in het domein.
  - Pas eventueel het venster aan door achtergrond of assen te schuiven
    (houd de shift-toets ingedrukt om slechts één as aan te passen)
    LET OP: Pas de eindwaarden van de assen niet aan!
  - Reset door op Δ te drukken
  - Start door op ∇ te drukken.
  - Beweeg het witte punt rustig naar links en rechts.

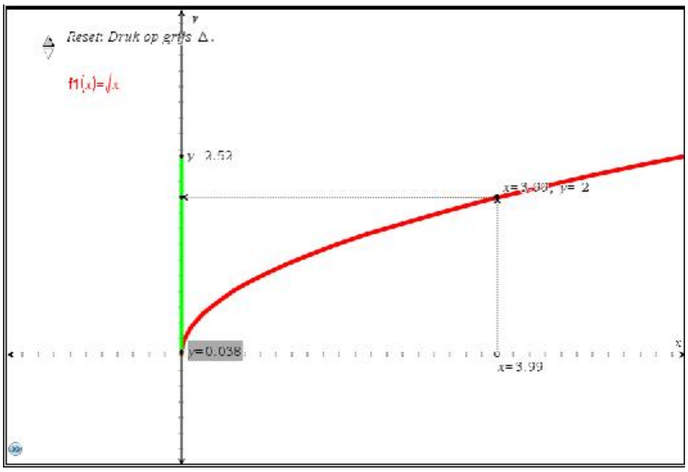




b) Bereik of beeld

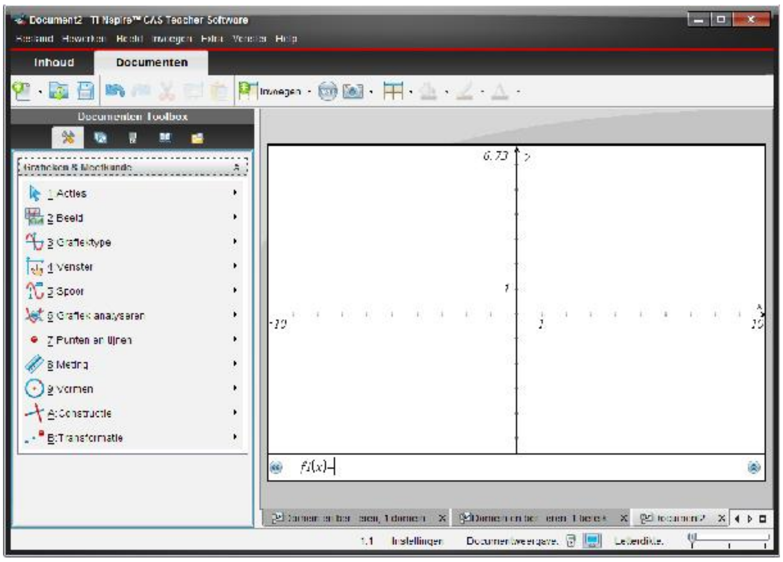
Dynamische presentatie van bepalen bereik

Aanwijzingen voor de docent:
- Op de volgende pagina kan het worden gedemonstreerd.
- Beweeg het witte punt.
- Het functievoorschrift kan worden veranderd als volgt:
  - Plaats het witte punt in het **domein van de huidige EN de nieuwe functie**
    (en dus moet er een overlap zijn met de huidige functie, als die er niet is, gebruik dan eerst y=x)
  - Verander het functievoorschrift door erop te dubbelklikken en het te wijzigen.
    - Pas eventueel het venster aan door achtergrond of assen te schuiven
    (houd de shift-toets ingedrukt om slechts één as aan te passen)
  - Reset door op Δ te drukken
  - Start door op ∇ te drukken.
  - Beweeg het witte punt rustig naar links en rechts.

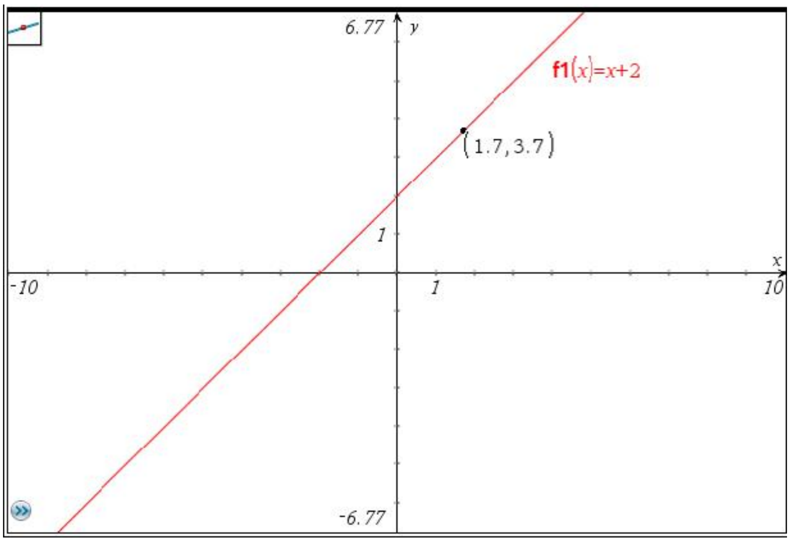


2.2 <u>Op eenvoudige wijze zelf dergelijke toepassing maken met de TI-nSpire software</u>

- Voeg een grafieken- en meetkundevenster toe.



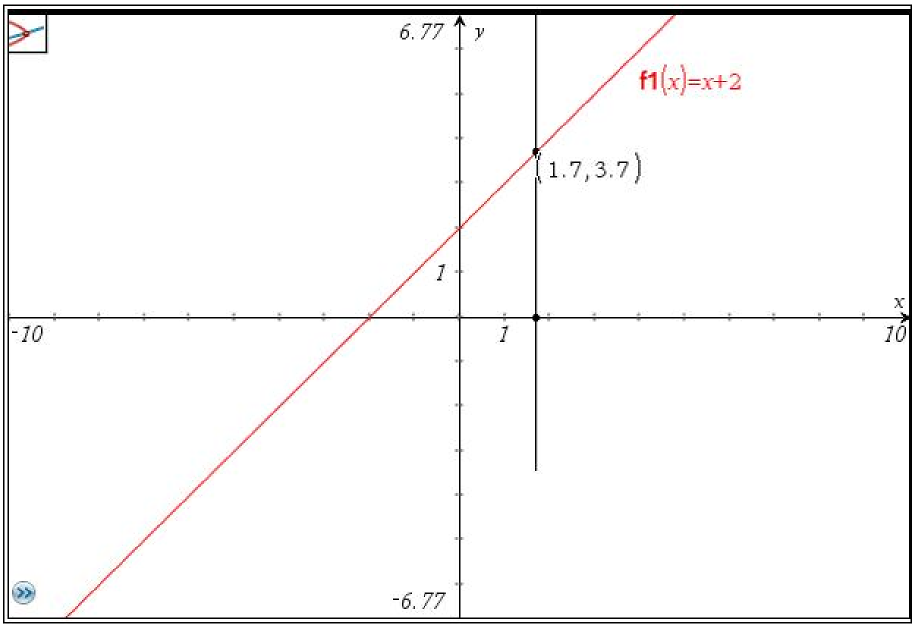
- Geef een functievoorschrift in, bijvoorbeeld f1(x)= x + 2
- Kies in het toolsmenu 7: punten en lijnen, 2: Punt op en duid een punt aan op de grafiek.



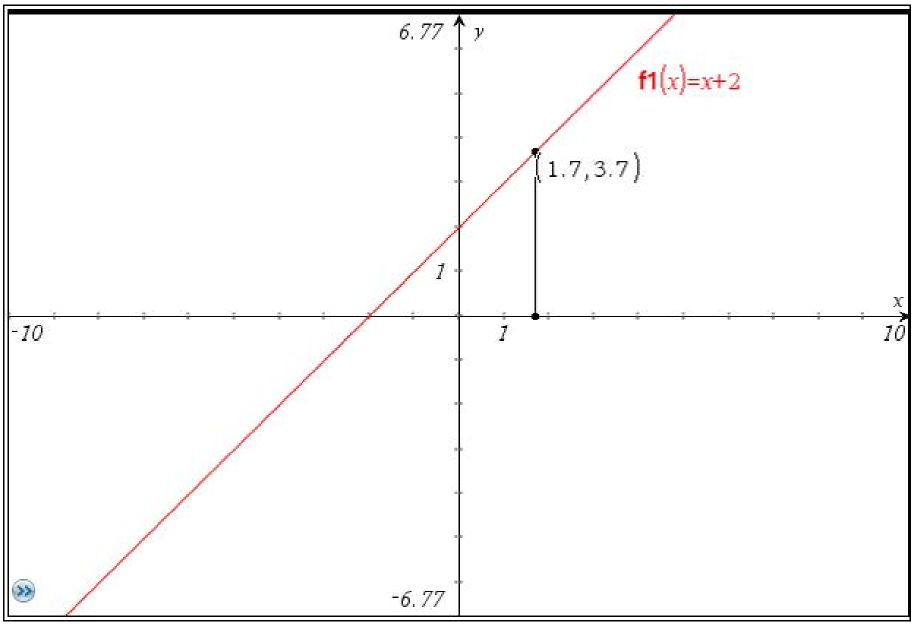
De coördinaten van dit punt worden weergegeven.

- Kies in het menu A: Constructie, 1: Loodlijn en teken een loodlijn door het gekozen punt op de x-as.

- Bepaal het snijpunt van deze loodlijn met de x-as (7: Punten en lijnen, 3: Snijpunt(en))

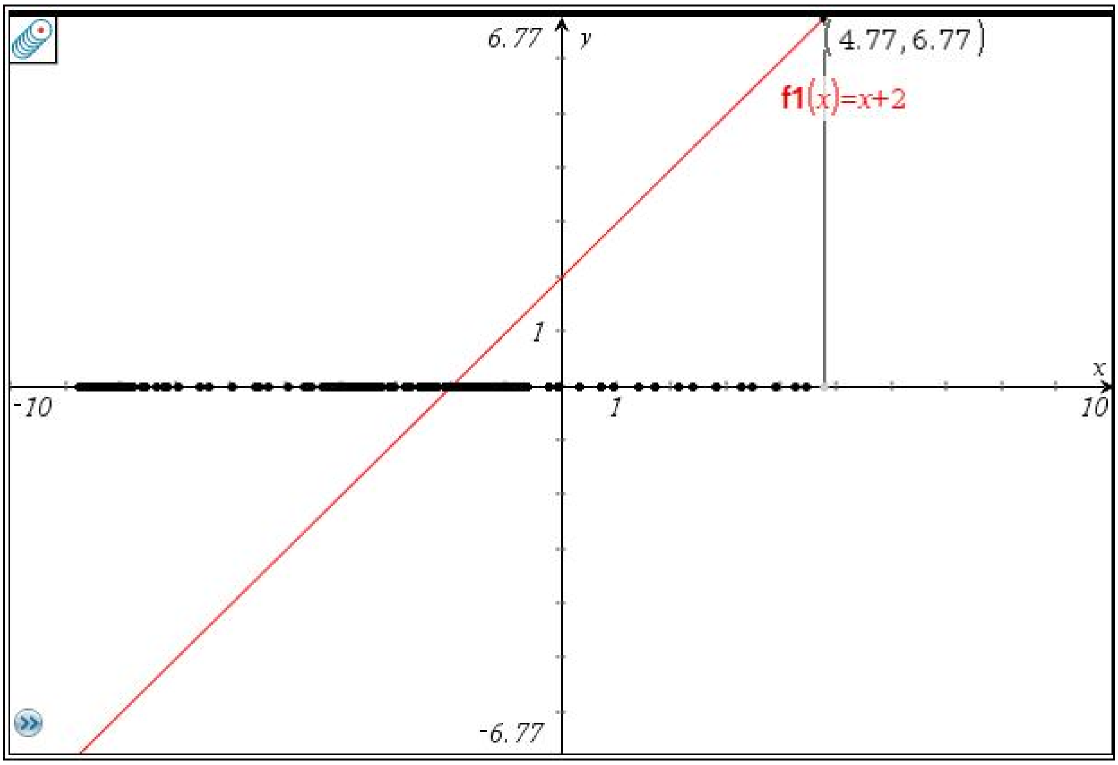


- Teken een lijnstuk tussen het punt op de grafiek en het snijpunt (7: Punten en lijnen, 5: Lijnstuk). Je zal niet onmiddellijk veranderingen zien, maar nu kunnen we de loodlijn wel verbergen om alles aanschouwelijker te maken. Klik hiervoor rechts op deze lijn en kies voor 4: Verbergen.

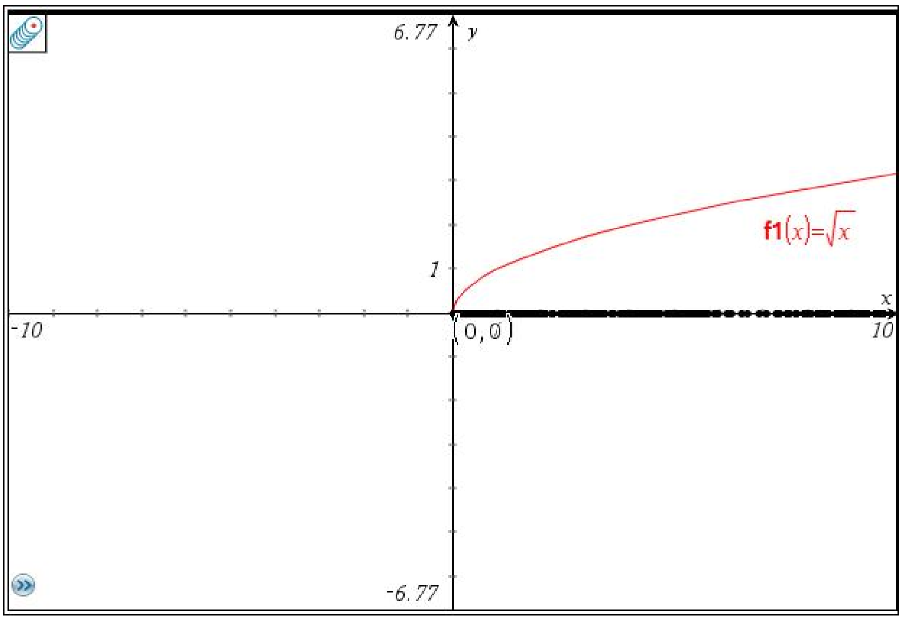


- Klik nu rechts op het snijpunt met de x-as en kies voor 9: Meetkundig spoor.

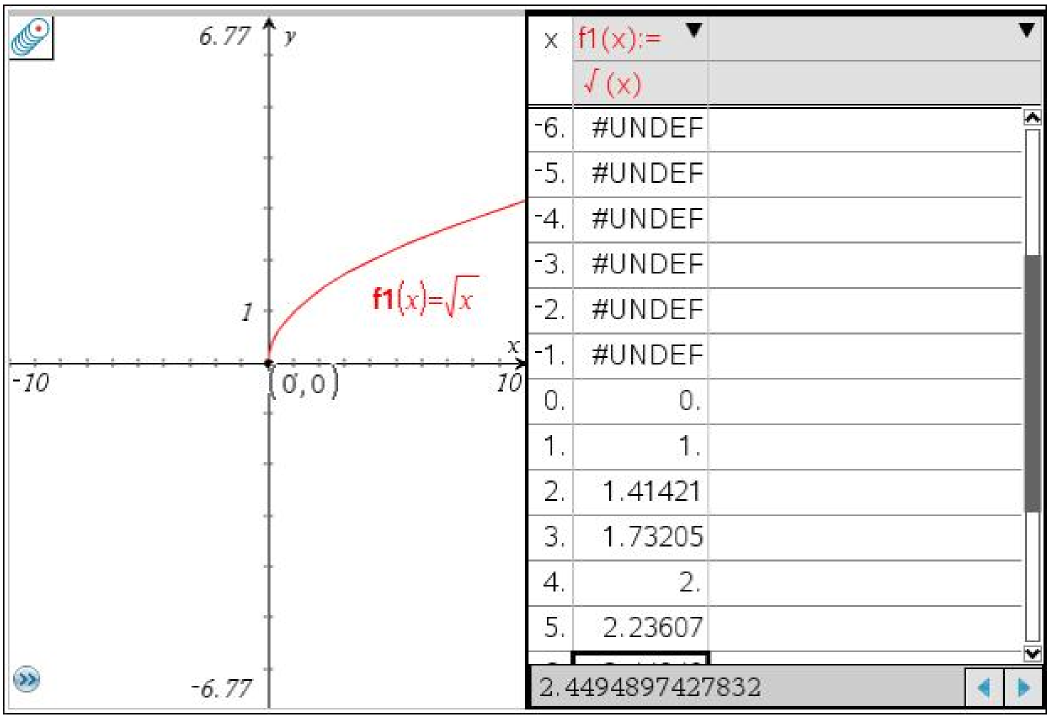
- Wanneer je het punt op de grafiek gaat verslepen, zal het meetkundig spoor van het punt op de x-as getekend worden.



- Door onderaan op >> te klikken (of rechtstreeks in het voorschrift dat bij de grafiek staat) kan je het voorschrift aanpassen. Klik wel eerst eens rechts op een blanco plaats in het venster en kies 7: Meetkundig spoort wissen.
- Eens het nieuw voorschrift ingegeven is en het meetkundig spoor van het vorig voorbeeld verwijderd is kan opnieuw rechtsklikken op het punt op de x-as om het meetkundig spoor te activeren.



Suggestie: Geef ook de functietabel weer door in het toolsmenu bij 2: Beeld, A: Tabel weergeven te kiezen. Zo wordt nogmaals duidelijk dat de functiewaarden niet gedefinieerd zijn buiten het domein.



Dezelfde werkwijze kan men volgen om het bereik of beeld te illustreren.

IV. VOORBEELDEN VAN FUNCTIES MET TI-nSpire OF TI84

1. Waarom is ICT een meerwaarde voor het bestuderen van functies?

Dankzij het grafisch rekentoestel of software zoals TI-nSpire of Cabri kunnen we functies bespreken waarvoor leerlingen anders nog niet de nodige algebraïsche vaardigheden bezitten. Hierdoor kunnen we bijvoorbeeld onmiddellijk veeltermfuncties, exponentiële functies, enzovoort laten bestuderen. Hierbij kunnen we denken aan het bepalen van nulpunten, extrema endergelijke. Ook kan het interessanter om begrippen zoals het domein en beeld van daaruit te bestuderen.
Andere voordelen aan het gebruik van ICT bij het bestuderen van functies zijn de volgende:

- We kunnen het begrip functie ruimer bekijken in al zijn facetten. Het verband tussen formule (vergelijking of voorschrift), de tabel en de grafiek kan dankzij ICT beter gelegd worden.
- Tijdsbesparing
- De leerlingen kunnen het verband ontdekken tussen een aantal algebraïsche vaardigheden, zoals een vergelijking oplossen en het grafisch alternatief.
- Vaardigheden zoals schattend rekenen, grafieken interpreteren, grafieken schetsen, e.d. zullen aan belang winnen.
- Men kan ICT gemakkelijk als controlemiddel gebruiken.

2. Voorbeelden met TI84

2.1 Voorbeeld 1

Opgave

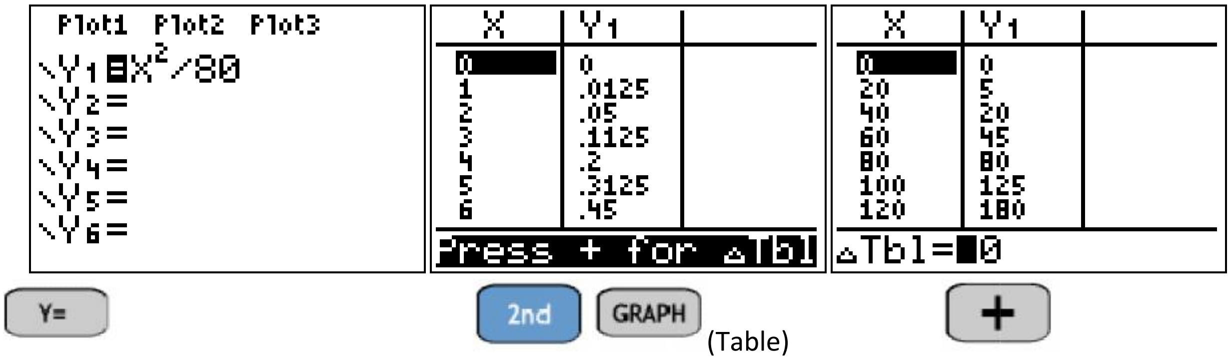
Het verband tussen de lengte s (in m) van de remweg van een auto en zijn snelheid v (in km/h) wordt weergegeven door de formule $s = \frac{v^2}{80}$.

- Vul de tabel hieronder aan.

Snelheid (km/h)	30	50	70	90	120
Afstand (m)					

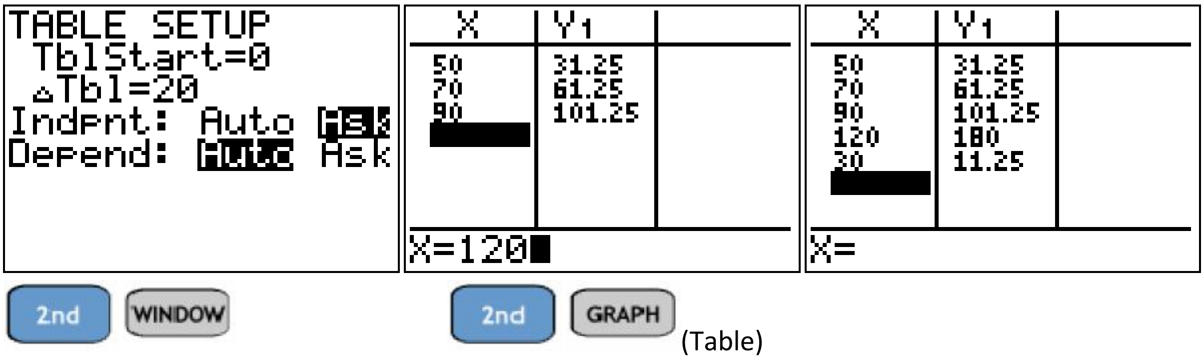
- Maak met jouw GRM een grafiek waarbij de afstand wordt voorgesteld in functie van de snelheid. Kies de vensterinstellingen zodanig dat de onderstaande vragen ook kunnen opgelost worden.
- Een auto rijdt op de autosnelweg aan 130 km/h. Hoeveel m heeft hij nodig om tot stilstand te komen?
- Aan welke snelheid mag een automobilist maximum rijden om tijdig te remmen voor een boomstam die zich 50 m voor hem op de weg bevindt.

Oplossing

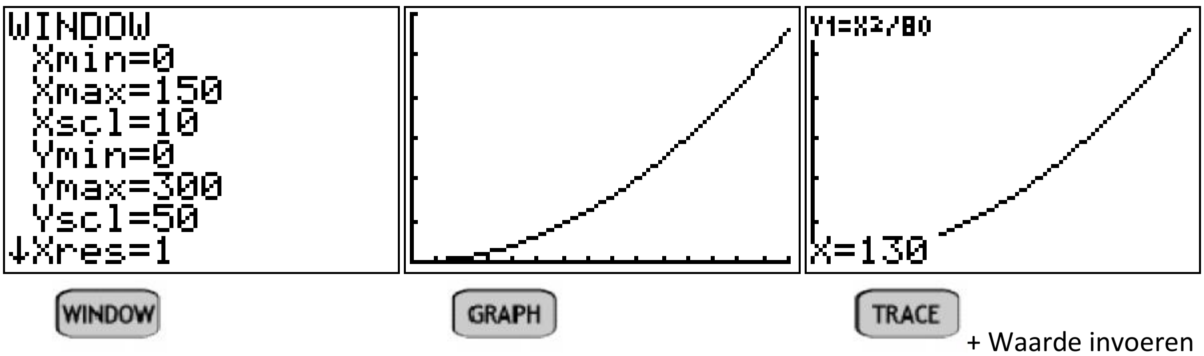


(Table)

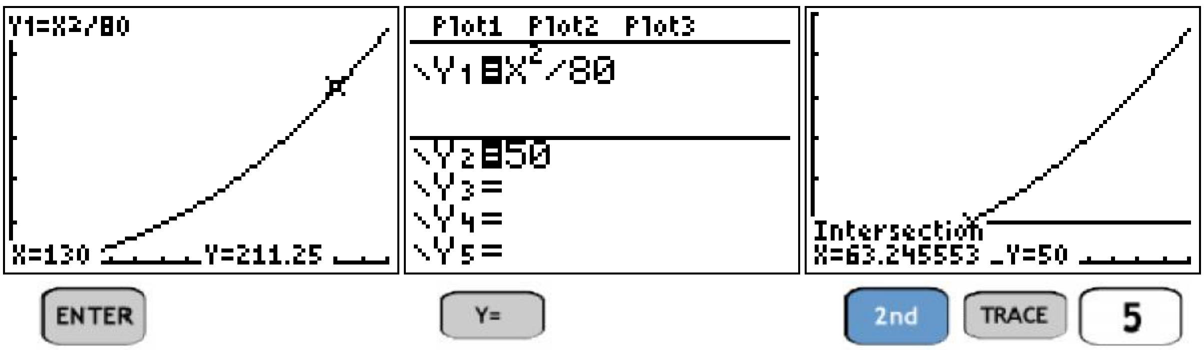
Door op “+” te drukken, kunnen we de stapgrootte in de tabel aanpassen, maar we vinden op deze manier nog niet de gevraagde waarden voor in de tabel. Door naar de tabelinstellingen te gaan kunnen we dit verder specificeren, maar we kunnen eveneens een tabel laten samenstellen met waarden die we zelf ingeven.



(Table)



+ Waarde invoeren



Opmerkingen:

- Deze oefening past perfect in een 3de jaar, ondanks het feit dat het strikt genomen om kwadratische functies gaat.

- Hierboven werd de oefening volledig met de GRM opgelost, maar je kan hier ook vragen om een algebraïsche uitwerking. Om dit duidelijk te maken aan de leerlingen zijn duidelijke afspraken omtrent de vraagstelling erg belangrijk. Verder in dit cahier vind je meer hierover.

2.2 Voorbeeld 2

Opgave

Van een reeks driehoeken is het maatgetal van de oppervlakte gelijk aan 10.

- Noteer een formule die het verband aangeeft tussen basis en hoogte van deze driehoeken.
- Kies een passende vensterinstelling en teken een grafiek van dit verband. Zet de hoogte uit t.o.v. de basis.
- Bereken de waarde(n) waarbij basis en hoogte even groot zijn en controleer op de grafiek.
- Schets de grafiek in je schrift. Hoe verloopt de grafiek?

Redenering

$$\frac{b \cdot h}{2} = 10$$

$$b \cdot h = 20$$

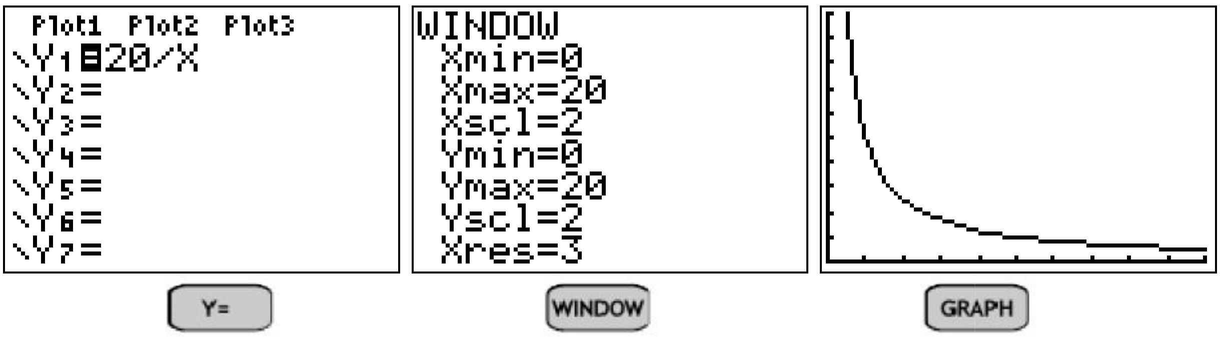
$$h = \frac{20}{b}$$

Wanneer b en h even groot zijn krijgen we:

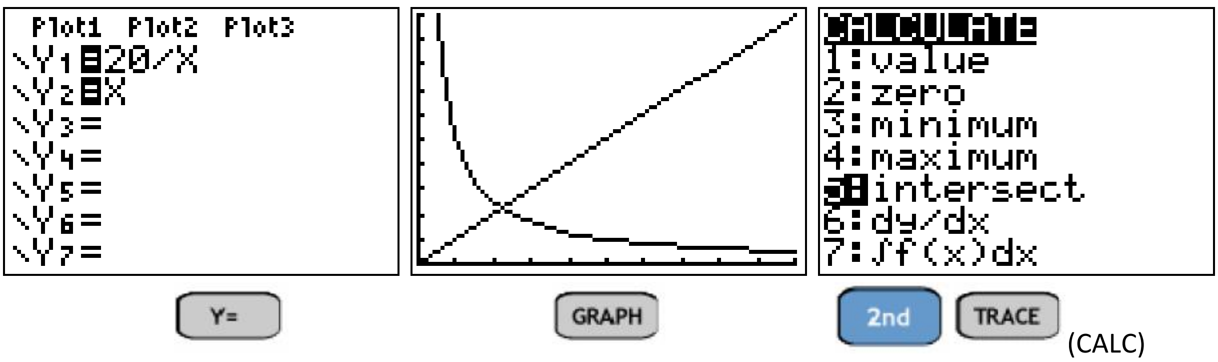
$$b^2 = h^2 = 20$$

$$b = h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

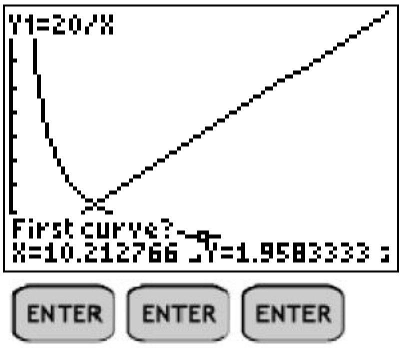
Uitwerking met de TI84

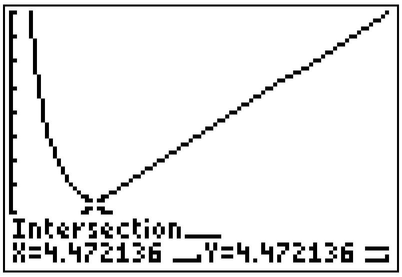


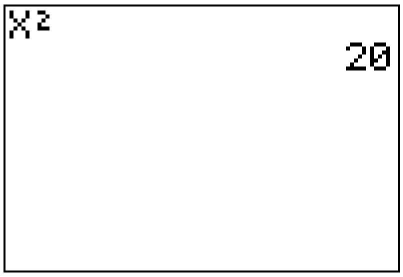
Basis en hoogte even groot? Dit wil zeggen y = x.



(CALC)







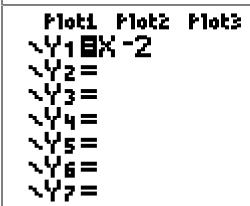
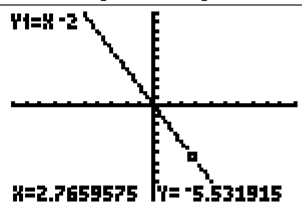
Controle

2.3 <u>Aandachtspunten</u>

- Hecht voldoende belang aan het <u>expliciteren van de wiskundige terminologie</u> bij het beantwoorden van vragen (functiewaarde, origineel, nulpunt, maximum, oplossen van de vergelijking/ongelijkheid, …).

- Vraag ook aan de leerlingen welk soort grafiek ze verwachten te bekomen bij een gegeven verband vooraleer ze de grafiek tekenen met GRM (“<u>schatten”)</u>. Een typfout is immers snel gebeurd.

Voorbeeld (als demonstratie)

[Y=] kies het toestandsteken (-) i.p.v. het bewerkingsteken -	vraag de leerlingen welke grafiek ze verwachten(o.m.verloop) en dan [GRAPH]	[X,T,θ,n] [(-)] [2] wordt verwerkt als “-2x “…
		

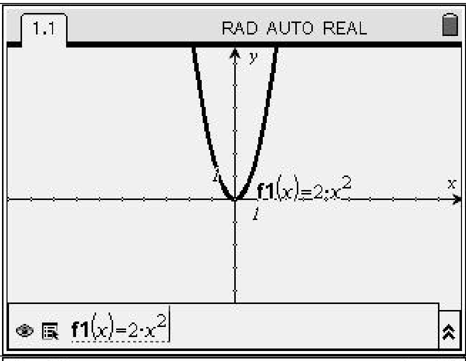
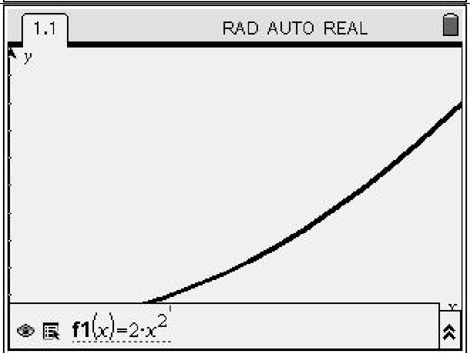
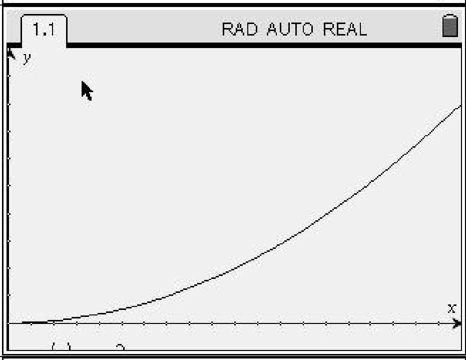
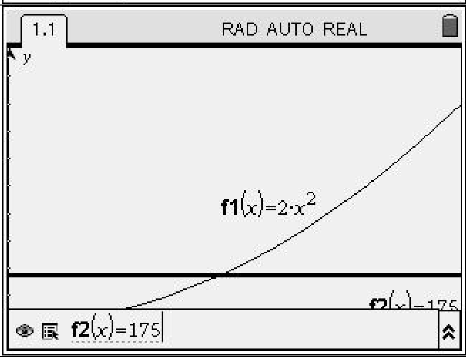
3. <u>Voorbeelden met de TI-nSpire</u>

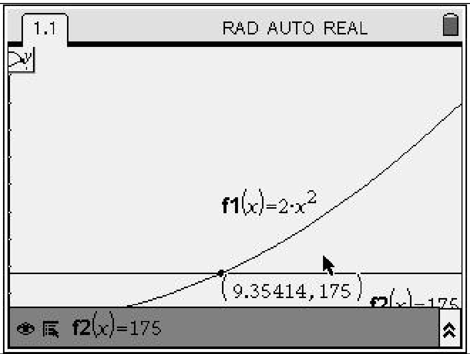
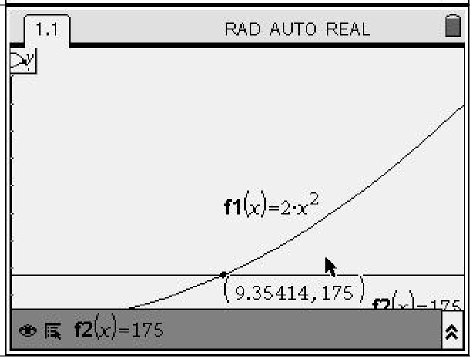
3.1 <u>Voorbeeld 1</u>

Opgave

De lengte van een rechthoek is gelijk aan het dubbele van de breedte.

- Stel een formule op die de verandering van de oppervlakte weergeeft in functie van de breedte. Veronderstel dat de breedte varieert tussen 0 en 20 cm.
- Teken de grafiek. Hoe verloopt de grafiek?
- Lees grafisch af voor welke waarde(n) van de breedte de oppervlakte kleiner is dan 175 cm².

<table>
<tr><td>
</td><td>- Home, 2: Grafieken en meetkunde
- Voorschrift f1(x) = 2x² invoeren</td></tr>
<tr><td>
</td><td>- Menu, 4: Venster, 1: Vensterinstellingen</td></tr>
<tr><td>
</td><td>- Invoerregel verbergen door: Menu, 2: Beeld, 6: Invoerregel verbergen</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Voor het vervolg moeten we de invoerregel terug weergeven. Dit kan kort door Ctrl + G te drukken.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>- f2(x) = 175 invoeren</td></tr>
</table>

	- Menu, 6: Punten en lijnen, 3: Snijpunt(en) - de 2 verschillende grafieken aanklikken
	Antwoord: Als de breedte tussen 0 en 9,35 cm ligt, is de oppervlakte kleiner dan 175 cm².

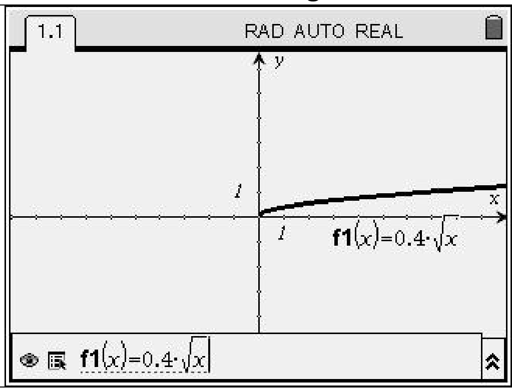
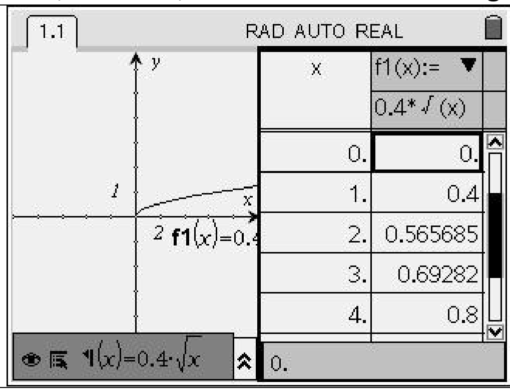
3.2 Voorbeeld 2

Opdracht

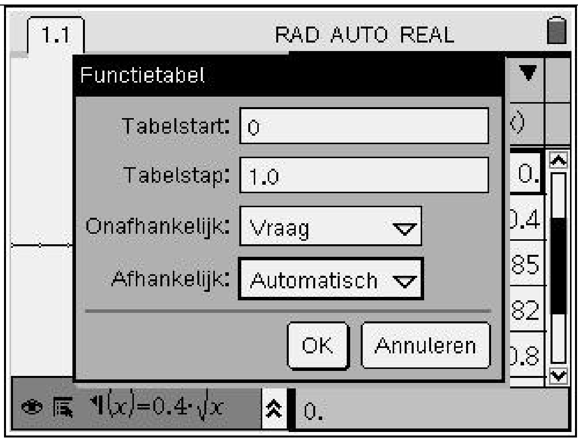
Tussen de oppervlakte en de zijde van een regelmatige negenhoek bestaat (benaderd) volgend verband: zijde = $0{,}4 \cdot \sqrt{\text{oppervlakte}}$.

Teken (met GRM) de grafiek voor de zijde in functie van de oppervlakte .

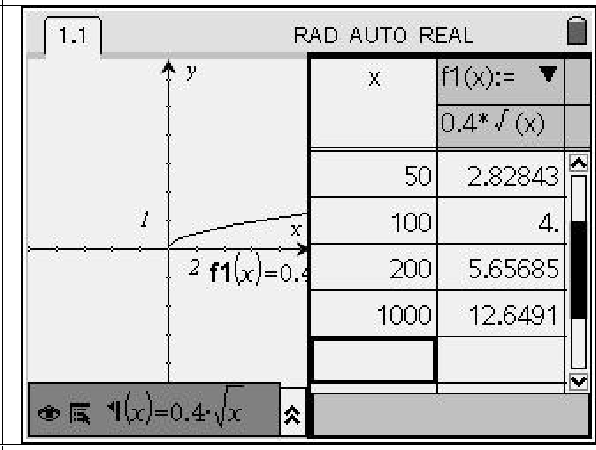
- Hoe verloopt deze grafiek?
- Lees op de grafiek af hoe lang de zijde is als de oppervlakte gelijk is aan 150 cm².
- Lees op de grafiek de oppervlakte af als de zijde gelijk is aan 6 cm.
- Lees in de tabel de zijde af als de oppervlakte gelijk is aan 725 cm².
- Lees in de tabel de oppervlakte af als de zijde gelijk is aan 12 cm.
- Controleer de antwoorden door berekening.

Voorschrift ingeven	Menu, 2: Beeld, 9: Functietabel toevoegen
	

Naar tabel gaan (eventueel Ctrl, Tab)
Menu, 5: Functietabel, 3: Tabelinstellingen bewerken

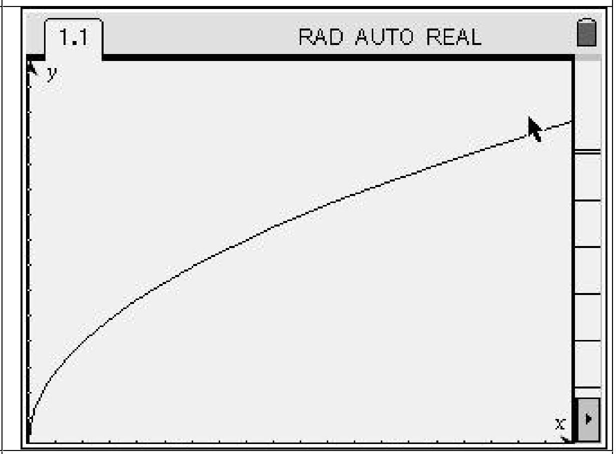


Gekozen waarde voor x invoeren en op Enter drukken

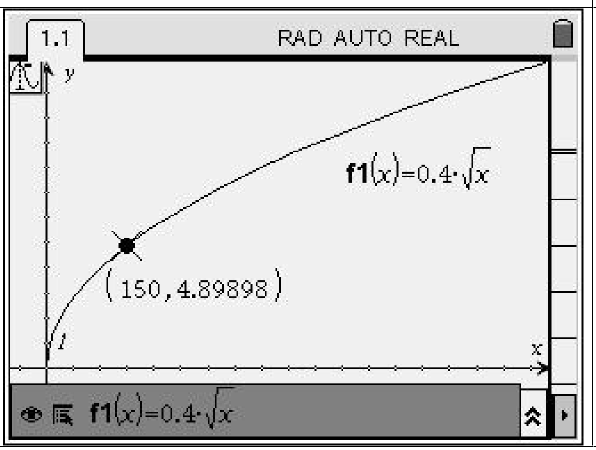


Via Ctrl, Tab naar grafiekvenster
Menu, 4:Venster, 1: Vensterinstellingen

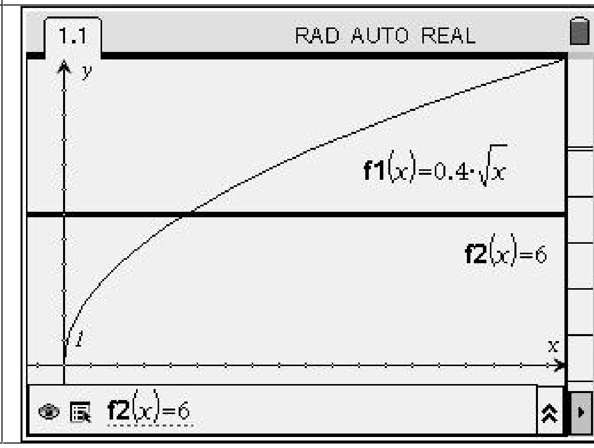
Verberg functietabel: Ctrl, Home,
5: Pagina-indeling, 1: Aangepaste verdeling, met pijltjes naar rechts en klikken

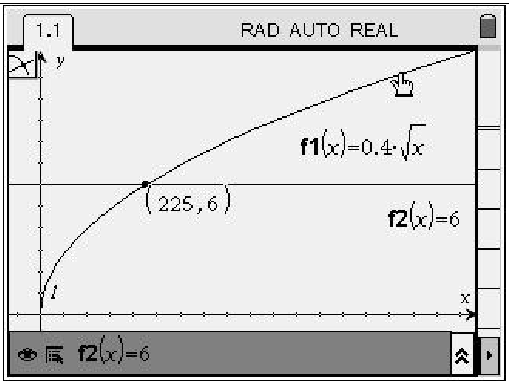
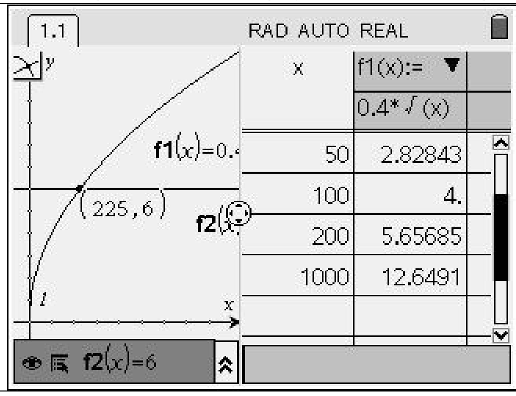
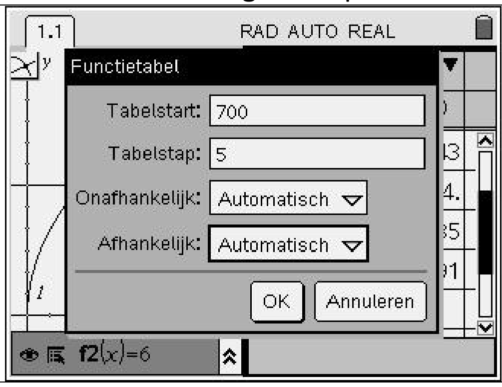
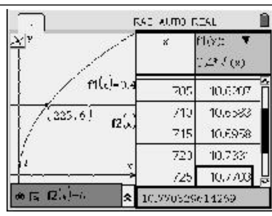
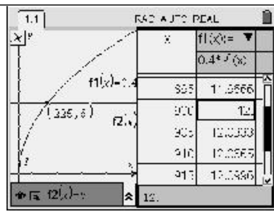


Menu, 5: Spoor, 1: Grafiekspoor,
150 intypen



Nieuw functievoorschrift invoeren



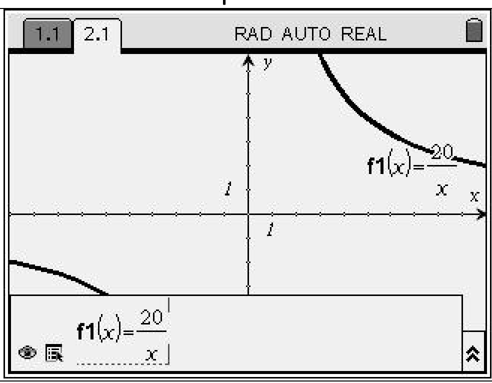
<table>
<tr><td>Menu, 6: Punten en lijnen, 3: Snijpunt(en)</td><td>Functietabel weer volledig op scherm brengen door aangepaste verdeling</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tabelinstellingen aanpassen</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td> </td></tr>
</table>

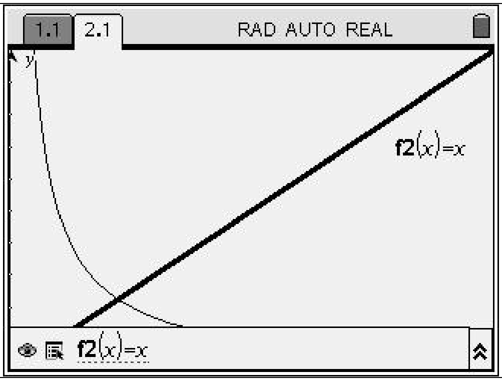
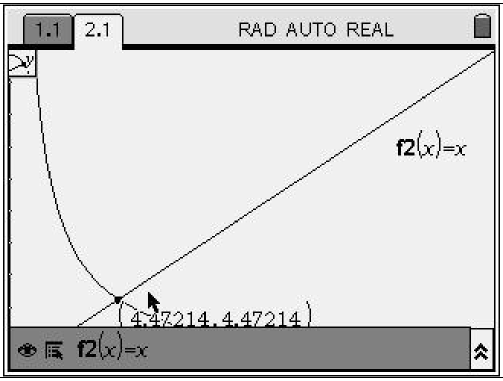
3.3 <u>Voorbeeld 3</u>

Opdracht

Van een reeks driehoeken is het maatgetal van de oppervlakte gelijk aan 10.

- Noteer een formule die het verband aangeeft tussen basis en hoogte van deze driehoeken.
- Kies een passende vensterinstelling en teken een grafiek van dit verband. Zet de hoogte uit t.o.v. de basis.
- Bereken de waarde(n) waarbij basis en hoogte even groot zijn en controleer op de grafiek.
- Schets de grafiek in je schrift. Hoe verloopt de grafiek?

<table>
<tr><td>Voorschrift bepalen en invoeren</td><td>Vensterinstellingen aanpassen</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Controle op rekenmachine door f2(x) = x in te voeren	Snijpunt bepalen van f1 en f2
	

4. <u>Aandachtspunten bij het formuleren van opgaven</u>

Soms is het niet altijd even duidelijk of leerlingen grafisch of algebraïsch tot een oplossing moeten komen. Hiervoor zijn dus afspraken nodig over de vraagstelling. Hieronder enkele suggesties:

Lees af: een antwoord is voldoende, een toelichting is niet noodzakelijk

Bereken (exact of tot op … decimalen nauwkeurig): het antwoord moet door berekening gevonden worden, het gebruik van de GRM is niet voldoende, kan wel als schatting of als controle

Teken de grafiek: aan de kwaliteit van de grafiek worden eisen gesteld (+ toelichting)

Schets de grafiek: kan op basis van de grafiek op de GRM, een toelichting is niet vereist

Laat de grafiek tekenen: met GRM of met gebruik van software

Los op met behulp van een grafiek op de rekenmachine: *Hierbij kan je eventueel afspraken maken in verband met het noteren van vensterinstelling*

Los algebraïsch op: berekeningen (tussenstappen) zijn vereist

Bepaal of los op: er worden geen eisen gesteld aan de manier waarop het antwoord is gevonden; er kan wel een toelichting gevraagd worden

Herschrijf: een formule omvormen om in te voeren in de GRM

V. EEN OVERZICHT VAN DE BELANGRIJKSTE HANDELINGEN MET DE TI84 EN TI-nSpire

FUNCTIES MET DE TI84

Overzicht van de belangrijkste toetsen

Wat wil je doen?	Hoe doe je dat?
Formule / Voorschrift invoeren	[Y=]
Tabel laten zien **Stapgrootte** aanpassen **Uitgebreide instellingen aanpassen v**an de tabel	[TABLE] [+] (indien dit niet werkt, kan je een nieuw besturingssysteem downloaden) [TBLSET] TblStart: startwaarde voor x ΔTbl: interval tussen 2 opeenvolgende x-waarden Auto: automatisch tonen van de waarden Ask: gewenste waarden ingeven in tabel en op enter drukken Indpnt: onafhankelijke veranderlijke Depend: afhankelijke veranderlijke
Grafiek laten tekenen **Vensterinstellingen** kiezen/aanpassen - Manueel *(bij praktische problemen)* - Standaardvensters gebruiken **Volgen van punten op een grafiek**	[GRAPH] [WINDOW] Xmin, Xmax, Xscl, Ymin, Ymax, Yscl ingeven [ZOOM] [Zstandard] geeft voor de meeste situaties een vrij duidelijk beeld. [Zfit] past de instellingen voor de y-as aan op basis van de bij window ingestelde warden voor Xmin en Xmax. [TRACE]
Het beeld zoeken bij een gegeven origineel	[TRACE] Typ de waarde in en druk op [ENTER]
Het origineel bepalen waarvan het beeld gegeven is	[Y=], het functievoorschrift y = “origineel” ingeven [GRAPH] [CALC], [5: intersect]
Snijpunten van grafieken Grafisch (benaderend) aflezen Numeriek bepalen via grafiek Vanuit tabel	 [TRACE], eventueel [ZOOM], [ZOOM BOX], … [CALC], [5: intersect] [TABLE], eventueel [+] of [TBLSET]
Extreme waarden Grafisch (benaderend) aflezen Numeriek bepalen	 [TRACE] [ZOOM] [CALC] [minimum/maximum]

Vanuit tabel	[TABLE] eventueel [TBLSET]
Nulwaarde(n)/Nulpunt(en) Grafisch (benaderend) aflezen Numeriek bepalen Vanuit tabel	 [TRACE] [ZOOM] [CALC] [zero] of door het snijpunt te bepalen met de x-as [TABLE] eventueel [TBLSET]
Bewerkingen met functies Een functie opvragen	 [VARS] [Y-VARS] 1:FUNCTION

FUNCTIES MET DE TI-nSpire

Overzicht van de werkwijze vanuit een grafiekentoepassing

Wat wil je doen?	Hoe doe je dat?
Formule / Voorschrift invoeren	Ga naar de invoerregel (Klik op >>) en typ het voorschrift in.
Tabel laten zien **Stapgrootte** aanpassen	[Menu][2: Beeld][A: Tabel weergeven] [Menu][5: Functietabel] [5: Functietabelinstellingen bewerken]
Grafiek laten tekenen **Vensterinstellingen** aanpassen - Manueel *(bij praktische problemen)* - Standaardvensters gebruiken **Volgen van punten op een grafiek**	Gebeurt automatisch na het ingeven van het voorschrift [Menu][4: Venster] [1: Vensterinstellingen] Xmin, Xmax, Xschaal, Ymin, Ymax, Yschaal ingeven [ZOOM] [5: Zoom - standard] geeft voor de meeste situaties een vrij duidelijk beeld. [A: Zoom - passend] past de instellingen voor de y-as aan op basis van de bij window ingestelde warden voor Xmin en Xmax. [5: Spoor][1: Grafisch spoor] (eventueel ook [2:Alles volgen])
Beeld of origineel zoeken als resp. origineel of beeld gegeven zijn.	[Menu][7: Punten en lijnen][2: Punt op] *Duid een willekeurig punt aan op de grafiek en bevestig.* Verander naargelang het gegeven de x- of y-waarde van het gekozen punt door hierop te klikken en druk op [ENTER]. Het andere coördinaatgetal wordt ook aangepast.
Snijpunten van grafieken	[Menu][7: Punten en lijnen][3: Snijpunt(en)] *Duid het snijpunt aan en bevestig.*
Extreme waarden **Nulwaarde(n)/Nulpunt(en)**	[Menu][6: Grafiek analyseren][1 of 2: Minimum of maximum] *Grenzen vastleggen en bevestigen.* OF [Menu] [5: Spoor] [1: Grafisch spoor] *Beweeg met de pijltjes en je krijgt alle bijzondere waarden, waaronder ook de snijpunten met de assen.*
Bewerkingen met functies	Dit kan vanuit een rekenvenster. Wanneer je op [Var] drukt krijg je alle gedefinieerde functies.

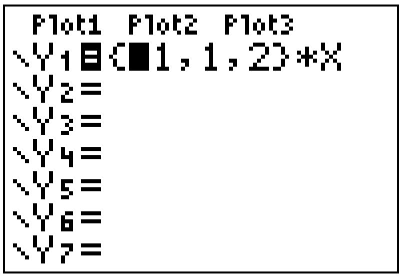
VI.	De betekenis van de parameters in het voorschrift van een functie bepalen

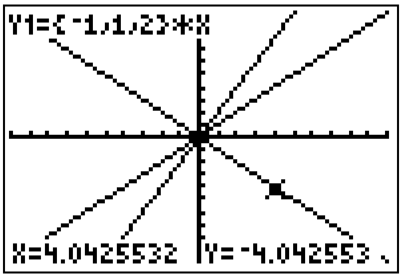
In de tweede graad worden voornamelijk eerstegraadsfuncties en kwadratische functies meer van dichtbij bekeken. Ook andere reële functies komen aan bod, zij het wel niet zo uitgebreid.

Met behulp van de TI84 (en eventuele applicaties) of TI-nSpire kan je de betekenis van de parameters duidelijk maken. Hierna gebruik ik wisselend de TI-84, TI-nSpire handheld of software. De werkwijze is wel telkens uit te breiden naar andere types voorschriften.

1. Parameters ingeven in de TI84

Door accolades te gebruiken in het voorschrift kan je een bepaalde parameter verschillende waarden laten aannemen. In dit geval kan je voor de vensterinstellingen gemakkelijk werken via ZStandard.



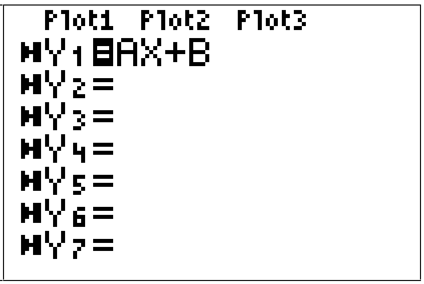


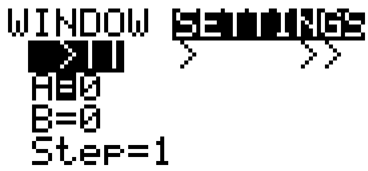
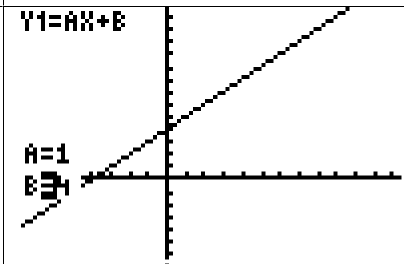
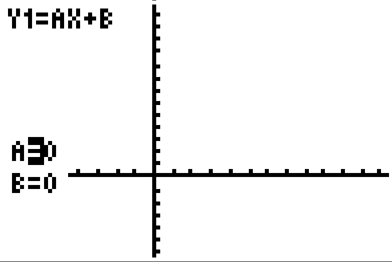
Een nadeel aan deze werkwijze is dat je na het drukken op [Trace] niet goed ziet op welke grafiek de cursor precies staat. Je ziet op alle grafieken hetzelfde staan. In 1.2 zie je hoe je met behulp van de application “Transform” meer didactisch kan werken.

2. Werken met “Transformation Graphing”

Met dit programma kan je de invloed van parameters in het voorschrift van een functie bekijken.

Open “Transform”. Normaal verschijnt een scherm met de naam van de toepassing. Als er een keuzemenu verschijnt, waarin je “Uninstall” of “Continue” moet kiezen, betekent dit dat het programma al actief is. Kies “Uninstall” als je het wil onderbreken.

- Druk op [Y=]. - Typ bij Y1 het functievoorschrift in met parameters, bijvoorbeeld Y1= AX + B - Het teken dat voor Y1 staat betekent “afspelen – pauze”. Je kan dan zelf aangeven welke parameter wanneer moet verhogen. Als dit teken anders is, kan je het veranderen door erop te staan en dan een aantal keer op [ENTER] te drukken.	

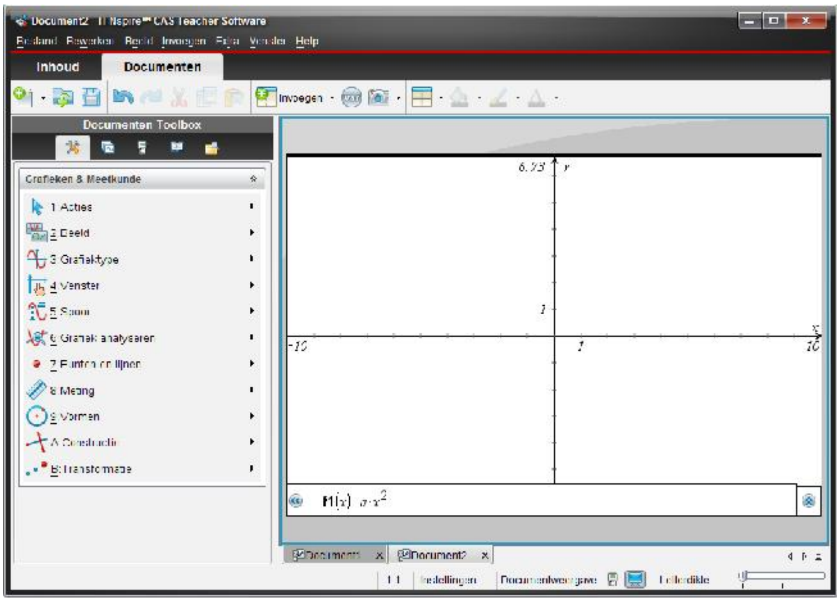
- Ga naar [WINDOW] en druk op het pijltje naar rechts. Je krijgt het venster hiernaast. Kies om te starten voor A en B best 0. Bovenaan zie je het afspeeltype: >II afspelen – pauze > afspelen >> snel afspelen Bij de 2 laatste mogelijkheden, verandert alles automatisch en kan je enkel onderbreken door op [ENTER] te drukken. Step duidt dan weer aan in welke sprongen de coëfficiënten wijzigen.	
- Druk op [GRAPH]. - Druk op het pijltje naar rechts [->] om A met 1 stap te verhogen. Iedere druk op de pijltjes naar rechts of links doet die coëfficiënt toe- of afnemen met 1 stap. - Wil je naar de andere coëfficiënt dan druk je op het pijltje naar onder en werk je verder analoog.	

Opmerking: Wanneer "Transfrm" geactiveerd is kan je geen twee grafieken in één venster bekijken en dus ook geen snijpunt bepalen. Dit merk je aan de tekens voor Y1, Y2, … (zie het venster hierboven). Deactiveer dit dus altijd wanneer je het niet meer nodig hebt.

3. <u>Een animatie maken met TI-nSpire software</u>

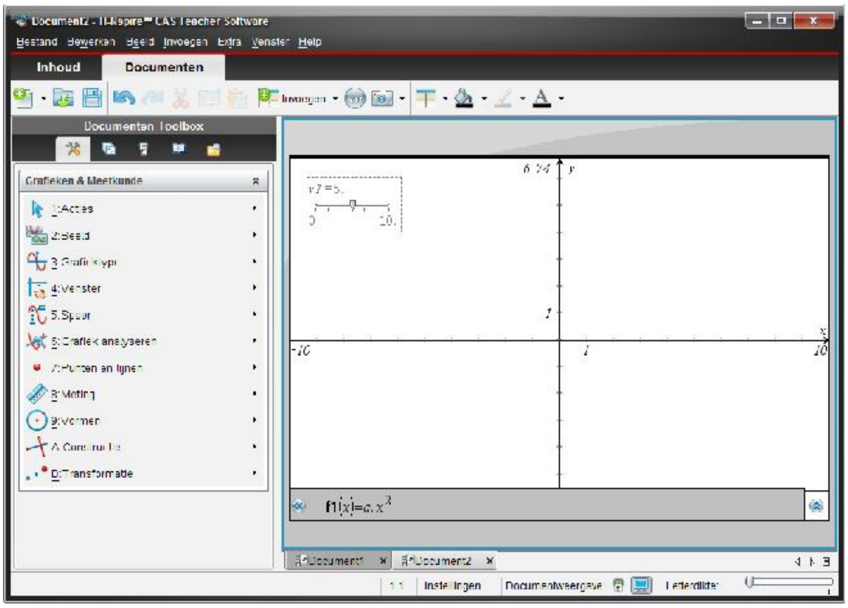
In dit deel leer je hoe je zelf een applet maakt met TI-nSpire. We maken hier gebruik van een schuifregelaar en zullen dit bestand exporteren naar een webpagina. Zo kan je dit ook gebruiken op pc's waarop TI-nSpire niet geïnstalleerd is.
We bespreken hier het voorbeeld van een tweedegraadsfunctie met een voorschrift van de vorm $y = ax^2$ en $y = a(x - \alpha)^2$.

- Start een nieuwe grafieken- en meetkundeopgave.
- Geef het functievoorschrift $f1(x)= a.x^2$ in.
  Opgepast! Zet zeker het .-teken, want anders denkt TI-nSpire dat "ax" een variabele is.

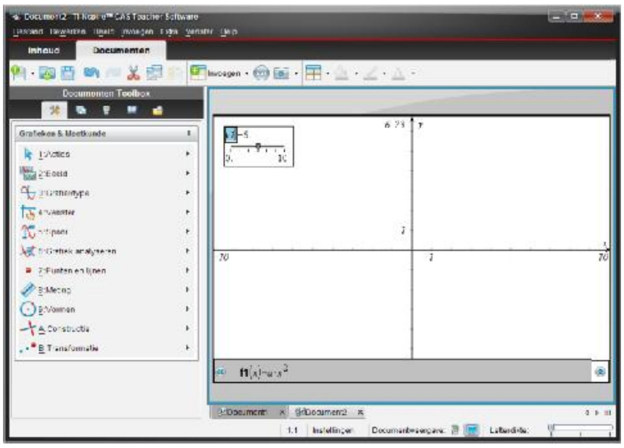


In eerste instantie gebeurt er niets.

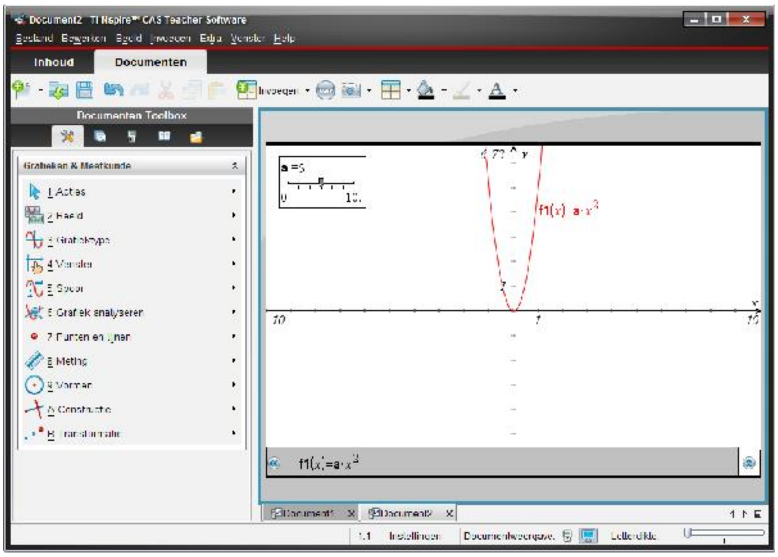
- Kies in het menu bij 1: Acties voor schuifknop invoegen. Er verschijnt een vakje met daarin een schuifknop en een zekere variabele v1.



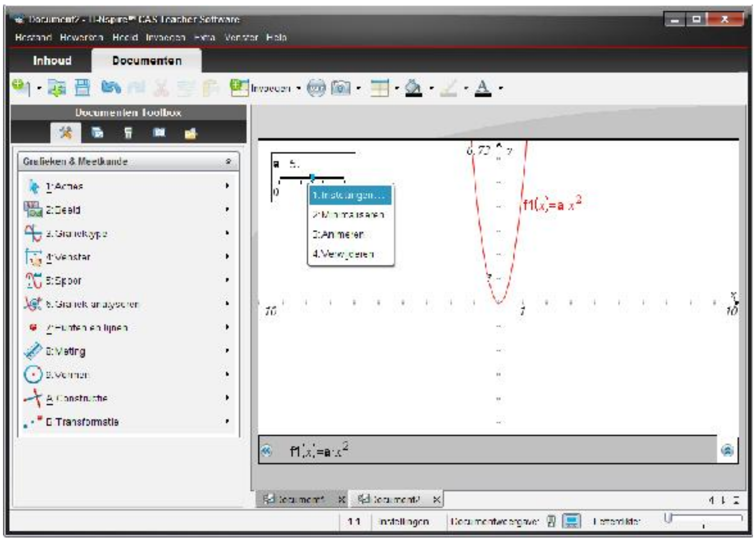
- Klik op de plaats waar je dit vakje wil hebben. De cursor gaat automatisch naar v1.



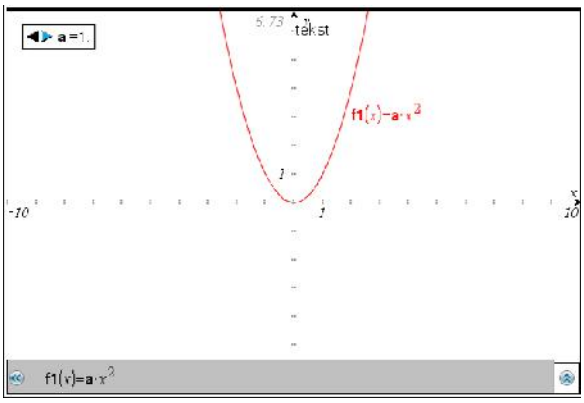
- Vervang “v1” door “a” en je zal merken dat er nu een grafiek wordt getekend.

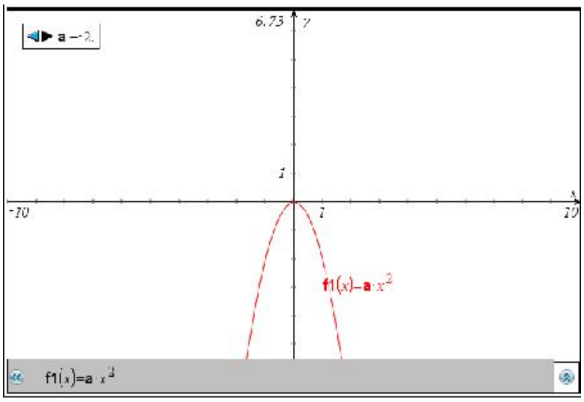


- Je kan de instellingen van deze knop nu aanpassen door rechts te klikken op dit vak.

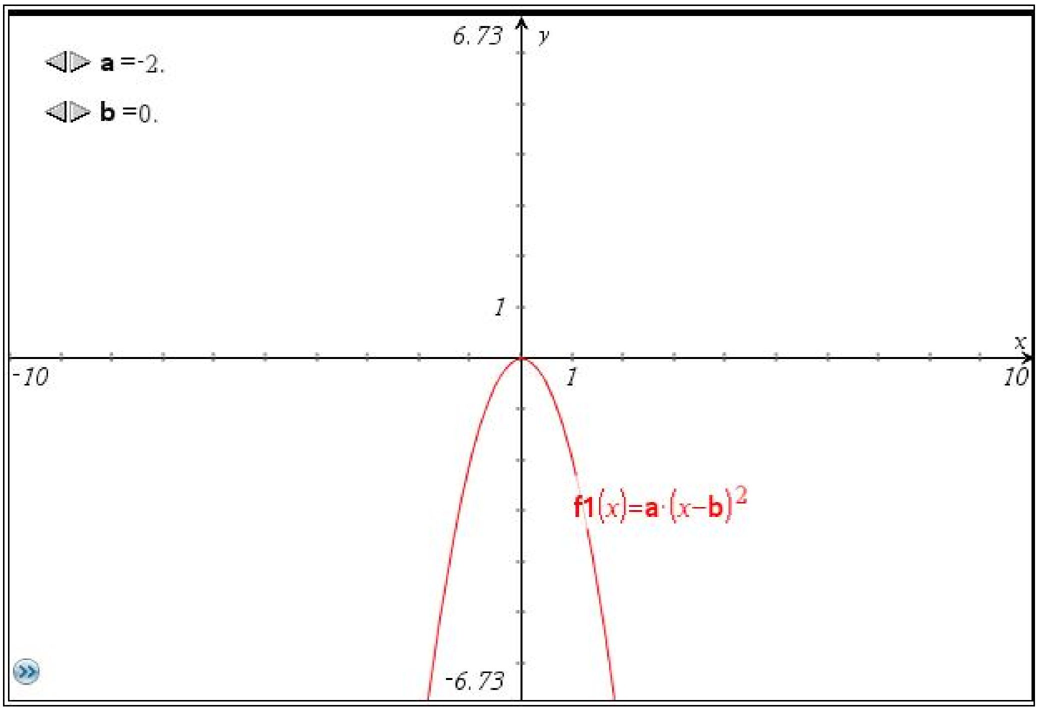


Bij “geminimaliseerd” hoef je de knop niet verslepen, maar klik je op de pijltjes. Deze optie vind ik persoonlijk erg overzichtelijk en gebruiksvriendelijk.



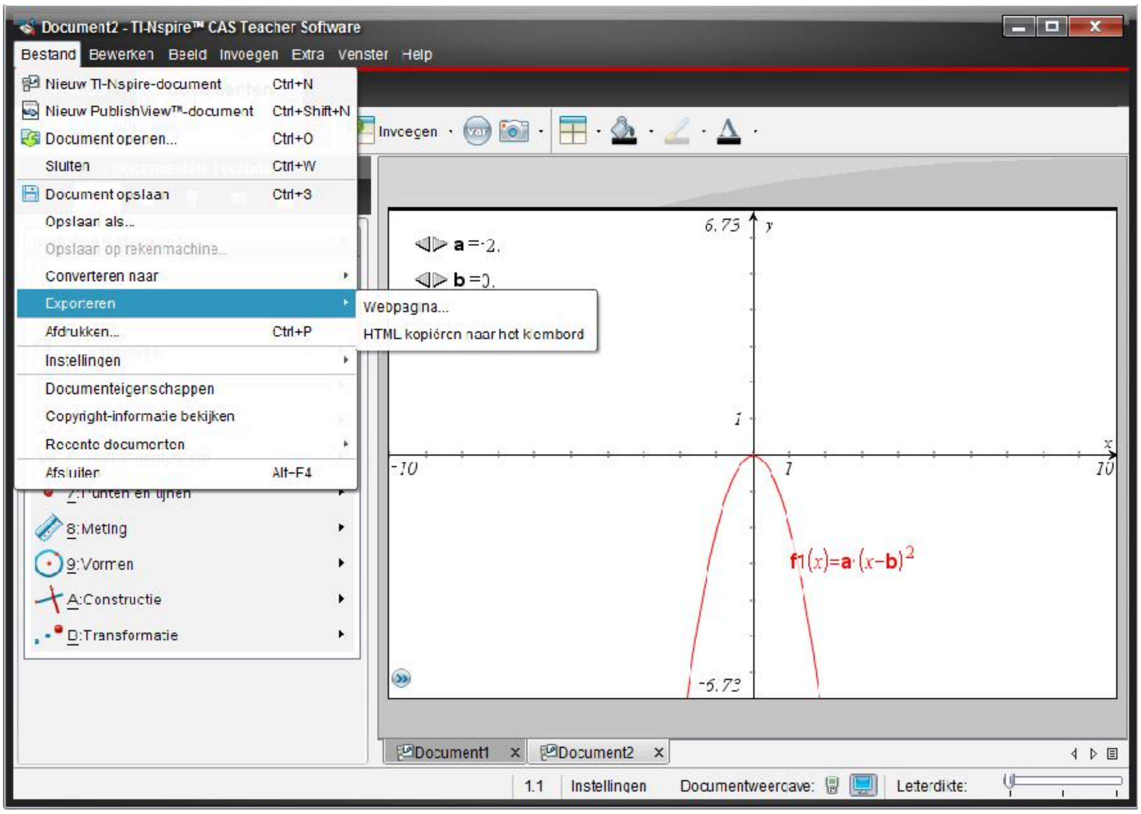


- Op dezelfde manier kan je er een tweede variabele aan toevoegen en het voorschrift bijvoorbeeld vervangen door y = a(x - b)².



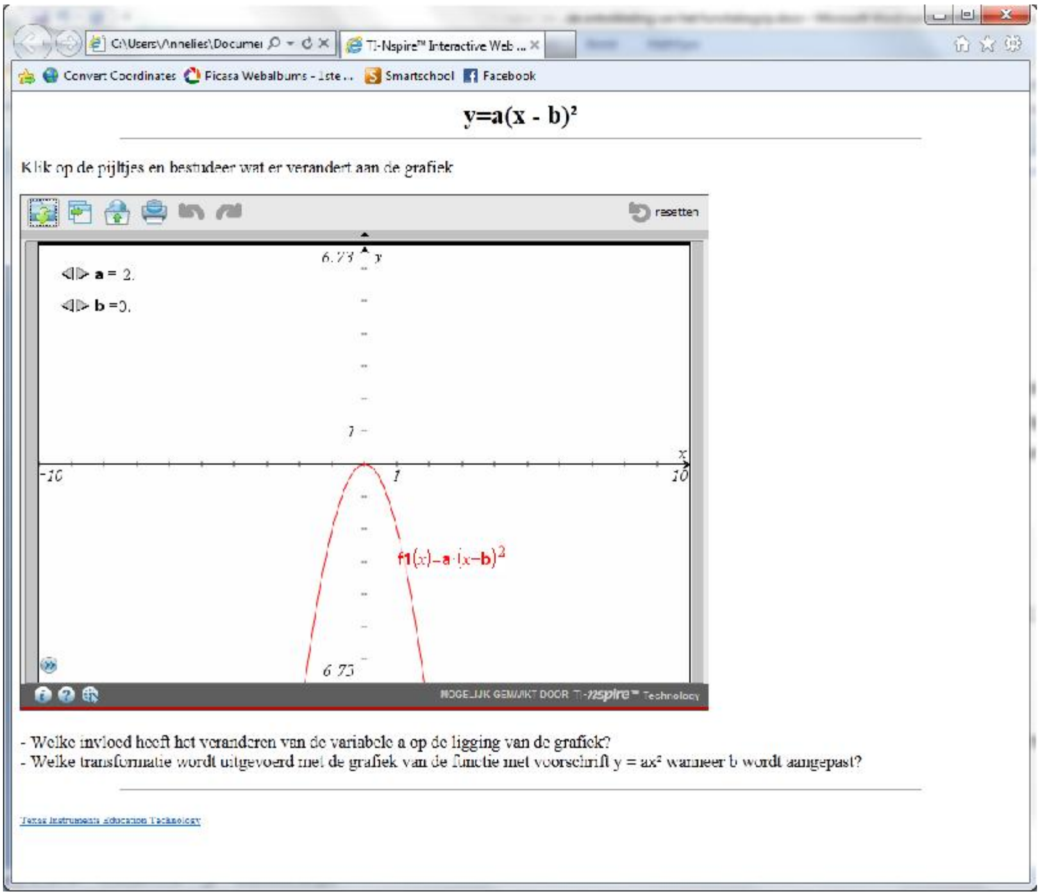
Als je dit wil exporteren naar een html-bestand (of webpagina) ga je als volgt te werk:

- Kies in de menubalk “Bestand” en kies voor “Exorteren”, “Webpagina”

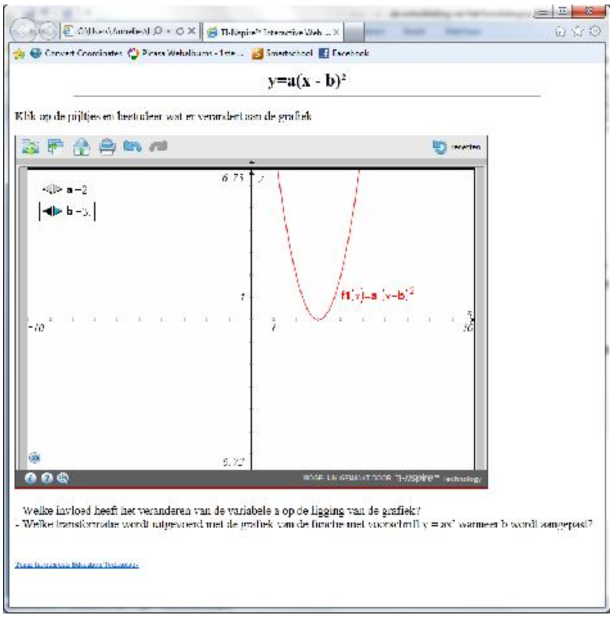


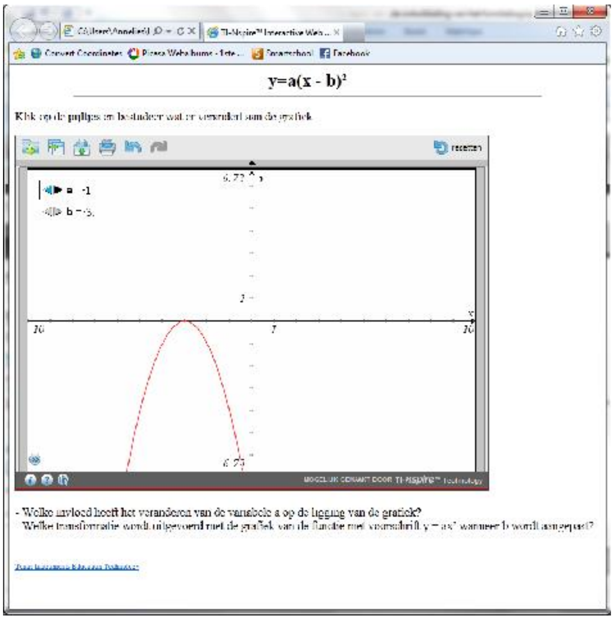
- Vul eventueel nog een titel, boven- en onderschrift in en klik op “exporteren”.

- Geef een bestandsnaam in en kies een locatie waar je dit wil opslaan. Druk op Enter
- De eerste keer kan het exporteren langer duren. Ook zal je mogelijk de vraag krijgen om “geblokkeerde inhoud” toe te staan en of je de uitgever van dit bestand vertrouwt. Bevestig dit telkens.



- Zo heb je een applet gecreëerd, waarin je a en/of b kan aanpassen.





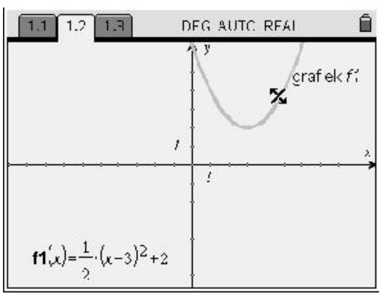
Mogelijkheden van het werken met applets:

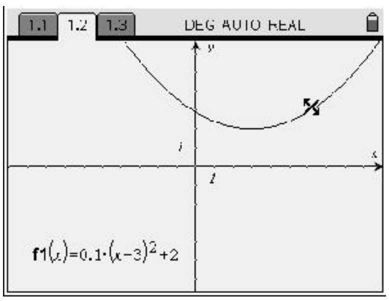
- Handig demonstratiemiddel, want dit werkt op iedere pc met een internetbrowser die up-to-date is.
- Applets kan je uploaden op een website of op de server plaatsen, zodat leerlingen dit zelf verder kunnen bestuderen. Ze hoeven daarvoor dus niet de hele tekening opnieuw te maken.

4. <u>De invloed van transformaties van een parabool op het voorschrift van de voorgestelde functie.</u>

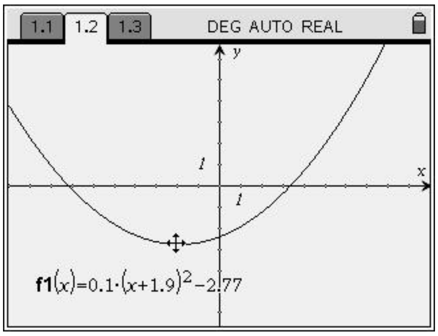
Dit onderdeel wordt hieronder uitgewerkt voor de TI-nSpire handheld. De software werkt gelijkaardig.

- Voer het voorschrift $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ in.
- Breng de cursor naar de parabool (niet naar de top). Er verschijnt een dubbel pijltje (zie afbeelding hieronder) bij de grafiek.
- Klik en beweeg de parabool met de touchpad of pijltjes.
- Je kan zien welke parameter verandert als de parabool “uitrekt” of “versmalt”.





- Ga met de cursor naar de top van de parabool. Nu zie je een kruisje met pijltjes zoals op de afbeelding hieronder.
- Klik om te bevestigen en beweeg de parabool.



- De parabool kan meestal zowel horizontaal als verticaal bewegen.
- Je kan opnieuw conclusies trekken over de invloed van een verschuiving op de parameters van de parabool.

VII. Regressie

Hoewel regressie misschien niet onmiddellijk noodzakelijk is voor het verloop van de lessen wiskunde in de tweede graad, kan het toch handig zijn om hier iets rond te doen.
Hieronder kunnen jullie aan de hand van twee totaal andere voorbeelden merken waarom dit didactisch toch voordelen heeft.

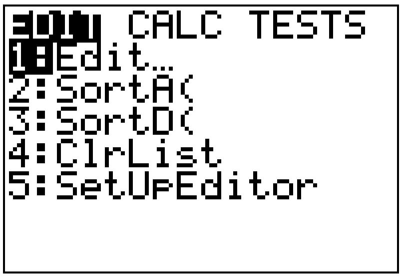
1. Een functievoorschrift opstellen bij een lineair verband waarvan twee coördinaten gegeven zijn.

1.1 Met de TI84

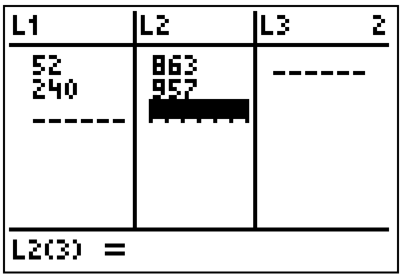
Opgave
In de Alpen was er een kabellift gemaakt om twee dorpen te verbinden. Als je (vanuit het dal) 52 m langs de kabel had afgelegd bereikte je al een hoogte van 863 m. Na 240 m langs de kabel zit je op een hoogte van 957 m. Tussen de hoogte en de lengte van de kabel bestaat een lineair verband. Geef een voorschrift waarbij de hoogte uitgedrukt wordt in functie van de afstand langs de kabel.

Oplossing

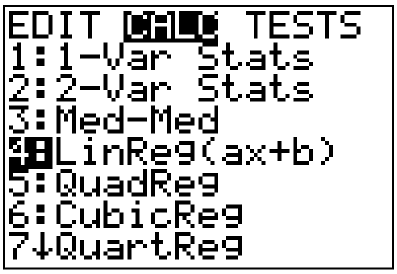
- Druk op [STAT], en kies “1: Edit”.



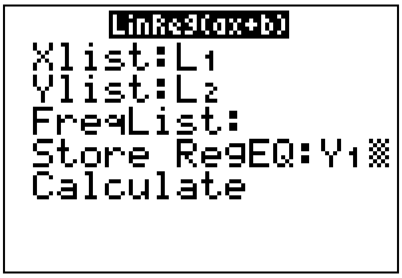
- Geef in L1 de x-waarden in en in L2 de bijhorende y-waarden.



- Druk op [STAT], [->] en kies 4: LinReg(ax+b) (*of indien gewenst een ander type regressie).*

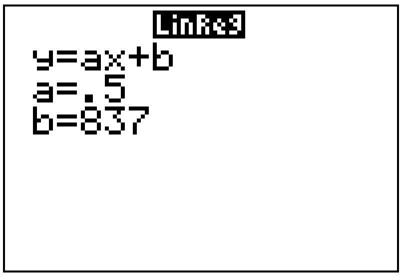


- Vul het onderstaande venster in en druk op “Calculate”

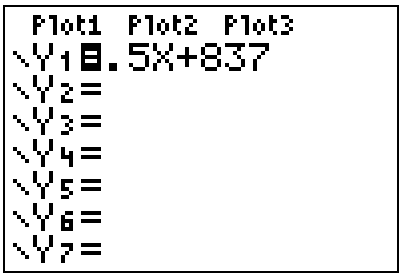


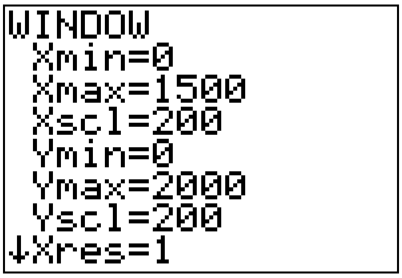
Store RegEQ hoeft niet ingevuld te worden, maar wanneer je hier Y1 ingeeft ([VARS], [-> YVARS], wordt het voorschrift onmiddellijk opgeslagen.

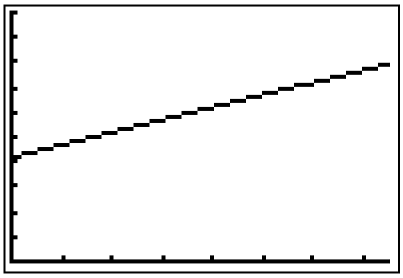
- Je krijgt de vergelijking in het volgende venster.



- Wanneer je nu op [y=] drukt zal je (wanneer je “Store RegEQ” hebt ingevuld) merken dat het voorschrift ingevuld is.
- Je kan nu de vensterinstellingen aanpassen via [WINDOW] en vervolgens de grafiek tekenen ([GRAPH]). Eventueel kunnen nu ook nog deelvragen opgelost worden.







1.2 Met de TI-nSpire

Opgave:

Twee mama’s laten beide een kaars branden om hun kinderen te steunen bij het examen wiskunde. Van de kaars voor Bert is na 4 uur branden nog 24 cm over en na 5 uur nog 22 cm. De kaars voor Karen is 24 cm lang en na 6 uur is er nog 18 cm van over.

a) Wanneer zijn beide kaarsen even lang? Hoe lang?
b) Wanneer zijn de beide kaarsen nog 1 cm hoog?

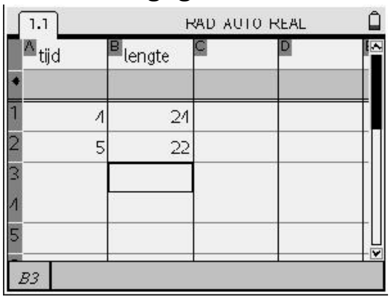
Wanneer we de lengte in functie van de tijd bekijken, hebben we voor beide functies 2 punten gegeven:

Bert: A(4, 24) en B(5, 22)

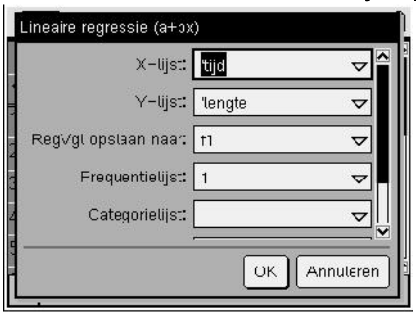
Karen: C(0, 24) en D(6,18)

We zoeken eerst het functievoorschrift van beide:

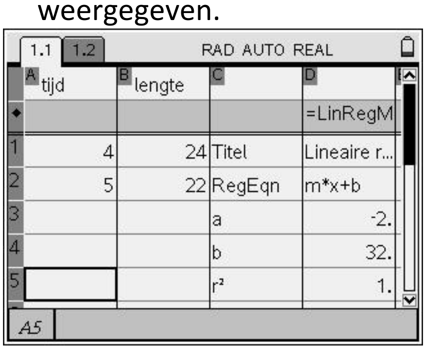
- Druk op , open een Lijsten en spreadsheettoepassing.
- Geef in de bovenste cel de naam van de variabele in (A1: tijd, B1: lengte).
- Voer de gegeven waarden van Bert in.



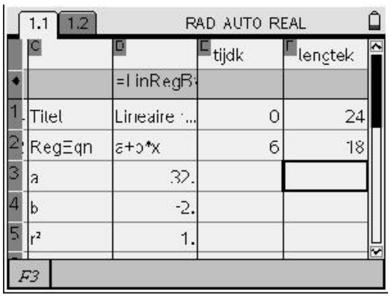
- Druk op menu, 4: Statistieken, 1: statistiekberekeningen, 3: lineaire regressie (mx +b) en vul het venster in dat verschijnt (zie onder). Druk daarna op OK.

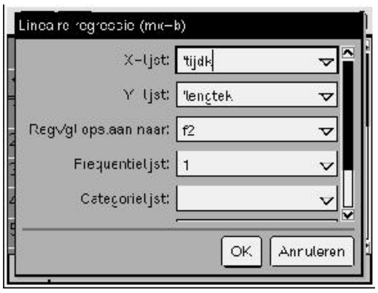


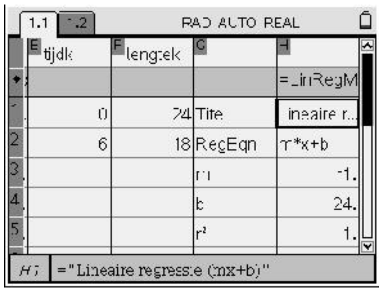
- De vergelijking van de rechte is nu opgeslagen in f1 en de waarden voor m en b worden weergegeven.



- Wanneer we de punten wijzigen, verandert ook dit voorschrift. Daarom zijn we genoodzaakt om voor de kaars voor Karen andere kolommen aan te maken. We werken op dezelfde manier als hierboven.

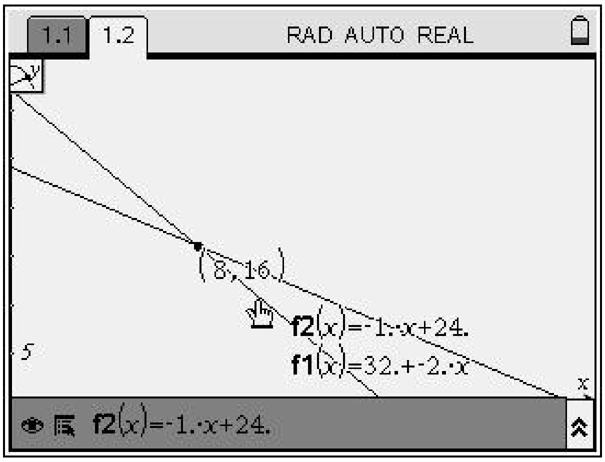


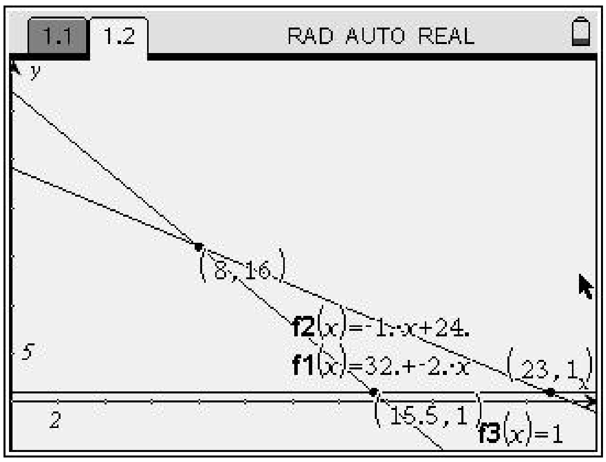




- Druk op (home) en kies 2: Grafieken en Meetkunde-toepassing.
- Pas de vensterinstellingen aan in functie van de opgave.

- Zorg ervoor dat de grafieken zichtbaar zijn. Ga hiervoor via e naar het invoervenster. Druk op het pijltje omhoog of omlaag tot je f1 of f2 ziet. Druk op e tot je op het oogje staat en de lijnen zullen zichtbaar worden.
- Zoek het snijpunt van de beide grafieken om te bepalen wanneer ze even lang zijn: b, 6: Punten en lijnen, 3: Snijpunt(en) en duid vervolgens de 2 rechten aan. We vinden zo het antwoord op vraag a.
- Om het antwoord op vraag b te vinden voeren we een 3de functievoorschrift in f3(x) = 1 en bepalen we de snijpunten van deze rechte met f1 en met f2.





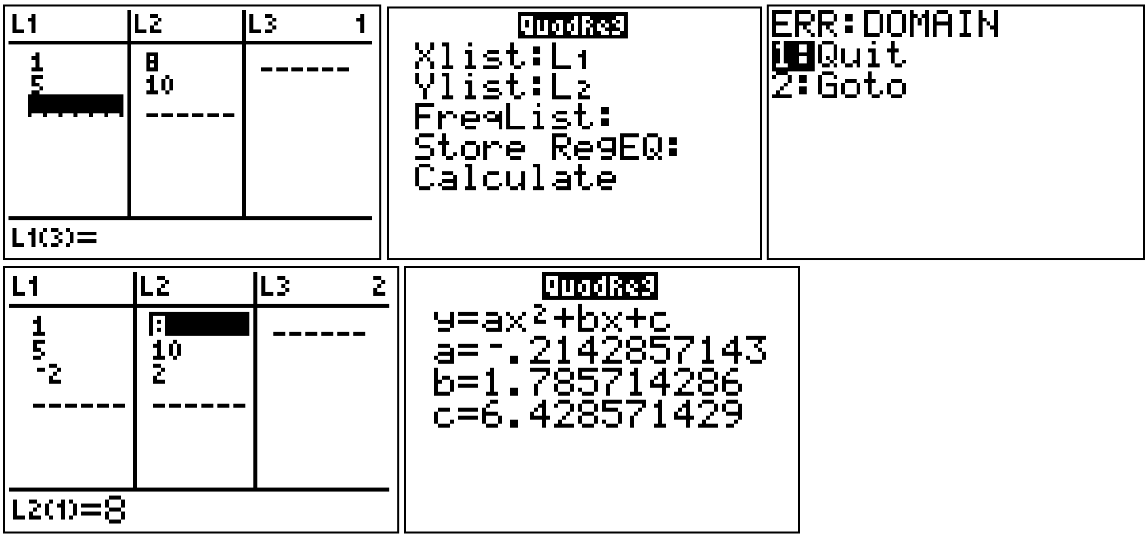
Antwoorden:

a) Na 8 uur zijn beide kaarsen 16 cm hoog.
b) Na 15,5 uur is de kaars van Bert 1 cm hoog en die van Karen is na 23 uur 1 cm hoog.

2. Aantonen dat een tweedegraadsfunctie éénduidig bepaald is aan de hand van drie punten.

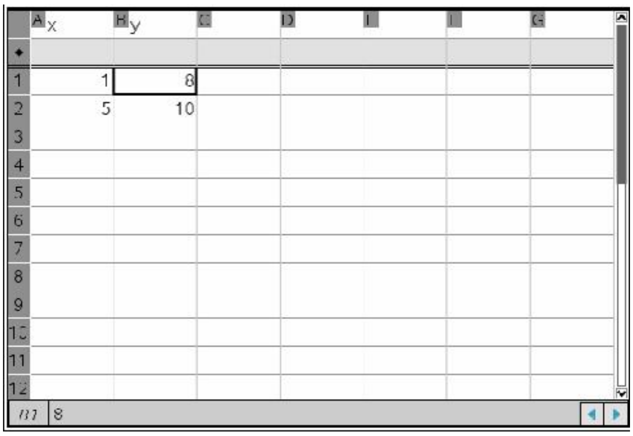
2.1 Met de TI84

Wanneer we op dezelfde manier als hierboven te werk gaan en de coördinaten van 2 punten ingeven via [STAT], 1: Edit, kan je zien dat je geen kwadratische regressie kan uitvoeren met twee punten, maar er drie nodig hebt om het voorschrift van een kwadratische functie eenduidig te bepalen.

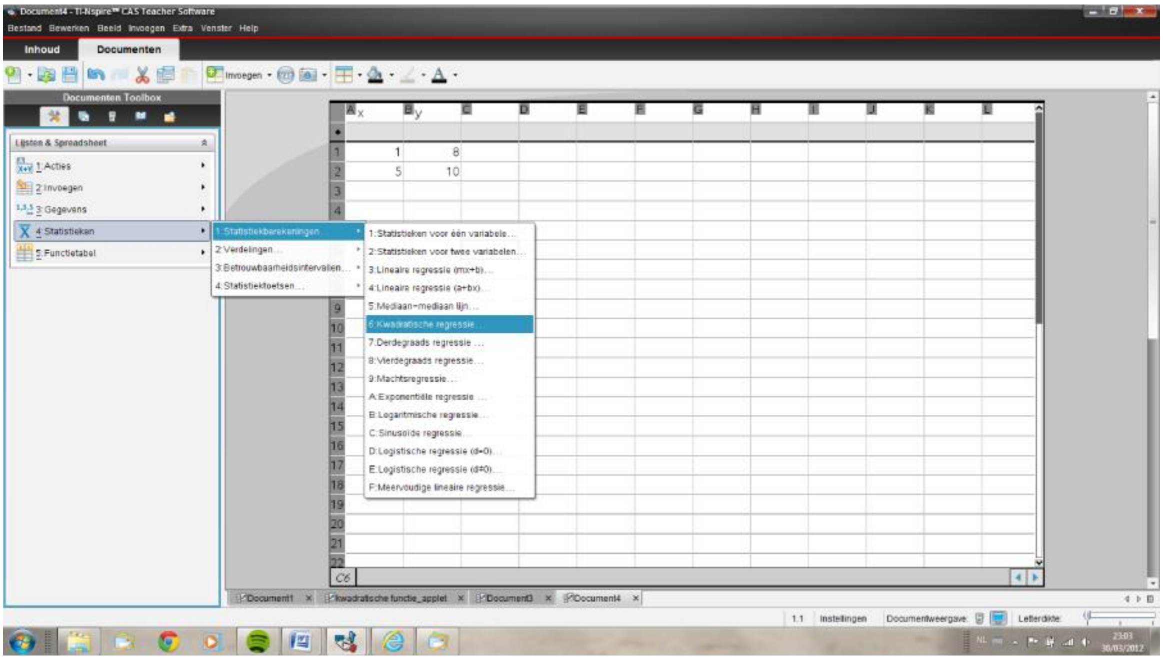


2.2 Met TI-nSpire software

- Voeg een lijsten- en spreadsheetpagina toe.



- Geef hier twee coördinaten in.
- Kies in het menu voor 4: Statistieken, 1: Statistiekberekeningen, 6: Kwadratische regressie.



- Vul het dialoogvenster dat verschijnt aan en druk op Enter:

- Je zal merken dat er een foutmelding verschijnt.

- We geven dus nog een extra coördinaat in in de lijst en doen net hetzelfde als hierboven.

	A x	B y	C	D	E	F	G
◆				=QuadReg			
1	1	8	Titel	Kwadrati…			
2	5	10	RegEqn	a*x^2+b*…			
3	-2	2	a	-0.214286			
4			b	1.78571			
5			c	6.42857			
6			R^2	1.			
7			Resid	{-2.7E-13…			
8							
9							
10							
11							
12							

D1 ="Kwadratische regressie"

- Ditmaal lukt het wel en we zien aan $R^2=1$ dat het gegeven voorschrift perfect juist is.

  Op deze manier konden we dus ontdekken dat 2 coördinaten te weinig zijn om een parabool te bepalen en dat drie coördinaten een parabool wel eenduidig vastleggen.
  Hier kan aansluiteind de link gelegd worden met drie parameters a, b en c in een voorschrift van een tweedegraadsfunctie. Om drie onbekenden te bepalen hebben we drie voorwaarden, of met andere woorden drie vergelijkingen nodig. Deze kunnen we dan ondermeer bepalen door een stelsel op te lossen.

Deel 2

Didactische hulpmiddelen

VIII. Hulpmiddelen voor de TI84

1. De link met de pc: TI-Connect

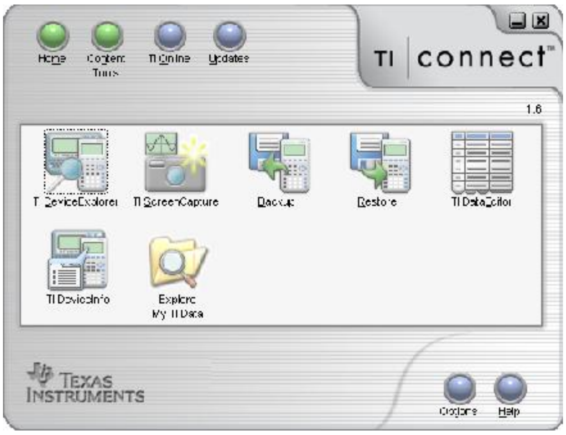
1.1 De installatie

- Ga naar http://education.ti.com en kies in het menu “downloads & activities” voor “Apps, software en updates”. Kies dan de technologie (TI84) en kies voor “connectivity software”.
- Volg nu de stappen op het scherm.

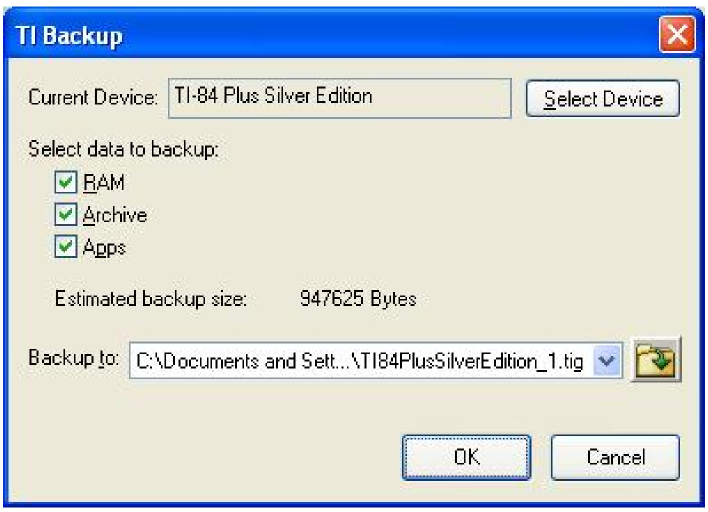
LET op: De USB-kabel mag nog **niet** aan de pc hangen.

1.2 Een back-up maken

- Stop de kabel in de pc en in de GRM.
- Open TI Connect.

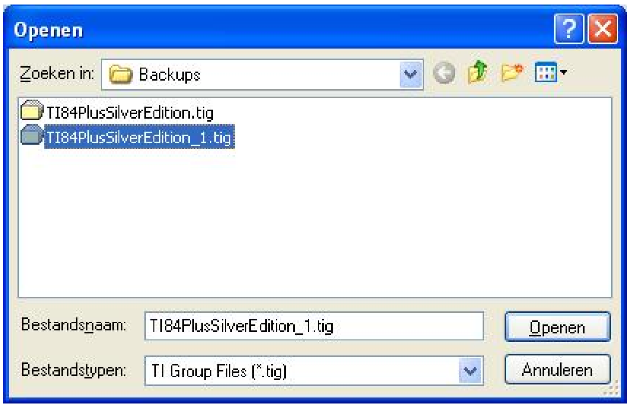


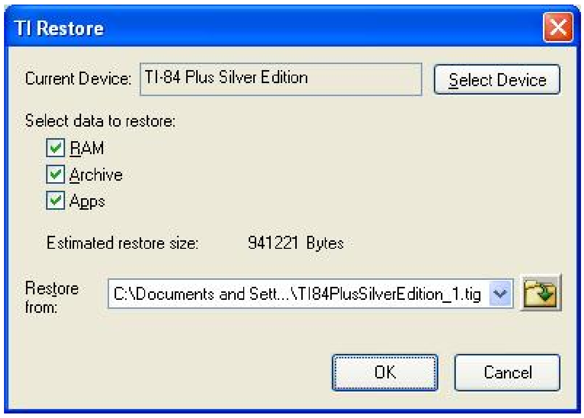
- Klik in het bovenstaande venster op Backup. Het programma zoekt naar de GRM en je krijgt een keuzemenu. Zo kan je kiezen wat er moet opgeslaan worden. Laat best alles aangevinkt. Wel kan je onderaan op het mapje drukken om de gegevens in een map naar keuze te zetten. Druk op OK en de rest gebeurt vanzelf.



1.3 Alle gegevens weer op het rekentoestel zetten

- Kies in het startvenster voor “Restore”.
- Er opent een venster waarin je de back-up kan kiezen die naar de GRM moet gebracht worden. Druk op openen en duid alweer aan wat er precies moet hersteld worden .





- RAM: het werkgeheugen (programma’s, constanten, lijsten, enzovoort)
- Archive: alle programma’s die in het archief zitten (aangeduid door een sterretje)
- Apps: alle toepassingen, te vinden onder de “APPS”-knop

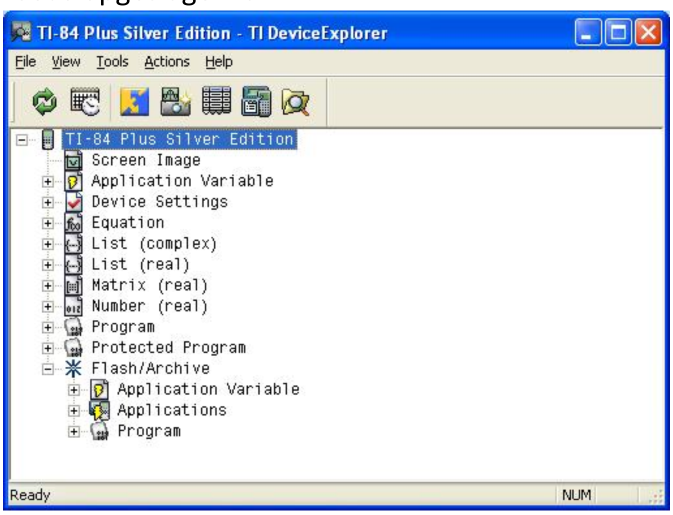
- Druk tenslotte op OK. De rest gebeurt vanzelf.

1.4 Bestanden van pc naar rekentoestel brengen en omgekeerd

Via de website van Texas Instruments (zie hierboven) kan je allerlei toepassingen downloaden. Ook op andere sites kan je programma’s vinden. Verder is het natuurlijk altijd mogelijk om met collega’s of leerlingen bestanden uit te wisselen.

1.5 Bestanden kopiëren

- Klik in het startscherm van TI Connect op TIDeviceExplorer. Je krijgt nu de structuur van jouw rekentoestel te zien. Door op + te klikken voor één van de items krijg je de lijst van alles dat reeds opgeslagen is.



- Open nu de map op jouw pc waarin de bestanden staan die op het rekentoestel moeten komen of omgekeerd bestanden die op de pc moeten komen.
- Selecteer een bestand en versleep het van het rekentoestel naar de pc of omgekeerd.

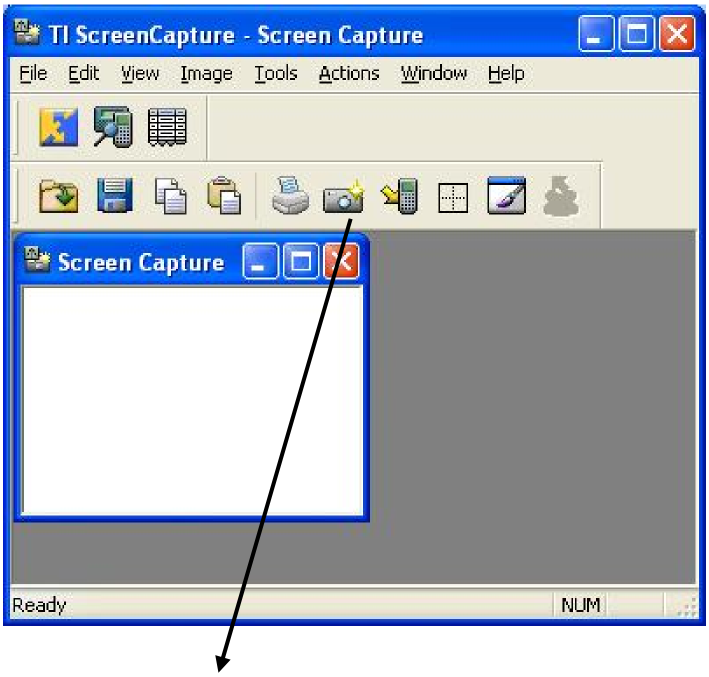
1.6 Bestanden verwijderen

Ook via de computer kunnen bestanden gewist worden.

- Open daarvoor eveneens TIDeviceExplorer.
- Duid het bestand aan en druk op delete.

1.7 Schermafdrukken maken

- Druk op TIScreenCapture in het basisscherm en zorg zoals altijd dat jouw GRM aan staat.



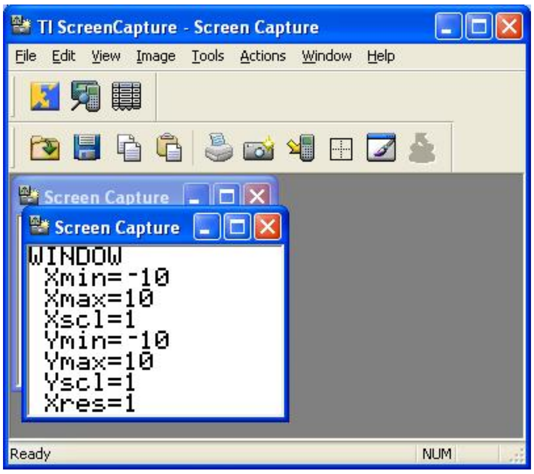
- Klik op het fototoestel om jouw scherm te “fotograferen”.
- Het scherm verschijnt.
- Verder kan je dan handig gebruik maken van de knoppen bovenaan.

Open	Afbeeldingen	Schermafdruk kopiëren	Plakken	Afdrukken	Nieuwe “foto” maken	Tekening naar GRM sturen	Kader rond afdruk zetten	Foto bewerken

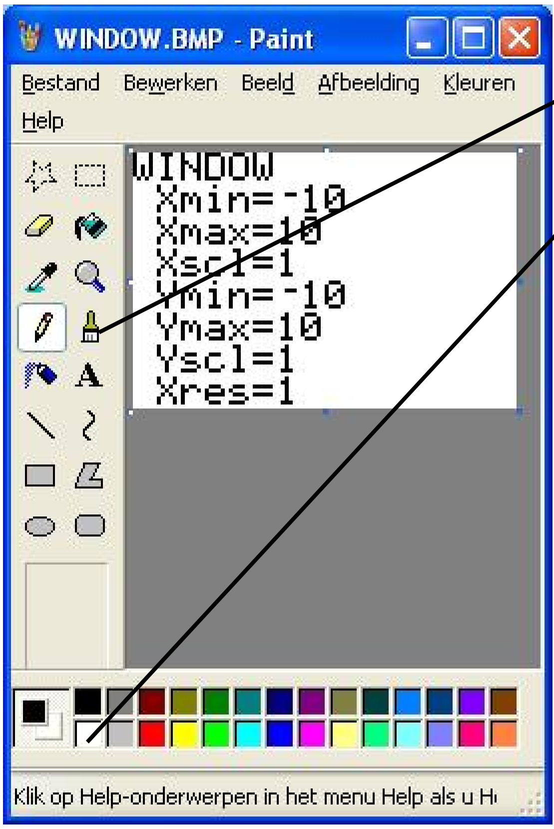
1.8 Handige toepassing

Als je wil controleren of leerlingen wel degelijk hun Windowinstellingen aangepast hebben, kan je een leeg venster invoegen in jouw toets of examen. Zij moeten dan aanvullen wat ze intypen.

- Druk op [WINDOW] op het rekentoestel.
- Druk op het fototoestel in TIScreenCapture.

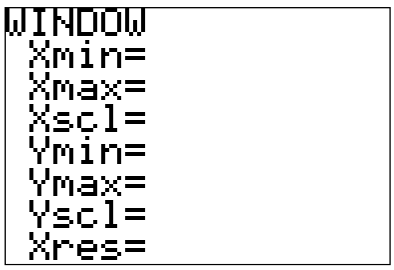


- Druk op .
- Eerst moet je de afbeelding opslaan. Geef dus een naam in, bv. “window” en bevestig.
- Het venster opent nu in Paint.



- Selecteer de kwast of duid de rechthoek aan.
- Kies als kleur wit.
- Verwijder nu de getallen na “=” door een gevulde rechthoek te tekenen of door met de kwast heen en weer te bewegen.

Resultaat:

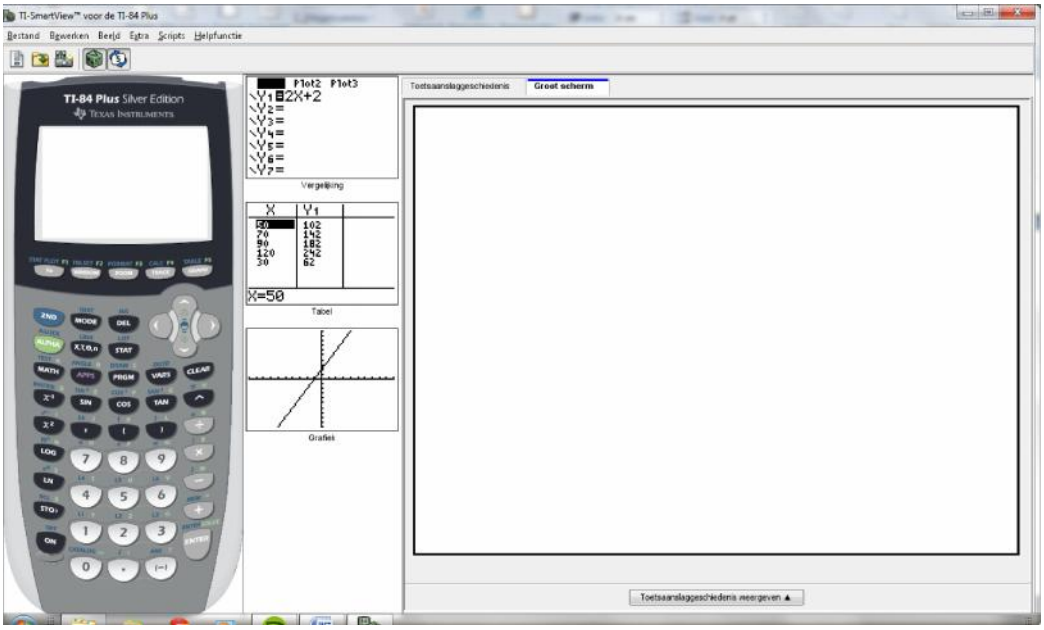


2. TI Smartview voor de TI84

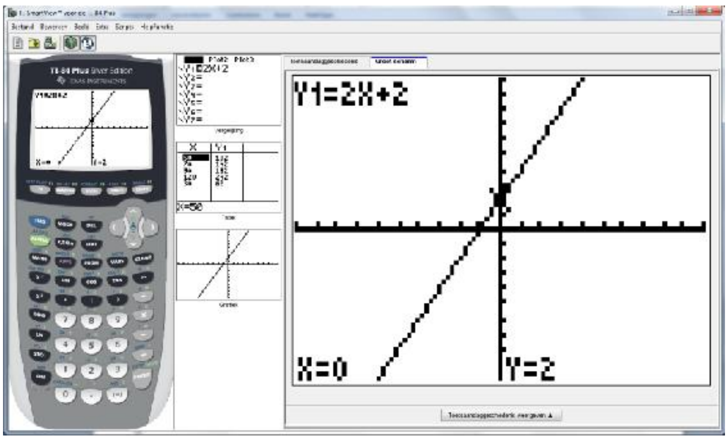
Met deze software kan je op een pc met beamer (of digitaal bord) op het rekentoestel werken. Bovendien kan je ook de toetsgeschiedenis laten zien en het scherm extra groot weergeven. Ook schermafdrukken maken is hiermee erg eenvoudig. Daardoor hoef je het rekentoestel niet steeds aan jouw pc te koppelen als je documenten voor de leerlingen wil maken. Een andere mogelijkheid is het maken van scripts. Met dit laatste kan je filmpjes maken met instructies. Dit kan handig zijn om leerlingen een geheugensteuntje te bieden wanneer ze zelfstandig aan het werk moeten nadat jij de werkwijze hebt uitgelegd.

2.1 Basisscherm

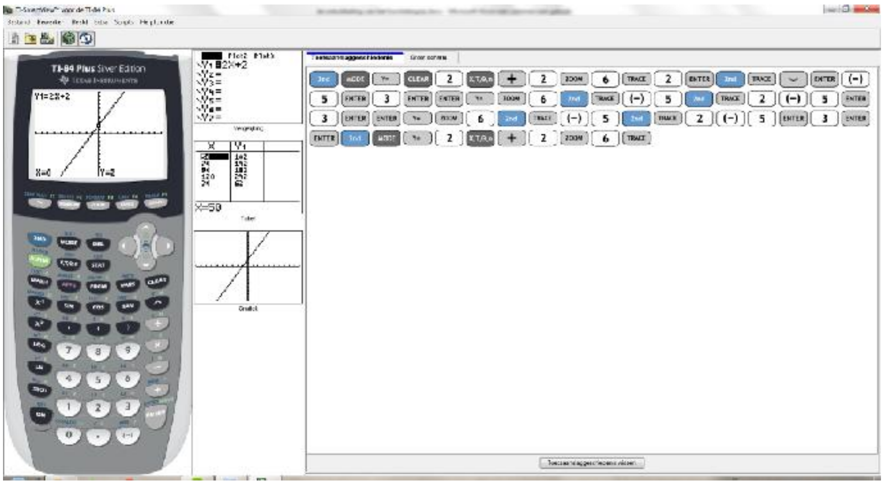
Wanneer je TI-Smartview opent, zie je onderstaand venster. Merk op dat je de drie belangrijkste voorstellingswijzen van functies onmiddellijk onder elkaar ziet (voorschrift, tabel, grafiek). Dit noemt met View³.



In het rechtervenster kan je handig omwisselen van "groot scherm" (= venster van het rekentoestel groot afgebeeld) of "toetsaanslaggeschiedenis" (overzicht van knoppen)



Groot scherm



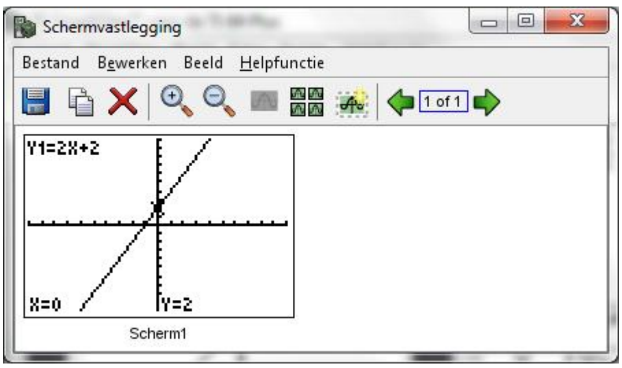
Toetsaanslaggeschiedenis
Door op de knop "toetsaanslaggeschiedenis wissen" te drukken verwijder je de toetsgeschiedenis.

Onder de menubalk staat de belangrijkste knoppen:

Nieuw script openen	Script openen	Screenshot nemen	View³ weergeven/verbergen	Toetsgeschiedenis weergeven/verbergen

2.2 <u>Screenshots nemen</u>

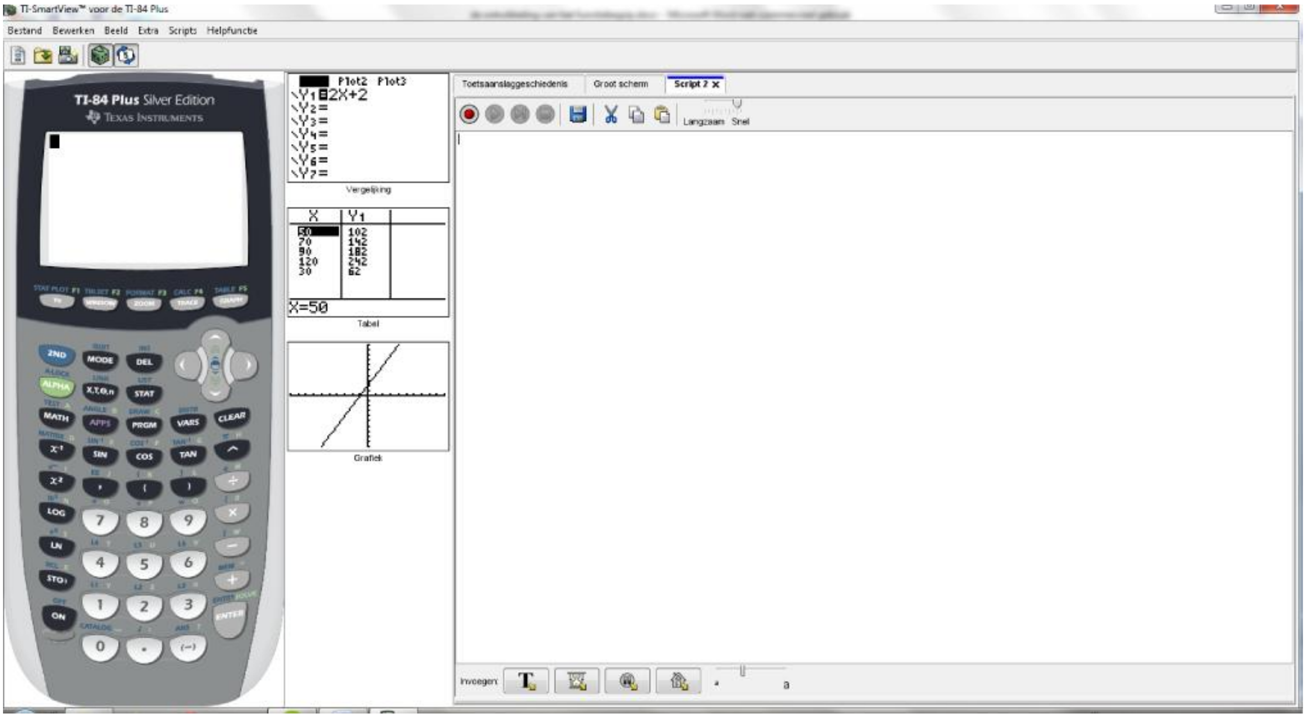
Werk met het rekentoestel zoals je gewoon bent en druk op . Het venster van de TI84 wordt "gefotografeerd" en verschijnt in een nieuw venster:



Hier kan je alle gekopieerde vensters bekijken en er eventueel ook de rand van wegnemen. Je kan deze dan gewoon kopiëren en plakken in een ander bestand, zoals bijvoorbeeld Word.

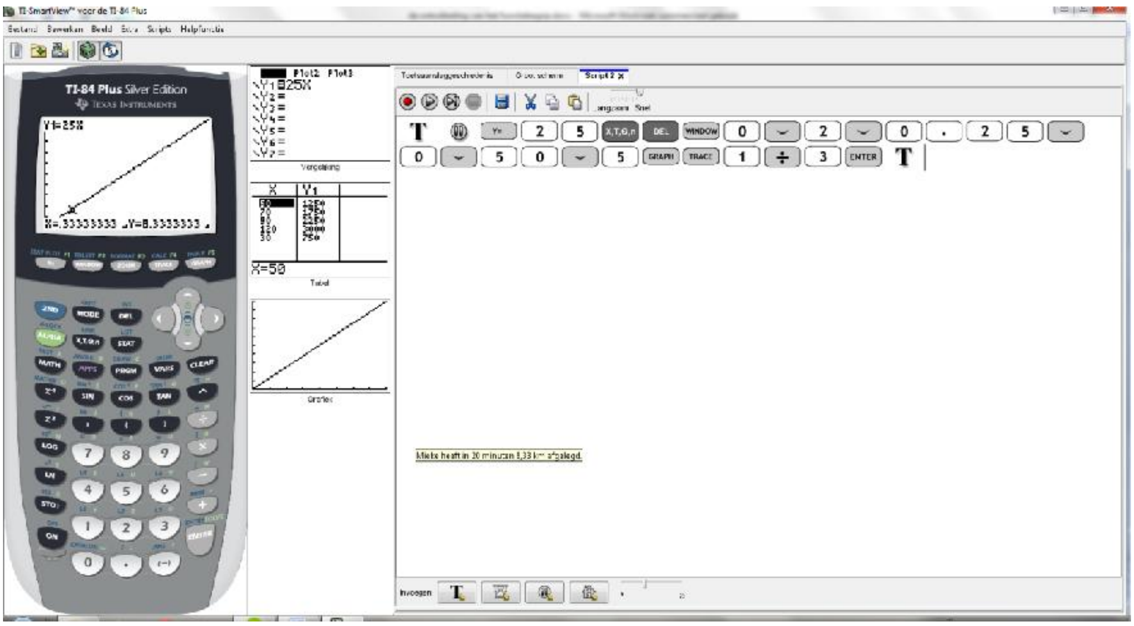
2.3 Werken met scripts

Open een nieuw script door te klikken op . Het venster ziet er dan als volgt uit:

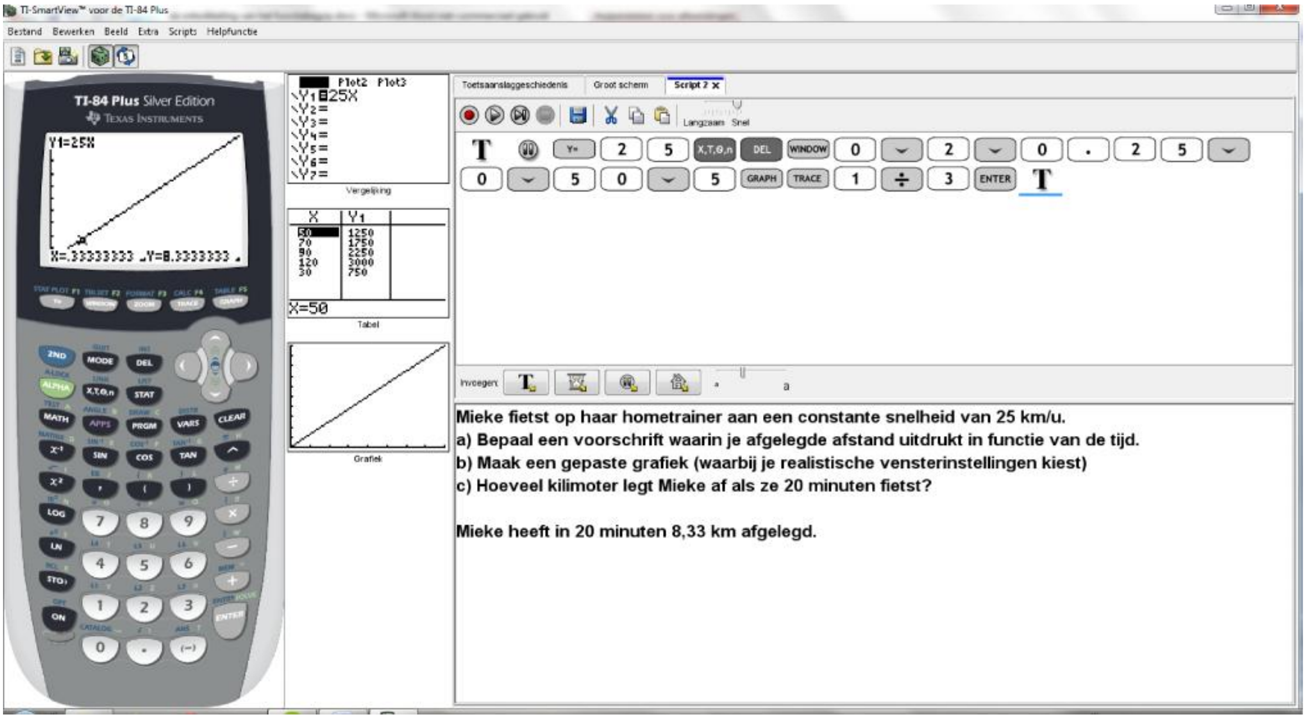


Door bovenaan op de recordknop te drukken start je een opname. In het voorbeeld hieronder maak ik een opname om te tonen hoe je een eenvoudig vraagstuk oplost.

- Je kan bijvoorbeeld eerst een tekstpunt invoegen waarin je de opgave van het vraagstuk typt. Deze knop staat onder het schriptvenster.
- Nadien indien gewenst een pauze, om dan te starten met de eigenlijke opname. Hiervoor druk je op de "record"-knop .
- Voer alle bewerkingen uit die je wil opnemen en druk op "stop".



- Je kan het script nu laten lopen door op “play” te drukken.

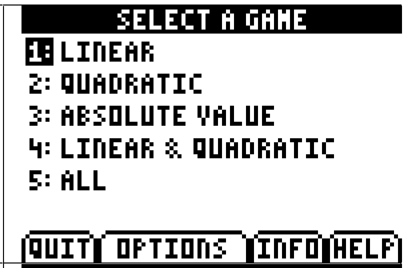
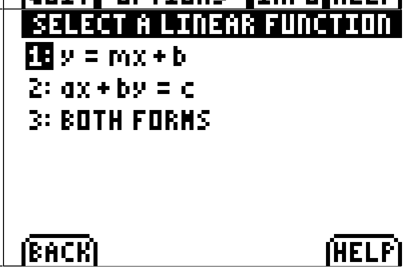


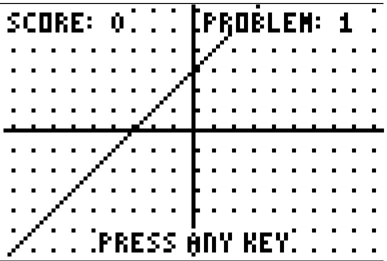
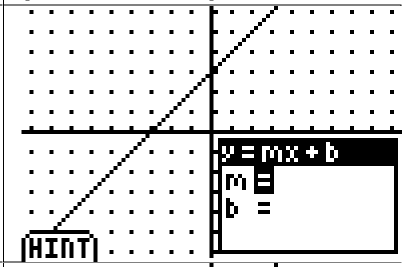
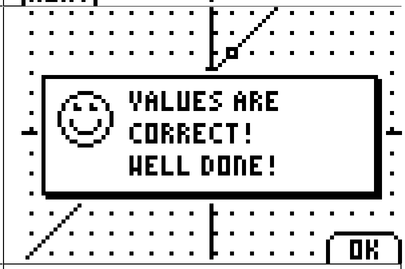
3. Interessante applications (APPS)

3.1 Guess my coëfficients

Met deze toepassing kunnen leerlingen oefenen op het opstellen van functievoorschriften. De soorten functies die aan bod komen zijn:

- lineaire functies
- kwadratische functies
- absolute waarde

- Kies het soort functie waarop je wil oefenen door het overeenkomstig cijfer in te typen, vb. druk op 1. - Als je op [F2], tevens [WINDOW] drukt kan je de instellingen aanpassen, vb. afvinken dat men telkens 10 oefeningen moet maken.	
- In het volgend venster kan je kiezen in welke vorm het voorschrift moet ingegeven worden, vb. druk op 1.	

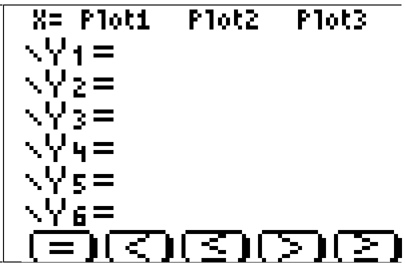
- Je ziet nu de grafiek van de eerstegraadsfuntie. - Als je op een willekeurige toets drukt, verdwijnt de tekst, zodat je alles goed kan zien. - Druk nu nogmaals op een toets.	
- Je kan nu een waarde ingeven voor m en b. Druk nadien op [ENTER]. - Als je het antwoord niet ziet, kan je een hint vragen door op [F1] ([Y=]) te drukken.	
- Je merkt dat de grafiek van de rechte die je hebt ingegeven getekend wordt en dat je te weten komt of je correct was. - Bij een fout antwoord krijg je een 2^{de} poging, tenzij het anders bij de instellingen stond (zie boven)	
- Druk nu op [F5]. Je krijgt een nieuwe opgave.	

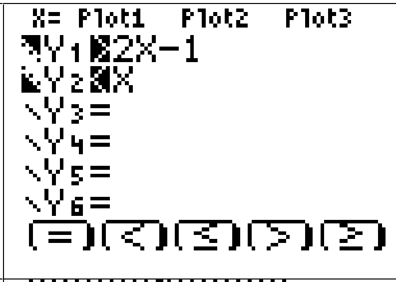
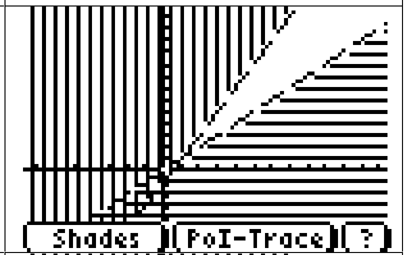
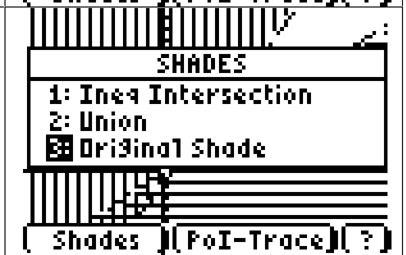
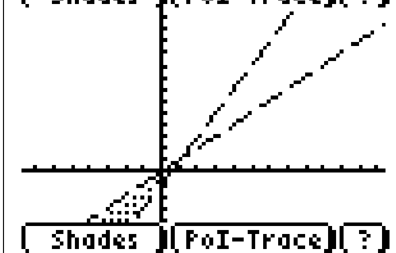
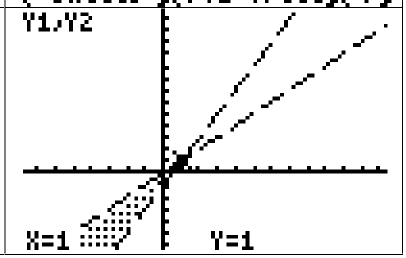
Opmerking: Je kan dit “spel” vroegtijdig verlaten door de toetsen [2nd] [QUIT]. Volg daarna de instructies op het scherm.

3.2 Inequality graphing

Met deze toepassing kan je grafisch ongelijkheden voorstellen.

Als je in het menu [APPS] “Inequalz” kiest, is het mogelijk dat hij de keuze geeft tussen “Continue”, “Quit Inequalz” en “About”. Dit betekent dat deze toepassing reeds actief was. Je kan dit ook herkennen aan het venster dat je krijgt bij [Y=]. Staan er in dat venster onderaan ongelijkheidstekens, dan is Inequalz actief. Je kan dit uitschakelen door op “2: Quit Inequalz” te drukken. In het andere geval druk je op “1: Continue”.

- Druk op [Y=] en merk het verschil op met het gewone basisscherm.	

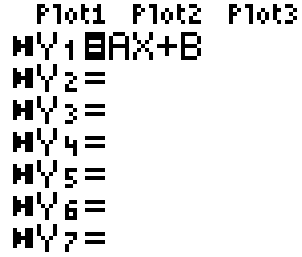
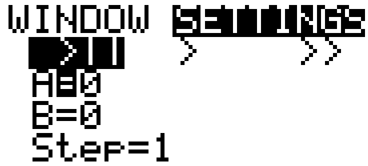
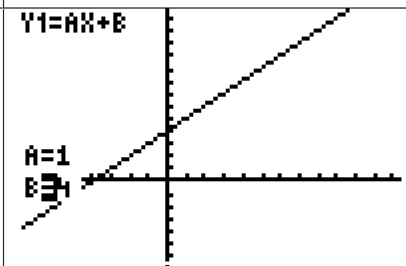
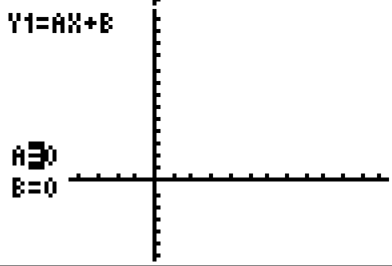
- Typ bij Y1 een functievoorschrift in, bv. y = 2x – 1. - Zet de cursor op het “=” teken en kies het gewenste (on)gelijkheidsteken door op de functieknop er net onder te drukken, bv. [ALPHA][F4]. Er verschijnt “>” - Doe hetzelfde voor Y2, bv. Y2 < x	
- Druk op [GRAPH]. Je merkt dat beide ongelijkheden gearceerd zijn.	
- Druk op [ALPHA][F1] (of [F2]). Je kan nu de doorsnede of de unie van beide arceringen vragen. Daarnaast kan je ook de oorspronkelijke arcering laten bewaren. - Neem nu “1: Ineq Intersection”. Je merkt dat hij de laat zien hoe de doorsnede tot stand komt.	
- Druk op [ALPHA] [F3] (of [F4]). Je krijgt dan de interessante punten. Via de pijltjes kan je eventueel van het ene naar het andere punt overschakelen.	

Opmerking: Wanneer je bij leerlingen in het grafiekvenster onderaan “shades”, e.d. ziet staan, is deze app actief. Dit kan consequenties hebben voor andere oefeningen.

3.3 Transformation graphing

Met dit programma kan je de invloed van parameters in het voorschrift van een functie bekijken.

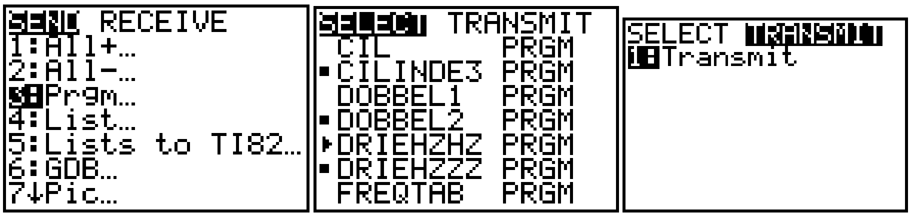
Open “Transfrm”. Normaal verschijnt een scherm met de naam van de toepassing. Als er een keuzemenu verschijnt, waarin je “Uninstall” of “Continue” moet kiezen, betekent dit dat het programma al actief is. Kies “Uninstall” als je het wil onderbreken.

- Druk op [Y=]. - Typ bij Y1 het functievoorschrift in met parameters, bijvoorbeeld Y1= AX + B - Het teken dat voor Y1 staat betekent “afspelen – pauze”. Je kan dan zelf aangeven welke parameter wanneer moet verhogen. Als dit teken anders is, kan je het veranderen door erop te staan en dan een aantal keer op [ENTER] te drukken.	
- Ga naar [WINDOW] en druk op het pijltje naar rechts. Je krijgt het venster hiernaast. Kies om te starten voor A en B best 0. Bovenaan zie je het afspeeltype: >II afspelen – pauze > afspelen >> snel afspelen Bij de 2 laatste mogelijkheden, verandert alles automatisch en kan je enkel onderbreken door op [ENTER] te drukken. Step duidt dan weer aan in welke sprongen de coëfficiënten wijzigen.	
- Druk op [GRAPH]. - Druk op het pijltje naar rechts [->] om A met 1 stap te verhogen. Iedere druk op de pijltjes naar rechts of links doet die coëfficiënt toe- of afnemen met 1 stap. - Wil je naar de andere coëfficiënt dan druk je op het pijltje naar onder en werk je verder analoog.	 

4. Programma’s schrijven voor praktische doeleinden

4.1 Algemeen overzicht

Wat wil je doen?	Hoe doe je dat?
Een programma **gebruiken**	[PGRM]
Een programma **onderbreken**	[ON] -> in het basisscherm verschijnt “ERR:BREAK” Kies 1: om terug te keren naar het basisscherm Kies 2: GoTo om naar de opdrachtregel te gaan waar het programma werd onderbroken

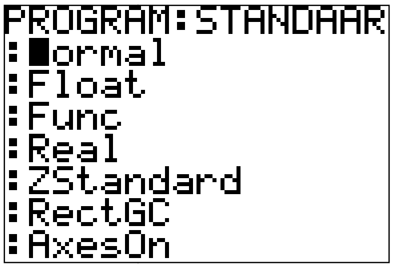
Een programma **wissen**	[2nd] [MEM] [2: Mem Mgmt/Del] [7:Prgm] programma selecteren [DEL]
Een programma **archiveren**	[2nd] [MEM] [2: Mem Mgmt/Del] [7:Prgm] programma selecteren [ENTER] een sterretje duidt aan dat het programma gearchiveerd is en niet meer kan worden bewerkt of worden uitgevoerd
Een programma **uit het archief halen**	zoals archiveren – het sterretje verdwijnt
Een programma **ontvangen van / zenden naar een ander toestel**	Beide machines aanzetten en verbinden met de verbindingskabel. Kies op het ontvangend toestel (eerst dit toestel instellen!) [LINK] "-> Receive": Waiting… verschijnt Kies op het zendend toestel [LINK] "Send" "3: Prgm", selecteer het programma (eventueel meerdere). De selectie wordt aangeduid met een vierkantje. Ga naar "-> Transmit" om het (de) geselecteerde programma('s) te verzenden. 
Een programma invoeren	[PGRM] [NEW] [1: Create New]
Een programmaregel invoegen in een programma	[PGRM] [EDIT] cursor plaatsen waar de regel moet komen [2nd] [INS] [ENTER]
Een programmaregel wissen	[PGRM] [EDIT] cursor plaatsen waar de regel weg moet [CLEAR] (eventueel gevolgd door DEL om de lege regel te verwijderen)
Een programma wijzigen	[PGRM] [EDIT] …

4.2 Programma's schrijven om praktische redenen

4.2.1 Standaardinstellingen

Vaak komen leerlingen naar de les met verschillende instellingen, waardoor het er niet altijd makkelijker op wordt. Sommige leerlingen spelen immers eens een spelletje, maken een tekening of experimenteren er maar op los. Door de leerlingen een programma te geven, waarmee de instellingen hersteld worden zoals jij die wenst, vermijd je niet alleen allerlei praktische vragen, maar boek je ook veel tijdswinst. Je moet namelijk niet steeds bij verschillende leerlingen op zoek gaan naar de verkeerde instelling. Een eenvoudige "laat dat programmaatje maar lopen", volstaat.

Hoe ga je te werk?



- Maak een nieuw programma aan.
- Ga bijvoorbeeld naar [MODE] en kies een gewenste instelling. Deze verschijnt in het programmavenster
- Doe dit voor alle gewenste instellingen.

4.2.2 Een deel van een oefening voorprogrammeren

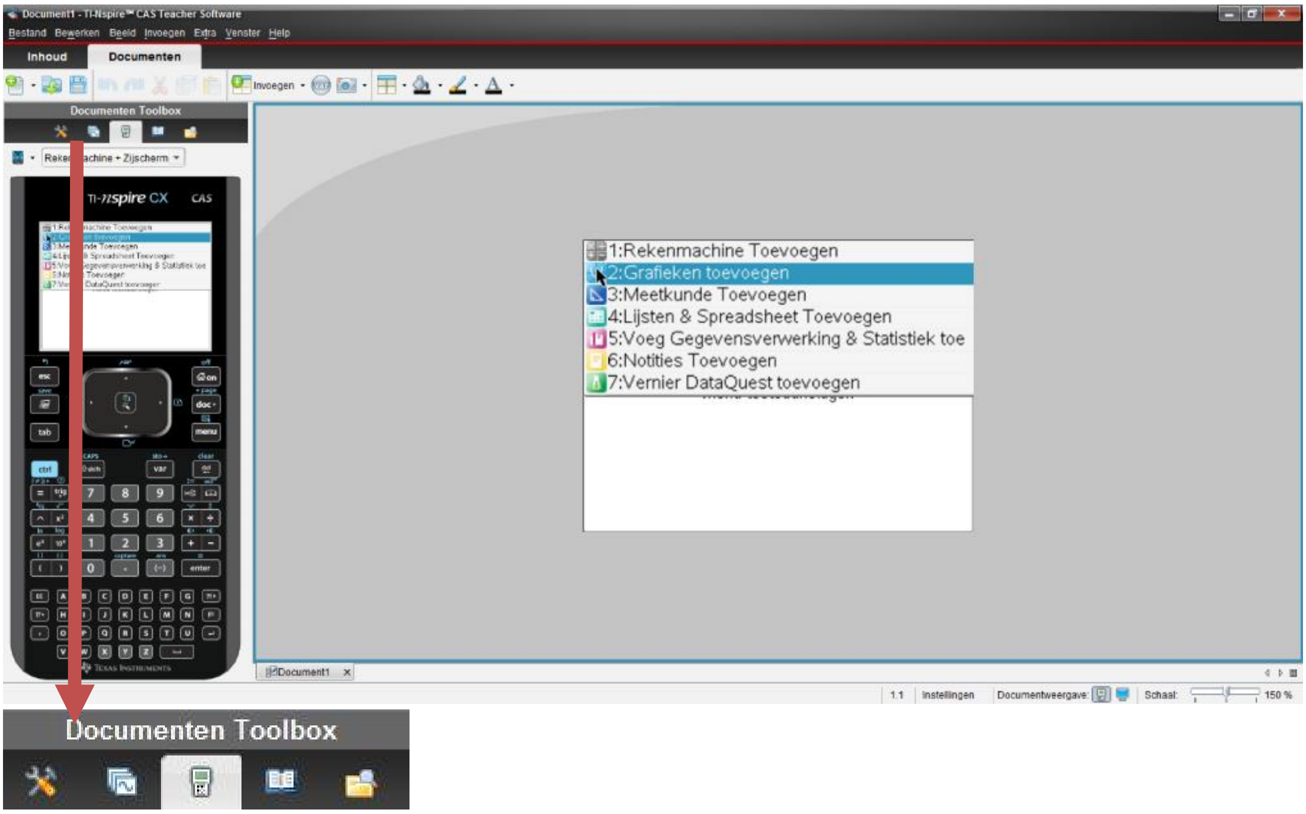
Soms wil je de oplossing van een oefening op de GRM tonen, maar wil je tegelijkertijd ook de leerlingen begeleiden. Zo kan je bijvoorbeeld een programma schrijven waarmee het functievoorschrift ingevoerd wordt en de grafiek getekend wordt. Vensterinstellingen kan je echter niet zo makkelijk voorprogrammeren, dus die vraag je best nog eens klassikaal.

Hoe ga je hiervoor te werk?

- Maak een nieuw programma aan.
- Typ het eerste voorschrift in, druk op [STO] [VARS] -> Y-VARS [1: Function] [1: Y1]
- [Enter]
- Doe hetzelfde voor de andere voorschriften.
- [Prgm] -> I/O [4: DispGraph] (daardoor wordt de grafiek weergegeven)
  of [Prgm] -> I/O [4: DispTabel] (table weergeven)
  of ...

IX. Hulpmiddelen voor TI-nSpire

In dit deel kunnen we ons eigenlijk beperken tot de TI-nSpire software. Deze omvat een emulator, kan schermafbeeldingen maken, enz.



Menu horend bij de actieve toepassing	Paginasorteerder: geeft alle pagina's weer	Emulator: toont de toetsen en/of beeldscherm -> ideaal als demo	Hulpprogramma's waaronder templates, symbolen, …	Inhoudverkenner: geeft inhoud computer en handheld weer

Er zijn heel wat mogelijkheden met de TI-nSpiresoftware, maar deze allemaal bespreken zou ons te ver brengen. De volgende wil ik wel nog eens extra onder de aandacht brengen:

- Via Publishview kan je een hele les maken, bestaande uit de verschillende soorten toepassing.
- Applets maken: zie VI (1.3)

BRONNEN

- "Het functiebegrip in het secundair onderwijs", Uitwiskeling, jaargang 13 nr. 3
- "Het functiebegrip", Uitwiskeling, jaargang 14, nr. 1
- Bundel in verband met functies van Hilde De Maesschalck, DPB Oost-Vlaanderen
- "Ontwikkeling van het functiebegrip", Walter Devolder, Cahier nr. 6 T³ Europe
- "De TI-nSpire in de 2de graad", Annelies Droessaert en Etienne Goemaere, Cahier nr. 21 T³ Europe
- "TI-nSpire materiaal op het internet", Etienne Goemaere, Cahier nr. 27
- "Functies en vergelijkingen van de tweede graad", Benno Frei, René Hugelshofer, Robert Märki (vertaling Guido Herweyers), cahier nr. 27 T³ Europe

- http://www.learner.org/courses/learningmath/algebra/session3/part_e/index.html
- http://math4teaching.com/2009/12/14/evolution-of-the-definition-of-function/
- http://www.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Onderdelen/Analyse.html

  Allen voor de laatste keer geraadpleegd op 1 april 2012, voor het verschijnen van dit cahier.

In de lessen over functies kunnen we ICT niet meer wegdenken. Samen met statistiek is dit het onderdeel bij uitstek waarvoor we in de tweede graad van een grafisch rekentoestel gebruik maken. In dit cahier wordt een aanpak voorgesteld, waarin de TI-84, TI-Nspire software en handheld op een kritische manier geïmplementeerd worden. Bij oefeningen waar de leerlingen zelf aan het werk kunnen gaan wordt de methode zowel met de TI-84 als met de TI-Nspire handheld uitgewerkt. Ook komen andere zaken, die vooral didactisch een meerwaarde kunnen betekenen, aan bod. Zo leer je ook applets maken met de TI-Nspire software, wordt er aandacht besteed aan een correcte vraagstelling, leer je jouw rekentoestel te verbinden met de pc, zie je hoe je het scherm van jouw rekentoestel kan projecteren met behulp van de juiste software, enzovoort.
Kortom: het is een cahier geworden met de nadruk op didactiek.

ANNELIES DROESSAERT is leerkracht wiskunde in de tweede graad van het Sint-Jozef-Klein-Seminarie. Ze gaf reeds verschillende nascholingen omtrent het gebruik van ICT in de lessen wiskunde. Daarnaast is ze ook lid van de stuurgroep van T³-Vlaanderen.

Maart 2012

© 2012 Dit cahier is bedoeld als lesmateriaal, mag hiervoor vrij gekopieerd worden en kan gedownload worden via de website **www.t3vlaanderen.be**.

Texas Instruments