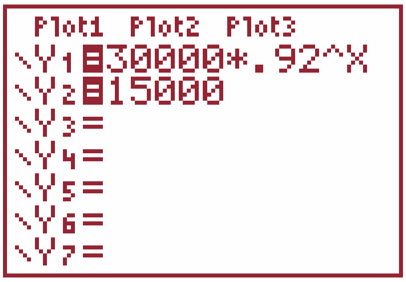
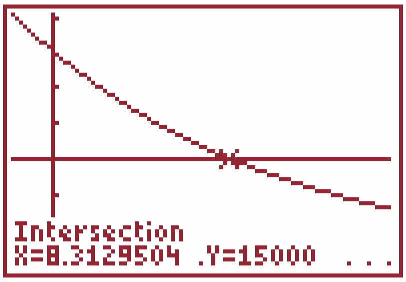
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 4

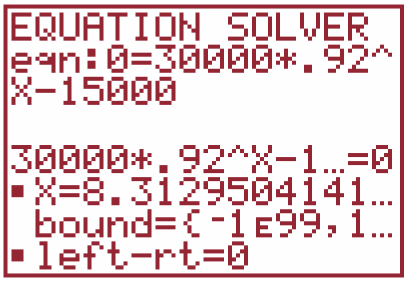
Begeleid zelfstandig leren en werken in de derde graad secundair onderwijs met de TI-83 (84) Plus

Werkteksten voor leerlingen

Geert Delaleeuw







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Begeleid zelfstandig leren en werken met de TI-84 Plus in de derde graad

Werkteksten voor leerlingen

Geert Delaleeuw

T³ EUROPE

Begeleid zelfstandig leren en werken in de derde graad secundair onderwijs met de TI-83 (84) Plus

Geert Delaleeuw

Van leerlingen van de derde graad mag verwacht worden, dat ze een vorm van (begeleid) zelfstandig leren en werken opbouwen. De wiskundelessen kunnen bijgevolg af en toe zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken, weliswaar binnen hun wiskundig kunnen. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

Daarbij zijn de computer en het grafisch rekentoestel handige didactische hulpmiddelen. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze onmiddellijk terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt, kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. Die visuele ondersteuning mag zeker niet onderschat worden en kan de motivatie van een aantal leerlingen verhogen.

Vaak horen we de leerlingen vragen: “Wat kunnen wij met wiskunde doen, wat zijn we hiermee?” Dit zijn terechte vragen. Inderdaad, niet alle leerlingen zijn wiskunde-bollebozen en daarom moeten zij kunnen ervaren dat wiskunde in heel wat reële (en voor hen haalbare) situaties kan toegepast worden en ook zijn diensten kan bewijzen in andere vakken. Daarom is het wenselijk de wiskunde heel regelmatig aan te bieden in ‘contexten’.

Vanaf het schooljaar 2004-2005 worden de nieuwe leerplannen voor de derde graad progressief ingevoerd. De volgende tekst behandelt een drietal onderwerpen uit die nieuwe leerplannen. Het opzet is om de leerlingen – vertrekkende van een concrete, realistische situatie – via een aantal specifieke opdrachten zelfstandig een bepaald leerstofonderdeel te laten verwerken of herhalen. Hierbij mogen ze gebruik maken van het grafisch rekentoestel TI-83 (84) Plus.

Het eerste onderwerp leert de leerlingen grafieken interpreteren en functies en hun veranderingen te onderzoeken. Dit onderwerp komt in alle leerplannen voor, zowel in ASO, TSO als KSO. Het voorbeeld dat zal behandeld worden, kan al (grotendeels) gebruikt worden in de TSO- en KSO-richtingen met twee wekelijkse lestijden wiskunde.
Deze progressief opgebouwde opdracht draagt als titel: *‘Op stap in de West-Vlaamse polders’* en is bedoeld om de leerlingen nog eens zelfstandig de geziene leerstof over functies en hun veranderingen te laten herhalen aan de hand van een nieuw probleem.

Het tweede onderwerp gaat over exponentiële en logaritmische functies.
Exponentiële en logaritmische functies hebben – ten opzichte van de vroegere leerplannen – duidelijk een opwaarding gekregen en mogen dus niet aan de aandacht ontsnappen. Het onderwerp komt vrijwel in alle leerplannen met minstens drie wekelijkse lestijden voor. De opdracht behandelt niet alleen exponentiële groei, maar ook de afgeleide van exponentiële functies en het verband tussen exponentiële en logaritmische functies.
De werktekst draagt de titel *'Een lekkende tankwagen'* en is geschikt om de leerlingen zelfstandig een realistisch probleem met exponentiële functies te laten aanpakken. De opbouw is progressief en heel wat aspecten van exponentiële functies komen er aan bod: groeifactor, exponentieel verband, exponentiële vergelijkingen, afleiden van exponentiële functies, verband tussen logaritmische en exponentiële functies, …
Deze oefening is derhalve zeer goed geschikt om de leerlingen met al die deelaspecten te confronteren en deze zelfstandig in één grote opdracht te laten verwerken.

Tenslotte wordt er aandacht besteed aan lineaire regressie en correlatie. Dit onderwerp komt in alle ASO-leerplannen en in alle TSO- en KSO-leerplannen met minstens 4 wekelijkse lestijden, als keuze-onderwerp voor. In de richting Industriële Wetenschappen (met 6 + 2 lestijden) komt het als verplicht leerstofonderdeel voor.
In het voorbeeld over regressie zullen we het hebben over *'de slingerproef van Huyghens'*. Het is niet noodzakelijk dat de leerlingen voordien al over regressie gehoord hebben. Aan de hand van deze werktekst kunnen ze immers op zelfstandige basis kennis maken met de begrippen onafhankelijke en afhankelijke veranderlijken, spreidingsdiagram, regressielijn, correlatiecoëfficiënt, …
Misschien werkt het voorbeeld ook inspirerend voor de vrije ruimte in het ASO.

Aan elk van die drie opdrachten kan er een viertal lestijden besteed worden.
Het is de bedoeling dat de leerlingen zelfstandig de opdrachten maken. De leerkracht treedt enkel op als 'coach'. Hij zorgt ervoor dat de oplossingen zich in enkele mapjes vooraan in klas bevinden. Op het einde van de opdracht, kunnen de leerlingen een oplossingenbundel raadplegen en hun eventuele fouten aanstippen. Daarna gaan ze terug naar hun plaats, proberen hun fout(en) te verbeteren en leveren de opdracht in.
Soms kan het ook voorkomen dat de leerlingen tijdens hun opdracht er op gewezen worden dat een bepaald resultaat moet overeenkomen met een reeds vroeger gevonden resultaat. Indien dit niet zo is, moeten ze hun fout(en) opsporen vooraleer het volgende probleem aan te pakken. Pas als ze hun fout(en) niet kunnen ontdekken, mogen ze de bundel met de oplossingen raadplegen en – indien nodig – bijkomende uitleg vragen aan de leerkracht.

Nadat de leerkracht de opdracht verbeterd heeft, kan er – indien nodig – nog een les of een leergesprek volgen waarbij de meest voorkomende fouten besproken worden en de leerlingen de gelegenheid krijgen om extra uitleg te vragen.

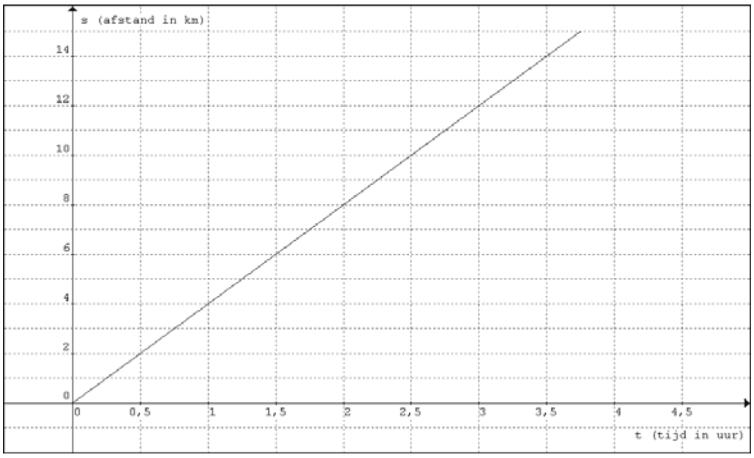
Achteraan in deze syllabus bevinden zich de oplossingen van de opdrachten. Die oplossingen kunnen ook – als de wiskundige achtergrond van de leerlingen het toelaat – herleid worden tot alleen 'oplossingentips'.

1 Op stap in de West-Vlaamse polders

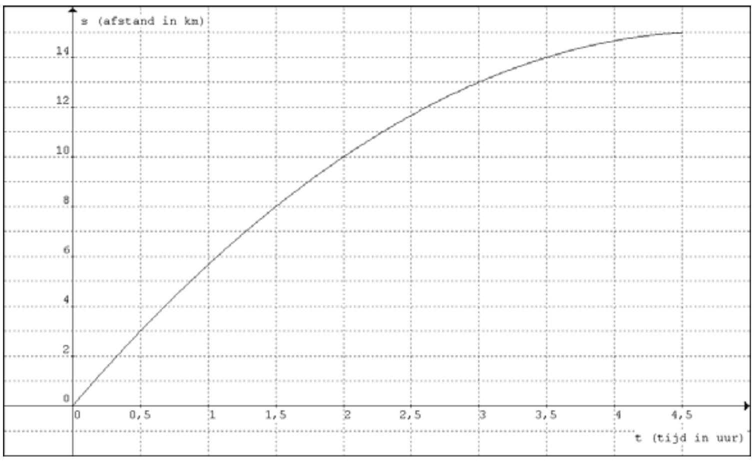
1.1 Een wandeltocht in het West-Vlaamse polderlandschap

An en Bart nemen deel aan een wandeltocht van 15 kilometer in de West-Vlaamse polders. Hieronder zie je de afstand-tijdsdiagrammen van An en Bart.

AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN AN



AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN BART



1. Vul nu in de volgende tabel het aantal kilometer in dat An en Bart gewandeld hebben na de tijd die weergegeven wordt in de eerste kolom:

Tijd in uur	**Aantal km van An**	**Aantal km van Bart**
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

2. Beschrijf de wijze van stappen van An en van Bart.

   An: …

   Bart: …

3. Hoe lang stappen An en Bart op dat parcours van 15 kilometer?

   An: …

   Bart: …

4. Wie van beiden komt er dus als eerste aan en met hoeveel minuten voorsprong?

   …

1.2 Het verband tussen de afgelegde weg en de tijd

Op de vorige twee grafieken kan je al vrij veel informatie aflezen. Maar die informatie is niet altijd heel nauwkeurig. Daarom is het van belang formules te vinden die het verband weergeven tussen de tijd en de afgelegde weg, zowel voor An als voor Bart.

1. Probeer de afstand die An aflegt (in kilometer) uit te drukken in functie van de tijd (in uur). Noem die functie *f*.

   …

2. De grafiek die de afstand van Bart (in kilometer) uitdrukt in functie van de tijd (in uur) is een stuk van een parabool. Probeer het voorschrift van die functie op te stellen. Noem die functie *g*.

   …

3. Laat beide grafieken construeren door het grafisch rekentoestel. De grafieken zouden moeten overeenkomen met de gegeven grafieken in punt 1.1.

<u>AANDACHT!</u>
Indien je vaststelt dat er een grafiek niet overeenkomt met wat in 1.1 gegeven is, moet je ergens (een) fout(en) gemaakt hebben (wellicht in het opstellen van het functievoorschrift). Spoor die fout(en) eerst op.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

4. Vul nu, door gebruik te maken van je grafisch rekentoestel, de volgende tabel in. Vergelijk je gevonden resultaten met wat je in 1.1 vraag 1 ingevuld hebt. De resultaten zouden (soms op een kleine afronding na) moeten overeenkomen.

Tijd in uur	**Aantal km van An**	**Aantal km van Bart**
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

AANDACHT!
Je gevonden waarden in deze tabel moeten (soms op een kleine afronding na) overeenkomen met wat je in 1.1 vraag 1 gevonden hebt.
Indien je vaststelt dat er geen overeenkomst is, moet je ergens (een) fout(en) gemaakt hebben (misschien heb je in 1.1 verkeerde waarden afgelezen). Spoor die fout(en) eerst op.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

5. Voor welke waarden van *t* is het functievoorschrift van An hier van toepassing?

   …

   En dat van Bart?

   …

6. Vul aan:
   Op zeker moment wordt ………… ingehaald door ………… .
   Dat gebeurt na ……uur en …….minuten.
   Op dat moment hebben An en Bart ……..kilometer gewandeld.

   Maak de nodige berekeningen eerst met en daarna zonder je grafisch rekentoestel.

   …

1.3 Hoe snel stappen An en Bart?

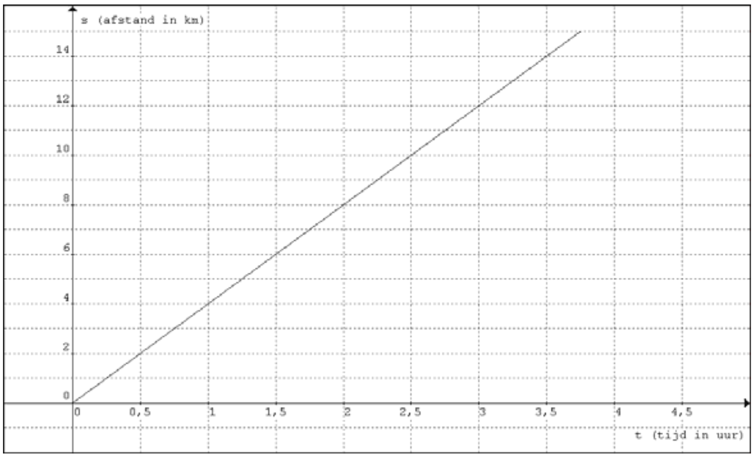
In 1.1 heb je al enkele conclusies kunnen trekken over de snelheid waarmee An en Bart wandelen. Nu zal hun 'stapgedrag' wat van naderbij bekeken worden.

1. Vul de volgende tabel aan. Indien nodig mag je beroep doen op je grafisch rekentoestel. De resultaten in de tweede en de derde kolom zijn eigenlijk de gemiddelde snelheden tijdens het voorbije uur (uitgedrukt in km per uur).

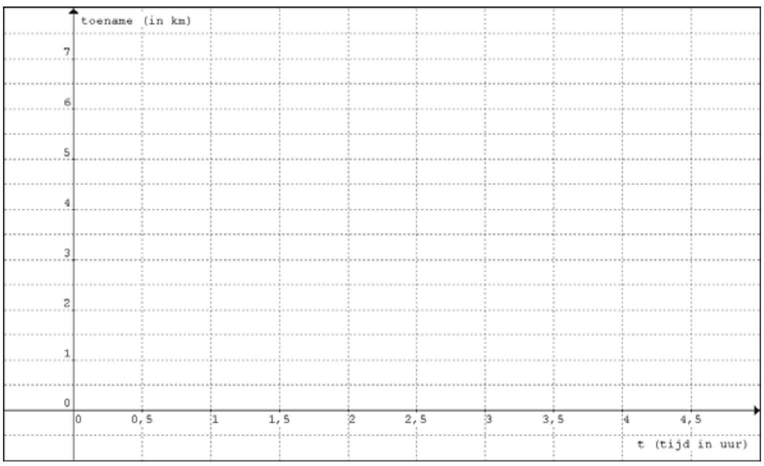
Aantal uren stappen	**Toename afgelegde weg van An t.o.v. één uur vroeger**	**Toename afgelegde weg van Bart t.o.v. één uur vroeger**
1		
2		
3		

2. Duid op de grafieken hieronder die toenames aan met verticale streepjes en maak dan de toenamediagrammen. Wat leer je uit de toenamediagrammen?

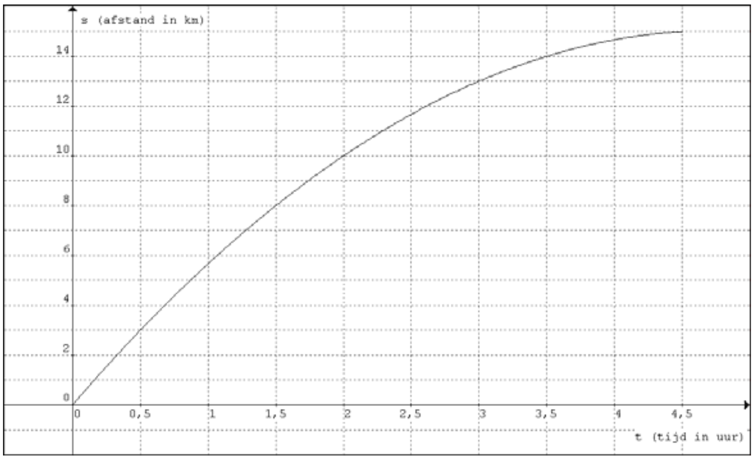
AANDUIDEN VAN DE TOENAMES OP HET AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN AN



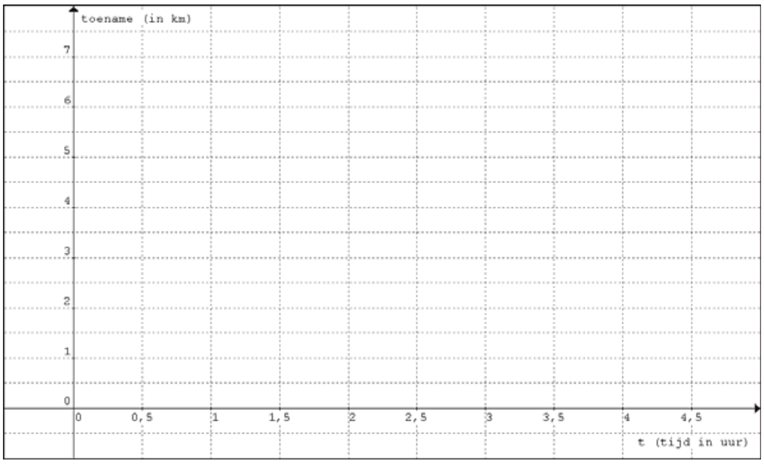
TOENAMEDIAGRAM VAN AN
(DRUKT HIER OOK DE GEMIDDELDE SNELHEDEN PER UUR UIT)



AANDUIDEN VAN DE TOENAMES OP HET AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN BART



TOENAMEDIAGRAM VAN BART
(DRUKT HIER OOK DE GEMIDDELDE SNELHEDEN PER UUR UIT)



3. Vul de volgende tabel aan. Indien nodig mag je beroep doen op je grafisch rekentoestel.

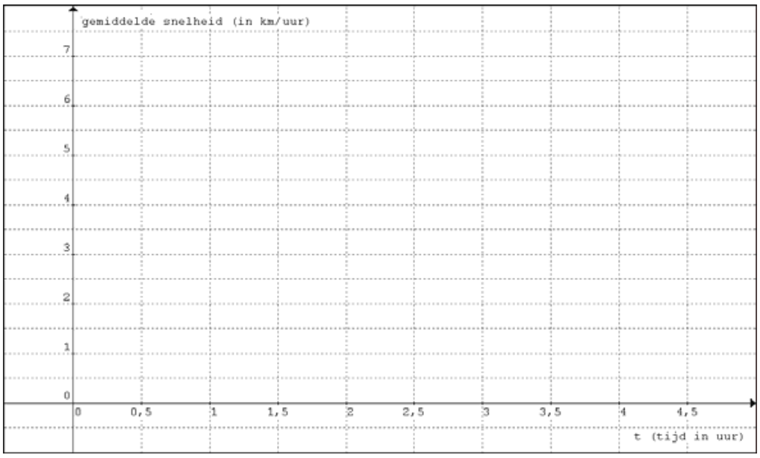
Aantal uren stappen	**Toename afgelegde weg van An t.o.v. één half uur vroeger**	**Toename afgelegde weg van Bart t.o.v. één half uur vroeger**
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

4. Aangezien je hier telkens de toename van de afgelegde weg t.o.v. een half uur vroeger, berekend hebt, stellen de waarden in de tweede en derde kolom geen gemiddelde snelheden voor.
   Noteer nu in de tabel hieronder de gemiddelde snelheden (uitgedrukt in km per uur) die An en Bart gehaald hebben. Beschrijf je werkwijze.

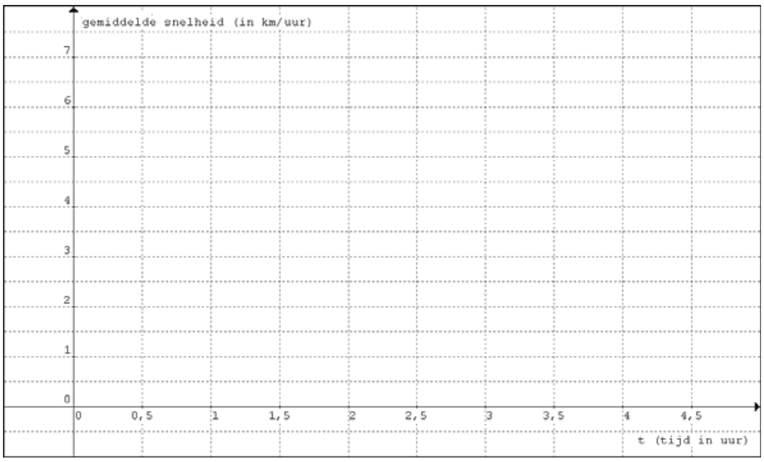
Aantal uren stappen	**Gemiddelde snelheid van An tijdens het voorbije half uur**	**Gemiddelde snelheid van Bart tijdens het voorbije half uur**
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

5. Stel nu in de assenstelsels hieronder om het half uur de gemiddelde snelheid voor die An en Bart gedurende het voorbije half uur gehaald hebben.

GEMIDDELDE SNELHEID VAN AN (OM HET HALF UUR GEMETEN)



GEMIDDELDE SNELHEID VAN BART (OM HET HALF UUR GEMETEN)



6. De gemiddelde snelheid van An tussen 2 en 3 uur is: $\frac{f(3)-f(2)}{1}=12-8=4$.

   Tussen 2 en 2,5 uur is die gemiddelde snelheid: $\frac{f(2{,}5)-f(2)}{0{,}5}=\frac{10-8}{0{,}5}=\frac{2}{0{,}5}=4$.

   Algemeen kan je stellen dat de gemiddelde snelheid tussen 2 en (2 + h) uur gelijk is aan: $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

   In het eerste geval is h dan gelijk aan 1 en in het tweede geval gelijk aan 0,5.

   Vul nu de volgende tabellen verder aan. De rechterkolommen kunnen natuurlijk ingevuld worden na het uitvoeren van berekeningen in het basisscherm van het grafisch rekentoestel, maar ze zijn ook op een snellere manier te bekomen door nieuwe functies in te voeren in het Y=scherm!

	AN		**BART**	
$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}}$	**Gemiddelde snelheid tussen 2 en (2 + *h*) uur**	$\boldsymbol{\frac{g(2+h)-g(2)}{h}}$	**Gemiddelde snelheid tussen 2 en (2 + *h*) uur**
1	$\frac{f(3)-f(2)}{1}$	4	$\frac{g(3)-g(2)}{1}$	
0,5	$\frac{f(2{,}5)-f(2)}{0{,}5}$	4	$\frac{g(2{,}5)-g(2)}{0{,}5}$	
0,2				
0,1				
0,01				
0,001				
0,0001				

7. Kan je uit de bekomen resultaten in de vorige vraag, vermoeden wat de ogenblikkelijke snelheden van An en Bart zijn na precies 2 uur stappen?

   An: …
   Bart: …

8. Probeer nu ook eens, met behulp van het grafisch rekentoestel, een goede benadering te vinden voor de ogenblikkelijke snelheden van An en Bart
   a) na 1 uur stappen;

   An: …
   Bart: …

   b) en na 3 uur stappen.

   An: …
   Bart: …

9. Bereken de ogenblikkelijke snelheid van An en Bart na 1, 2 en 3 uur stappen zonder beroep te doen op het grafisch rekentoestel.

   …

10. Met welke snelheid wandelen An en Bart over de ‘eindmeet’?

    An: …

    Bart: …

11. Laat je grafisch rekentoestel de snelheid van An en Bart construeren in functie van de tijd. Vergelijk de grafieken met de toenamediagrammen die je in 1.3 vragen 2 en 5 geconstrueerd hebt (m.a.w. als je de bovenste punten van de staafjes van de toenamediagrammen verbindt door een vloeiende lijn, bekom je dan de grafiek die je met het grafisch rekentoestel gevonden hebt? waarom wel of waarom niet?).

    …

12. Op welk ogenblik stapte Bart even snel als An? Hoeveel kilometer heeft Bart dan al gestapt?

…

13. Laat je grafisch rekentoestel voor die gevonden *t*-waarde de raaklijn construeren aan de afstand-tijdsgrafiek van Bart. Wat stel je vast? Verklaar!

☞ ***Raadpleeg nu de oplossingenbundel en stip je eventuele fouten aan. Ga daarna terug naar je plaats en verbeter je fouten. Nadat je alles verbeterd hebt, lever je deze opdracht in.***

2 Een lekkende tankwagen

2.1 *Ongeval op de Ieperse noorderring*

Op de Ieperse noorderring kantelde vorige week een tankwagen met olie. De tank scheurde en de olie stroomde op het wegdek.
De tank was vol en bevatte 30000 liter olie. Op de tank is er een meter bevestigd die de resterende hoeveelheid olie aanduidt. Men heeft die hoeveelheid af en toe afgelezen en genoteerd. De resultaten zijn opgenomen in de volgende tabel

Tijd *t* in minuten	**Resterend volume olie in liter (*V*)**
1	27600
2	25400
4	21500
7	16700
10	13000
12	11000
16	7900

2.2 *Exponentieel verband tussen de tijd en het volume*

2.2.1 Manueel opsporen van het verband

Het verband tussen de tijd en de resterende hoeveelheid olie in de tankwagen zal hoogstwaarschijnlijk exponentieel zijn.

1. Probeer, aan de hand van de gegevens uit de tabel, zo goed mogelijk het resterende volume uit te drukken in functie van de tijd (de groeifactor mag je afronden tot op twee decimalen).

   …

2. Controleer of 'alle' waarden uit de tabel min of meer beantwoorden aan je gevonden formule.
   *Ken het gevonden functievoorschrift toe aan de variabele Y1, ga dan naar het scherm van de tabelinstelling (via **2nd TBLSET**) en kies op de lijn **Onafh:** voor de optie **Vraag**.*
   *De tabel die je dan opvraagt (via **2nd TABLE**) zal leeg zijn, maar wanneer je een waarde invoert in de kolom X, zullen de beeldwaarden automatisch berekend en weergegeven worden.*

2.2.2 Opsporen van het verband met het grafisch rekentoestel

Je kan de gegevens uit de tabel als puntenkoppels laten plotten.
Volg daarvoor de volgende werkwijze:

1. Plaats de gegevens in lijsten: sla de tijden op in lijst L1 en het corresponderende olievolume in lijst L2.
   *Het scherm met de lijsten bekom je via **STAT, EDIT, 1: Bewerken**.*

2. Schakel eerst de functie Y1 uit en laat de puntenkoppels plotten via Plot1.
   *Druk daarvoor op **2nd STAT PLOT**.*
   Zet Plot1 aan en selecteer het spreidingsdiagram (linksboven).
   Voor de Xlist gebruik je L1 (de lijst met de tijden). Voor de Ylist gebruik je L2 (de lijst met de olievolumes).
   Tenslotte selecteer je de wijze waarop een grafiekpunt weergegeven wordt. Kies voor een vierkantje.
   *Nu is de grafiekinstelling klaar en kan je de grafiek laten tekenen. Kies daarvoor in het menu **ZOOM** voor de optie **ZOOM, 9: ZoomStat**.*

3. Het grafisch rekentoestel is nu in staat om het voorschrift te bepalen van de exponentiële functie die deze geplotte punten bevat of zo dicht mogelijk benadert.
   *Dit voorschrift kan je bekomen via **STAT, REKEN, 0: ExpReg**, gevolgd door de lijstnamen L1 en L2 (gescheiden door een komma). Daarna druk je op de ENTER-toets.*
   Welke vergelijking vind je?

   …

<u>AANDACHT!</u>
Het exponentieel verband dat je met behulp van het grafisch rekentoestel gevonden hebt, moet goed overeenkomen met het exponentieel verband dat je gevonden hebt in 2.2.1 vraag 1.
Indien je vaststelt dat er geen overeenkomst is, moet je ergens (een) fout(en) gemaakt hebben (misschien heb je in 2.2.1 de groeifactor verkeerd berekend of heb je in 2.2.2 in een lijst een verkeerd getal ingegeven). Spoor die fout(en) eerst op.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

4. Activeer nu weer de functie Y1 die je in 2.2.1 vraag 1 hebt opgesteld en druk op **GRAPH**.
   Nu wordt de grafiek samen met de puntenkoppels geconstrueerd.

2.3 De brandweer komt ter plaatse

AANDACHT!
Vooraleer verder te werken, raadpleeg je de oplossingenbundel en werk je verder met het exponentieel verband dat je kan vinden bij 2.2.1 vraag 1. Als het exponentieel verband dat je zelf gevonden hebt, daar sterk van afwijkt, probeer je de fout(en) te vinden.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

De gegevens uit de tabel tonen aan dat er een grote scheur in die tank zit want de resterende hoeveelheid olie daalt spectaculair! In de hoop een grote ramp te kunnen vermijden, is politie en brandweer al na 5 minuten op de plaats van het ongeval.
Het verkeer wordt omgeleid en men begint aan de reiniging van het wegdek. Ondertussen wordt er met man en macht gewerkt aan het dichten van de scheur in de tank.

1. De scheur is enorm groot en kan pas na 17 minuten lekken gedicht worden. Hoeveel olie is er intussen op het wegdek gelopen?

   …

2. Na hoeveel minuten was de tank halfleeg?
   Beantwoord deze vraag op drie manieren:

   a) manueel;

   …

   b) door te steunen op de grafiek;

   c) door te werken met de oplosser.

3. Wat was de gemiddelde uitstroomsnelheid tussen het tijdstip van het ongeval en het dichten van het lek?

   …

   En wat was de gemiddelde uitstroomsnelheid tussen de vijfde en de tiende minuut?

   …

4. Wat was de uitstroomsnelheid toen het ongeval pas gebeurd was?

   …

   En wat was die uitstroomsnelheid op het moment dat het lek gedicht werd?

   …

5. Bereken nu de uitstroomsnelheden op de tijdstippen die voorkomen in de gegeven tabel.

   …

6. Hoe evolueren de uitstroomsnelheden?
   Probeer dit te verklaren door te redeneren op de grafiek van de functie Y1.

   …

7. Na hoeveel minuten was de uitstroomsnelheid afgenomen tot de helft van de uitstroomsnelheid bij het begin?
   Beantwoord deze vraag op drie manieren:

   a) manueel;

   …

   b) door te steunen op de grafiek;

   c) door te werken met de oplosser.

   Vergelijk je antwoord met het antwoord dat je gevonden hebt in 2.3 vraag 2.
   Verklaar!

   …

2.4 Logaritmisch verband tussen het volume en de tijd

1. In 2.2 heb je het resterende volume olie uitgedrukt in functie van de tijd. Het verband was exponentieel.
   Probeer nu de tijd uit te drukken in functie van het resterende volume. Maak hierbij gebruik van Briggse logaritmen.

   …

2. Laat je grafisch rekentoestel de grafiek van deze functie construeren. Zorg voor gepaste vensterinstellingen.

3. Maak nu gebruik van dat logaritmisch verband om de volgende vragen te beantwoorden:
   a) Na hoeveel minuten zit er nog 20000 liter olie in de tank?

   …

   b) Na hoeveel minuten zit er nog 10000 liter olie in de tank?

   …

c) Stel dat het lek niet kon gedicht worden en dat de olie dus blijft uit de tank vloeien, na hoeveel minuten zit er dan nog 1000 liter olie in de tank?

…

d) Na hoeveel minuten zou er dan nog 100 liter in de tank zitten?

…

e) Na hoeveel minuten zou de tank leeg zijn? Hoe moet je dit resultaat interpreteren?

…

4. In 2.2 heb je het resterende volume olie uitgedrukt in functie van de tijd.
In 2.4.1 heb je de tijd uitgedrukt in functie van het resterende volume.
Voorspel het verband tussen beide grafieken.
Toon dat grafische verband aan door gebruik te maken van het grafisch rekentoestel. Zorg voor gepaste vensterinstellingen!!

☞ ***Raadpleeg nu de oplossingenbundel en stip je eventuele fouten aan. Ga daarna terug naar je plaats en verbeter je fouten. Nadat je alles verbeterd hebt, lever je deze opdracht in.***

3 De slingerproef van Huyghens

3.1 Christiaan Huyghens

1. Zoek op het Internet informatie over Christiaan Huyghens en zijn proeven met de slinger. Welke websites heb je geraadpleegd?

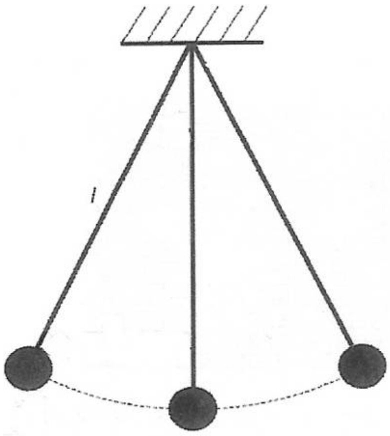
2. Maak van je opzoekwerk een samenvatting van één bladzijde.

3.2 De lengte van een slinger en zijn slingertijd

Uit ondervinding weet je dat de tijd die een slinger nodig heeft om één volledige slingerbeweging te maken, groter is naarmate de slinger langer is.

Christiaan Huyghens stelde zich destijds de vraag of er een verband bestaat tussen de lengte van een slinger en zijn slingertijd (met de slingertijd bedoelen we hier de 'periode' van de slinger, m.a.w. de tijd die nodig is om één volledige slingerbeweging te maken).

Vooraleer in te gaan op zijn bevindingen, probeer je eerst eens zelf op zoek te gaan naar een verband. Dit kan je doen aan de hand van een tiental metingen.
De resultaten zijn opgenomen in de onderstaande tabel:



Lengte *l* (in *m*)	**Slingertijd *t* (in *sec*)**
0,07	0,53
0,10	0,63
0,15	0,78
0,17	0,83
0,21	0,91
0,28	1,06
0,32	1,13
0,39	1,25
0,45	1,34
0,50	1,41

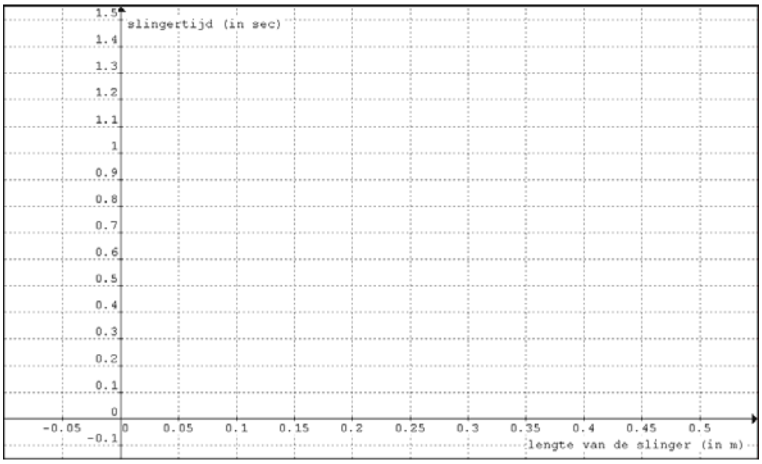
3.3 *Het spreidingsdiagram*

3.3.1 Manueel

Stel de meetresultaten voor als punten in het volgende assenstelsel.

Hierbij wordt de lengte van de slinger (in meter) voorgesteld op de horizontale as en de slingertijd (in seconden) op de verticale as.

De grafiek die je op die manier bekomt, wordt een **puntenwolk** of een **spreidingsdiagram** genoemd.



3.3.2 Met het grafisch rekentoestel

Het spreidingsdiagram kan je ook door het grafisch rekentoestel laten weergeven.

Volg daarvoor de volgende werkwijze:

1. Plaats de gegevens in lijsten: sla de lengtes op in lijst L1 en de corresponderende slingertijden in lijst L2.
   *Het scherm met de lijsten bekom je via **STAT, EDIT, 1: Bewerken**.*

2. Laat het spreidingsdiagram plotten via Plot1.
   *Druk daarvoor op **2nd STAT PLOT**.*
   Zet Plot1 aan en selecteer het spreidingsdiagram (linksboven).
   Voor de Xlist gebruik je L1 (de lijst met de lengtes). Voor de Ylist gebruik je L2 (de lijst met de slingertijden).
   Tenslotte selecteer je de wijze waarop een grafiekpunt weergegeven wordt. Kies voor een vierkantje.
   *Nu is de grafiekinstelling klaar en kan je de grafiek laten tekenen. Kies daarvoor in het menu **ZOOM** voor de optie **ZOOM, 9: ZoomStat**.*

<u>AANDACHT!</u>
Het spreidingsdiagram dat je zelf getekend hebt, zou moeten overeenkomen met het spreidingsdiagram dat je bekomt via het grafisch rekentoestel. Maak bij de controle gebruik van de TRACE-toets.
Indien je vaststelt dat de twee spreidingsdiagrammen niet overeenkomen, moet je ergens (een) fout(en) gemaakt hebben (misschien heb je een gegeven verkeerd ingetikt). Spoor die fout(en) eerst op.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

3.4 De regressielijn

3.4.1 Op zoek naar de vergelijking

Als je de getekende punten met elkaar zou verbinden, dan is het duidelijk dat je geen rechte lijn bekomt. Maar misschien bestaat er toch wel een rechte die vrij dicht bij al die punten ligt (of toch vrij dicht bij de meeste van die punten).

Het grafisch rekentoestel is in staat om die rechte te bepalen. Deze rechte noemen we de **regressielijn**. Het voorschrift van deze regressielijn kan je bekomen via **STAT, REKEN, 4: LinReg(ax+b)**, gevolgd door de lijstnamen L1 en L2 (gescheiden door een komma). Daarna druk je op de ENTER-toets.

1. Welke vergelijking vind je?

   …

2. Concreet betekent dit dat het lineaire verband dat het best het werkelijke verband tussen de lengte *l* en de slingertijd *t* benadert, kan weergegeven worden door:

   …

3. Construeer deze regressielijn in het assenstelsel waarin je al het spreidingsdiagram hebt getekend.

4. Wordt het spreidingsdiagram goed benaderd door deze rechte?

   …

3.4.2 De regressielijn laten plotten door het grafisch rekentoestel

Die regressielijn kan je uiteraard ook laten construeren door het grafisch rekentoestel (door de bekomen vergelijking in te voeren in het Y=scherm).

Maar het is veel eenvoudiger als je als volgt te werk gaat:

1. Tik na **LinReg(ax+b) L1, L2** een komma in gevolgd door de variabele Y1 bijvoorbeeld. Dan wordt de vergelijking van de regressielijn automatisch opgeslagen in de Y1-variabele en zal de Y=functie geselecteerd worden.
   *De functienamen Y1, Y2, …, Y0 kan je bekomen via **VARS, Y-VARS, 1: Functie**. Dan kies je de gewenste functienaam en druk je op ENTER.*

2. Als je daarna het grafische venster activeert via **GRAPH**, dan wordt de regressielijn geplot (bij het spreidingsdiagram dat al eerder geconstrueerd werd).

AANDACHT!
De rechte die je zelf getekend hebt, zou moeten overeenkomen met de rechte die je bekomt via het grafisch rekentoestel.
Indien je vaststelt dat de twee rechten niet overeenkomen, moet je ergens (een) fout(en) gemaakt hebben (misschien heb je foutieve punten genomen bij de manuele constructie van de rechte). Spoor die fout(en) eerst op.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

3.5 De correlatiecoëfficiënt

3.5.1 Definitie

Een lineair verband (of lineaire correlatie) is sterk als de punten van het spreidingsdiagram dicht bij de regressielijn liggen en zwak als ze wijd verspreid om die regressielijn liggen. In ons voorbeeld mag je hier gerust spreken van een sterke lineaire correlatie, aangezien de meeste punten zich dicht bij de regressielijn bevinden.
Je kan je nu afvragen of het mogelijk is een getal te vinden dat de sterkte uitdrukt van de lineaire correlatie tussen twee kwantitatieve variabelen (hier dus tussen de lengte van een slinger en de slingertijd).

Welnu, dergelijk getal bestaat en wordt de **correlatiecoëfficiënt** genoemd. De correlatiecoëfficiënt wordt voorgesteld door het symbool *r* en wordt als volgt gedefinieerd:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - \overline{x}\right).\left(y_i - \overline{y}\right)\right]}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2\right)}}$$

Hierbij stelt $\overline{x}$ het rekenkundig gemiddelde voor van de waarnemingsgetallen x_i (in ons voorbeeld de verschillende lengtes van een slinger) en $\overline{y}$ het rekenkundig gemiddelde van de waarnemingsgetallen y_i (de verschillende slingertijden).

3.5.2 Berekening van de correlatiecoëfficiënt

1. Zoek de gemiddelde slingerlengte $\overline{x}$ en de gemiddelde slingertijd $\overline{y}$.
   *Deze gemiddelden zijn heel gemakkelijk met het grafisch rekentoestel te berekenen via **STAT, REKEN, 1-Var Stats**, gevolgd door de naam van de lijst waarin de waarnemingsgetallen voorkomen.*

   $\overline{x} = \ldots$

   $\overline{y} = \ldots$

2. Waaraan is de formule voor de correlatiecoëfficiënt hier nu gelijk als je rekening houdt met de zopas gevonden resultaten?

   …

3. Laat nu het grafisch rekentoestel de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$ construeren, samen met het spreidingsdiagram en de regressielijn.
   *De verticale rechte moet getekend worden vanuit het basisscherm via de opdracht **2nd DRAW, TEK, 4: Verticaal**, gevolgd door het getal $\overline{x}$ en een druk op de ENTER-toets. Geef de horizontale rechte de functienaam Y2.*

4. Door welk bijzonder punt loopt de regressielijn?
   Dat punt wordt het ‘zwaartepunt’ van het spreidingsdiagram genoemd.

   …

5. Als je het vlak in vier kwadranten verdeelt volgens de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$, waar situeren de punten van het spreidingsdiagram zich dan?

   …

6. Zou de correlatiecoëfficiënt hier positief zijn of negatief? Verklaar!

   …

7. Bereken de correlatiecoëfficiënt door gebruik te maken van het grafisch rekentoestel.
   Maak gebruik van lijsten en sommen van lijsten.

   r = …

8. De correlatiecoëfficiënt kan je ook 'rechtstreeks' met het grafisch rekentoestel berekenen. Zet daarvoor de volgende stappen:
   - Zet de weergavemodus voor de diagnosegegevens op 'aan' (standaard staat die modus op 'af').
     Die weergavemodus voor de diagnosegegevens kan ingesteld worden via ***2nd CATALOG****. Dan druk je op de letter* ***D*** *en ga je met de cursor naar beneden tot je op* ***DiagnoseAan*** *staat. Tenslotte druk je twee maal op de ENTER-toets.*
   - Als je nu weer het commando **LinReg(ax+b) L1, L2, Y1** laat uitvoeren, bekom je naast de regressielijn ook de correlatiecoëfficiënt r (met r^2 wordt de determinatiecoëfficiënt bedoeld; daar wordt niet dieper op ingegaan).

AANDACHT!
De correlatiecoëfficiënt die je hier bekomt, moet uiteraard overeenkomen met de eerder gevonden waarde. Zoniet, moet je je fout(en) opsporen.
Als je de fout(en) niet vindt, raadpleeg je de oplossingenbundel of vraag je uitleg aan je leerkracht.

3.5.3 Verantwoording van de formule

Men kan bewijzen dat een correlatiecoëfficiënt nooit groter wordt dan 1 en nooit kleiner dan -1.

Bovendien kan er aangetoond worden dat de absolute waarde van *r* heel dicht bij 1 ligt als er een sterke lineaire correlatie is.

1. Als *r* dicht bij 1 ligt, spreekt men van een sterke positieve lineaire correlatie. Dan liggen de meeste punten van het spreidingsdiagram dicht bij de regressielijn en is die regressielijn stijgend.
   Is dat hier zo? Kan je dat verklaren? (steun hierbij op wat er in 3.5.2 vraag 6 aan bod is gekomen).

   …

2. Als *r* dicht bij -1 ligt, spreekt men van een sterke negatieve lineaire correlatie. Wanneer zou zoiets voorkomen, denk je? Verklaar!

   …

3. Als *r* ver van 1 en van -1 ligt, spreekt men van een zwakke lineaire correlatie. Wanneer zou dat voorkomen, denk je? Verklaar!

   …

3.6 Een beter verband tussen de slingerlengte en de slingertijd

3.6.1 De formule van Huyghens

1. Het lineaire verband tussen de lengte *l* en de slingertijd *t* dat je in 3.4.1 vraag 2 gevonden hebt, is een vrij goede benadering. Maar toch kan je hierbij een bedenking formuleren. Welke?
   Tip: beschouw een slinger met lengte 0.

   …

Er moet dus een beter verband tussen de lengte en de tijd kunnen gevonden worden.
Christiaan Huyghens heeft ontdekt dat het verband tussen de lengte van de slinger en de slingertijd gelijk is aan: $t = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$.
Hierbij stelt *g* de valversnelling of de zwaartekrachtconstante voor. Deze is gelijk aan 9,81.
Je mag dus stellen: $\boxed{t = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}}$.

2. Wat is het beeld van 0 volgens deze formule? Is dit logisch?

   …

3. Ga op het Internet en activeer de website
   http://webphysics.ph.msstate.edu/javamirror/ipmj/java/pend1/index.html .
   Op deze website kan je ook de bovenstaande formule terugvinden. Je kan er ook een slinger in beweging zetten en de lengte vastzetten.
   Controleer eens de slingertijden waarmee we hier in ons voorbeeld gewerkt hebben.

3.6.2 Op zoek naar een "machtsverband" met het grafisch rekentoestel

1. Herleid de formule $t = \frac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}}.\sqrt{l}$ tot een formule van de vorm $t = a.l^b$.

   …

In punt 3.4.1 heb je je grafisch rekentoestel laten zoeken naar een lineaire functie die het best het spreidingsdiagram benaderd.
Maar het rekentoestel is in staat om, naast lineaire, ook andere verbanden op te sporen.

2. Ga op zoek naar een machtsfunctie van de vorm $y = a.x^b$ die het best het spreidingsdiagram benaderd.
   Komt de gevonden vergelijking (ongeveer) overeen met de formule van Huyghens?
   Het voorschrift en de grafiek van die machtsfunctie kan je bekomen via ***STAT, REKEN, A: MachtsReg****, gevolgd door de lijstnamen L1, L2 en een functievariabele (Y3 bijvoorbeeld). Om de grafieken te laten plotten, zorg je er natuurlijk voor dat alleen Plot1 en Y3 geactiveerd zijn.*

   …

Merk op:
Het rekentoestel geeft hier ook een waarde voor r. Noteer die waarde.

…

De betekenis hiervan wordt later uitgelegd.

3.7 Voorspellingen

Je hebt nu een lineair verband en een machtsverband gevonden tussen de lengte van een slinger en zijn slingertijd.

1. Laat nu beide grafieken (Y1 en Y3) plotten. Merk je een groot verschil? Wat valt er het meest op?

   ..

2. Laat het grafisch rekentoestel volgens het lineaire model en het machtsmodel de slingertijden berekenen voor de tien lengten uit de gegeven tabel. Vergelijk de gevonden tijden met de tijden die in de tabel voorkomen.
   *Ga daarvoor naar het scherm van de tabelinstelling (via **2nd TBLSET**) en kies op de lijn **Onafh:** voor de optie **Vraag**.*
   *De tabel die je dan opvraagt (via **2nd TABLE**) zal leeg zijn, maar wanneer je een waarde invoert in de kolom X, zullen de beeldwaarden automatisch berekend en weergegeven worden.*

3.8 Betekenis van de correlatiecoëfficiënt bij een machtsverband

De correlatiecoëfficiënt *r* is een maat voor het **lineair** verband tussen twee kwantitatieve grootheden.
Dat het rekentoestel, bij het opvragen van het machtsverband, toch de correlatiecoëfficiënt heeft gegeven (zie 3.6.2 vraag 2) is als volgt te verklaren: *r* is hier eigenlijk de correlatiecoëfficiënt die hoort bij het lineair verband tussen de vierkantswortel van de lengte (dus $\sqrt{l}$) en de slingertijd *t*.

Probeer dit even aan te tonen. Zet daarvoor de volgende stappen:

1. Maak een lijst L3 die bestaat uit de vierkantswortels van de waarden uit lijst L1.

2. Laat het spreidingsdiagram construeren dat $\sqrt{l}$ voorstelt op de horizontale as en *t* op de verticale as (neem Plot2).

3. Zoek nu de vergelijking van de regressielijn die het best dit spreidingsdiagram benadert en laat die vergelijking opslaan in de Y4-variabele. Wat stel je vast?

   …

4. Lees de correlatiecoëfficiënt af. Deze zou (op een kleine afronding na) moeten overeenkomen met de correlatiecoëfficiënt gevonden in 3.6.2 vraag 2. Klopt dat?

   …

5. Laat de regressielijn samen met het spreidingsdiagram construeren.

3.9 De onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke

Zowel bij het opsporen van een lineair verband als van een machtsverband, ben je vertrokken van de lengte van de slinger en heb je de daarbij horende slingertijd berekend. Anders gezegd: de slingertijd staat in functie van de lengte, of nog: de lengte is de **onafhankelijke veranderlijke** en de slingertijd is de **afhankelijke veranderlijke**.

Je kon hier ook andersom werken en bijgevolg de slingertijd als onafhankelijke veranderlijke en de lengte als afhankelijke veranderlijke beschouwen. In dit geval wordt de lengte uitgedrukt in functie van de slingertijd.

1. Zet het eerder gevonden lineair verband tussen de slingerlengte en de slingertijd om in een nieuw verband waarbij nu de slingerlengte in functie staat van de slingertijd.

   …

2. Laat het grafisch rekentoestel het bijhorende spreidingsdiagram plotten (Plot3). Zoek de vergelijking van de regressielijn (moet overeenkomen met de vergelijking die je in punt 1 gevonden hebt!) en laat ze plotten samen met het spreidingsdiagram (ken de vergelijking toe aan Y5).

   …

3. Zet het eerder gevonden machtsverband tussen de slingerlengte en de slingertijd om in een nieuw verband waarbij nu de slingerlengte in functie staat van de slingertijd.

   …

4. Laat nu het grafisch rekentoestel dat verband zoeken en ken de gevonden vergelijking toe aan Y6 (deze vergelijking moet overeenkomen met de vergelijking die je in vraag 3 gevonden hebt!). Laat tenslotte de grafiek van die gevonden functie construeren, samen met het spreidingsdiagram en de regressielijn.

   …

☞ ***Raadpleeg nu de oplossingenbundel en stip je eventuele fouten aan. Ga daarna terug naar je plaats en verbeter je fouten. Nadat je alles verbeterd hebt, lever je deze opdracht in.***

OPLOSSINGEN

1 Op stap in de West-Vlaamse polders

1.1 Een wandeltocht in het West-Vlaamse polderlandschap

1.

Tijd in uur	Aantal km van An	Aantal km van Bart
0,5	2	3
1	4	5,7
1,5	6	8
2	8	10
2,5	10	11,7
3	12	13

2.
An stapt voortdurend op hetzelfde tempo door. Anders gezegd, ze stapt met een constante snelheid.
Bart stapt in het begin zeer snel, maar vertraagt voortdurend. Op het laatste is zijn snelheid zeer klein.

3.
An: 3,75 uur = 3 uur 45 minuten.
Bart: 4,5 uur = 4 uur 30 minuten.

4.
An komt als eerste aan. Ze heeft 45 minuten voorsprong op Bart.

1.2 Het verband tussen de afgelegde weg en de tijd

1.
De grafiek is een rechte door de oorsprong en die onder andere het koppel (1,4) bevat.
Het voorschrift is dus: $y = 4x$.
De afstand die An aflegt, in functie van de tijd, kan dus weergegeven worden door: $\boxed{f(t) = 4t}$.

2.

De grafiek is een parabool door de oorsprong. Het voorschrift is dus van de vorm: $y = ax^2 + bx$. Nu moet je nog op zoek gaan naar *a* en *b*.

Op de grafiek zoek je twee (gemakkelijke) koppels, bijvoorbeeld: (2,10) en (3,13).

Dat betekent: $4a + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 5$

$9a + 3b = 13$

Je gaat dus op zoek naar de oplossingen van het stelsel: $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 9a + 3b = 13 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 9a + 3b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a \\ 3b = 13 - 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a & (1) \\ b = \dfrac{13 - 9a}{3} & (2) \end{cases}$$

Als je (1) gelijkstelt aan (2), bekom je:

$5 - 2a = \dfrac{13 - 9a}{3} \Leftrightarrow \quad 15 - 6a = 13 - 9a \Leftrightarrow \quad 3a = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\dfrac{2}{3} \quad (3)$

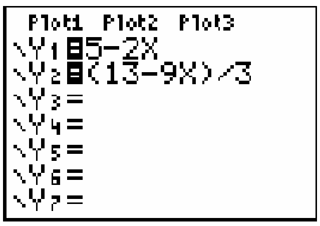
(3) in (1) levert: $b = 5 - 2.\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 5 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{15}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{19}{3}$.

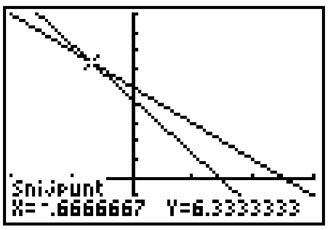
Het voorschrift van de parabool is dus: $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{19}{3}x$.

De afstand die Bart aflegt, in functie van de tijd, kan dus weergegeven worden door:

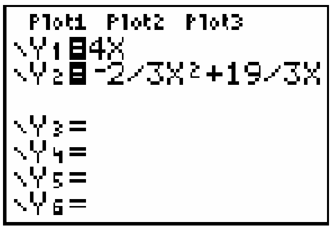
$\boxed{g(t) = -\dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{19}{3}t}$.

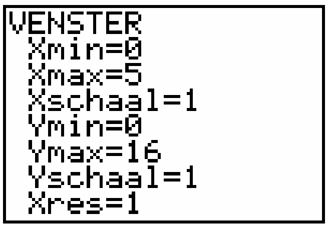
Merk op dat het stelsel $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 9a + 3b = 13 \end{cases}$ ook met het grafisch rekentoestel kon opgelost worden:

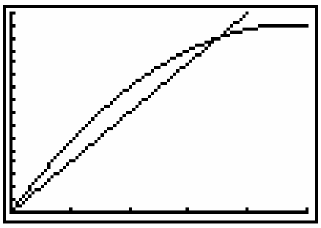




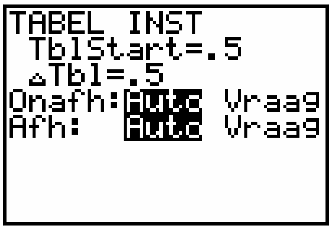
3.

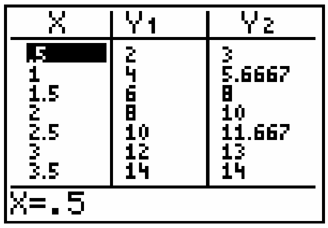






4.
Het functievoorschrift van An ken je aan Y1 toe en dat van Bart aan Y2. En dan vraag je een tabel op:



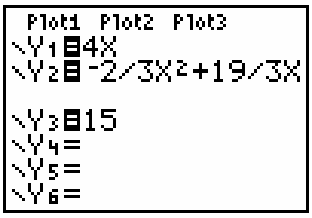


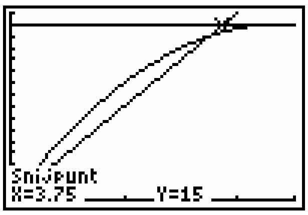
Bijgevolg:

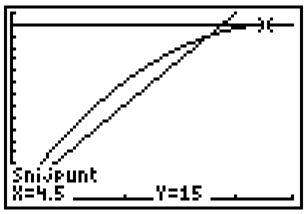
Tijd in uur	Aantal km van An	Aantal km van Bart
0,5	2	3
1	4	5,6667
1,5	6	8
2	8	10
2,5	10	11,667
3	12	13

5.
Op de grafieken van 1.1 lees je af dat An 15 km afgelegd heeft in 3,75 uur en Bart in 4,5 uur. Met andere woorden: het functievoorschrift voor An is van toepassing voor *t*-waarden gelegen tussen 0 en 3,75.
Voor Bart is het functievoorschrift van toepassing voor *t*-waarden gelegen tussen 0 en 4,5.

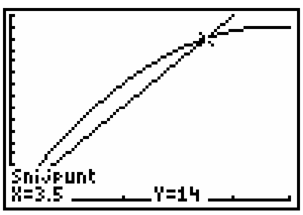
Maar misschien werd er een kleine afrondingsfout gemaakt bij het aflezen van de waarden op de grafiek. Met behulp van het grafisch rekentoestel kan er zekerheid bekomen worden: je zoekt de snijpunten met Y3 = 15:







6.
Je zoekt het snijpunt van de grafieken van An en Bart:



Vaststelling:
Op zeker moment wordt *Bart* ingehaald door *An*.
Dat gebeurt na *3* uur en *30* minuten.
Op dat moment hebben An en Bart *14* kilometer gewandeld.

Als je het grafisch rekentoestel niet gebruikt, dan moet je de volgende vergelijking oplossen:

$$4t = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{19}{3}t:$$

$$4t = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{19}{3}t \quad \Leftrightarrow \quad 12t = -2t^2 + 19t \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 7t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t.(2t-7) = 0.$$

Je vindt $t = 0$ of $t = \frac{7}{2} = 3{,}5$. Dit zijn inderdaad de *t*-waarden die overeenkomen met de snijpunten van beide grafieken. An en Bart zijn inderdaad op twee momenten samen: bij de start ($t = 0$) en bij het moment dat An Bart inhaalt ($t = 3{,}5$).

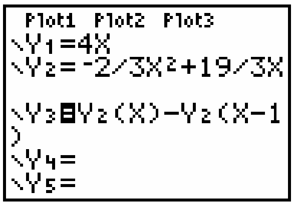
1.3 Hoe snel stappen An en Bart?

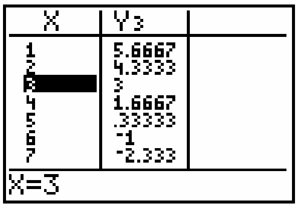
1.

Aantal uren stappen	**Toename afgelegde weg van An t.o.v. één uur vroeger**	**Toename afgelegde weg van Bart t.o.v. één uur vroeger**
1	4	5,667
2	4	4,333
3	4	3

De resultaten in de derde kolom zijn als volgt te vinden:
Y2(1) = 5,667
Y2(2) - Y2(1) = 10 - 5,667 = 4,333
Y2(3) – Y2(2) = 13 – 10 = 3

Deze resultaten kan je ook door het grafisch rekentoestel laten berekenen:

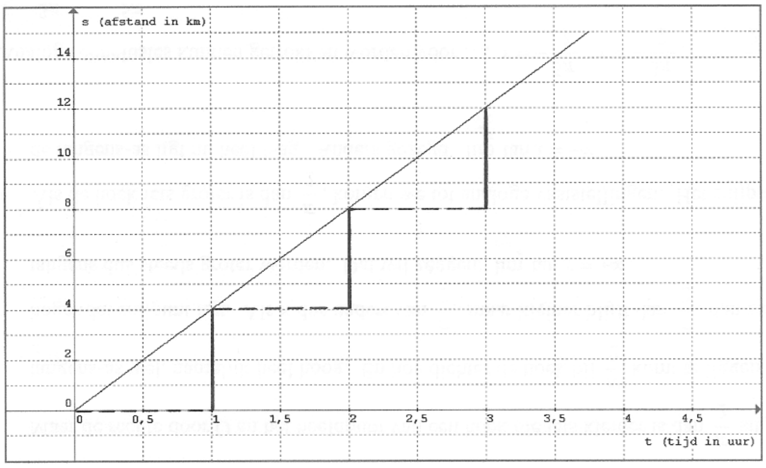




Zoals reeds in 1.1 vraag 2 opgemerkt werd, stel je hier ook vast dat An voortdurend tegen dezelfde snelheid verder stapt (namelijk 4 km per uur). De snelheid van Bart daarentegen daalt, naarmate hij langer stapt.

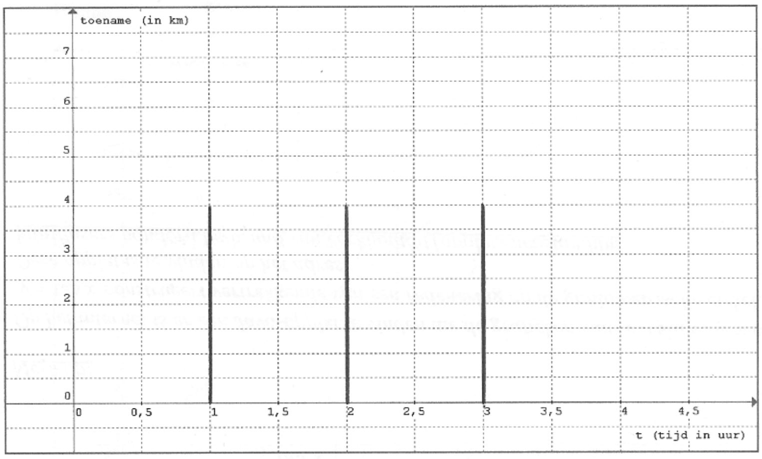
2.

AANDUIDEN VAN DE TOENAMES OP HET AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN AN



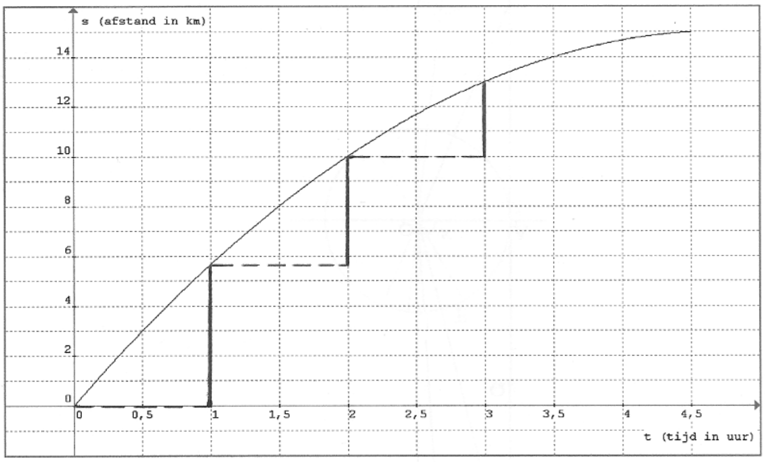
TOENAMEDIAGRAM VAN AN

(DRUKT HIER OOK DE GEMIDDELDE SNELHEDEN PER UUR UIT)

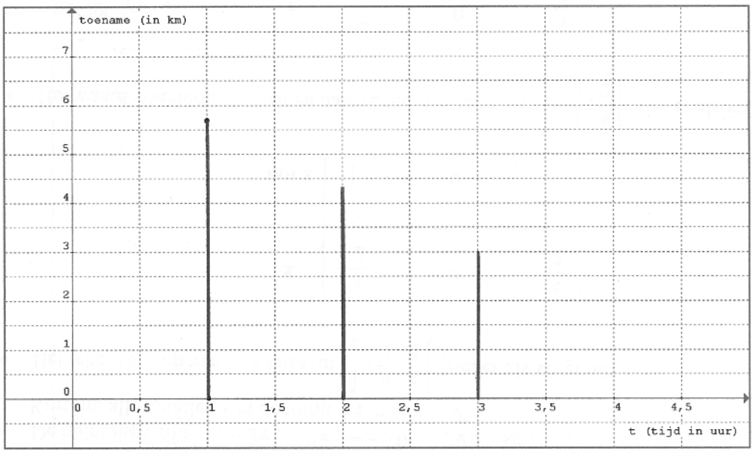


Zoals reeds vroeger opgemerkt is de gemiddelde snelheid van An elk uur dezelfde. An stapt heel regelmatig.

AANDUIDEN VAN DE TOENAMES OP HET AFSTAND-TIJDSDIAGRAM VAN BART



TOENAMEDIAGRAM VAN BART
(DRUKT HIER OOK DE GEMIDDELDE SNELHEDEN PER UUR UIT)



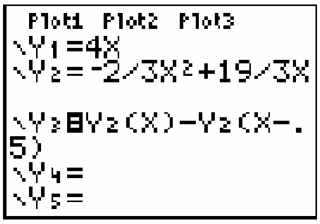
De gemiddelde snelheid per uur daalt, naarmate Bart langer stapt. Bart stapt dus steeds maar trager.

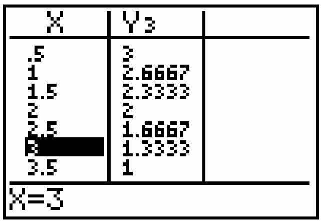
3.

Aantal uren stappen	Toename afgelegde weg van An t.o.v. één half uur vroeger	Toename afgelegde weg van Bart t.o.v. één half uur vroeger
0,5	2	3
1	2	2,667
1,5	2	2,333
2	2	2
2,5	2	1,667
3	2	1,333

De resultaten in de derde kolom zijn als volgt te vinden:
Y2(0,5) = 3
Y2(1) - Y2(0,5) = 5,667 – 3 = 2,667
Y2(1,5) – Y2(1) = 8 – 5,667= 2,333
Y2(2) - Y2(1,5) = 10 – 8 = 2
Y2(2,5) – Y2(2) = 11,667 – 10= 1,667
Y2(3) - Y2(2,5) = 13 – 11,667 = 1,333

Deze resultaten kan je ook door het grafisch rekentoestel laten berekenen:





4.

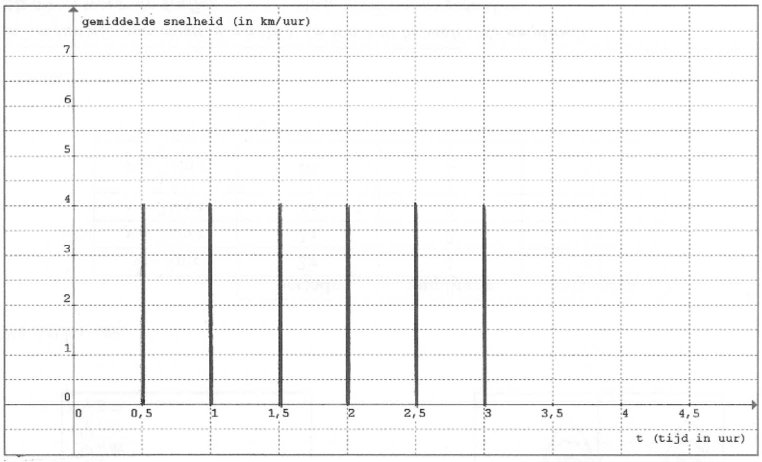
Aantal uren stappen	Gemiddelde snelheid van An tijdens het voorbije half uur	Gemiddelde snelheid van Bart tijdens het voorbije half uur
0,5	4	6
1	4	5,333
1,5	4	4,667
2	4	4
2,5	4	3,333
3	4	2,667

$$\textit{gemiddelde snelheid} = \frac{\textit{toename van de afgelegde weg}}{\textit{toename van de tijd}}$$

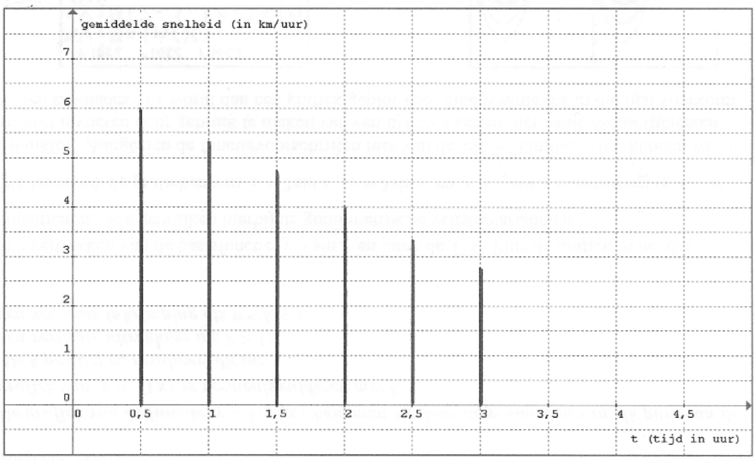
Aangezien de toename van de tijd hier telkens een half uur is, moeten de resultaten in de tweede en derde kolom van de tabel uit oefening 3 gedeeld worden door 0,5 (of dus vermenigvuldigd worden met 2).

5.

GEMIDDELDE SNELHEID VAN AN (OM HET HALF UUR GEMETEN)



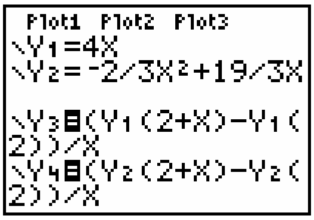
GEMIDDELDE SNELHEID VAN BART (OM HET HALF UUR GEMETEN)

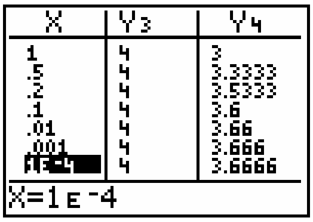


6.

	AN		BART	
$\boldsymbol{h}$	$\dfrac{\boldsymbol{f}(2+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(2)}{\boldsymbol{h}}$	**Gemiddelde snelheid tussen 2 en (2 + *h*) uur**	$\dfrac{\boldsymbol{g}(2+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{g}(2)}{\boldsymbol{h}}$	**Gemiddelde snelheid tussen 2 en (2 + *h*) uur**
1	$\dfrac{f(3)-f(2)}{1}$	4	$\dfrac{g(3)-g(2)}{1}$	3
0,5	$\dfrac{f(2{,}5)-f(2)}{0{,}5}$	4	$\dfrac{g(2{,}5)-g(2)}{0{,}5}$	3,3333
0,2	$\dfrac{f(2{,}2)-f(2)}{0{,}2}$	4	$\dfrac{g(2{,}2)-g(2)}{0{,}2}$	3,5333
0,1	$\dfrac{f(2{,}1)-f(2)}{0{,}1}$	4	$\dfrac{g(2{,}1)-g(2)}{0{,}1}$	3,6
0,01	$\dfrac{f(2{,}01)-f(2)}{0{,}01}$	4	$\dfrac{g(2{,}01)-g(2)}{0{,}01}$	3,66
0,001	$\dfrac{f(2{,}001)-f(2)}{0{,}001}$	4	$\dfrac{g(2{,}001)-g(2)}{0{,}001}$	3,666
0,0001	$\dfrac{f(2{,}0001)-f(2)}{0{,}0001}$	4	$\dfrac{g(2{,}0001)-g(2)}{0{,}0001}$	3,6666

De rechterkolommen zijn als volgt op een vlotte manier met het grafisch rekentoestel te bekomen:



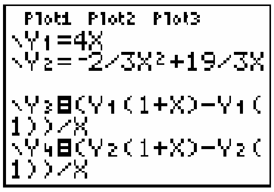


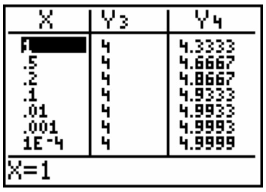
De functienamen Y1, Y2, …, Y0 kan je bekomen via **VARS, Y-VARS, 1: Functie**. Dan kies je de gewenste functienaam en druk je op ENTER.

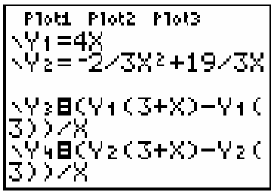
Als je in het scherm van de tabelinstelling (via **2nd TBLSET**) kiest op de lijn **Onafh:** voor de optie **Vraag**, dan verkrijg je (via **2nd TABLE**) een lege tabel. Maar wanneer je dan een waarde invoert in de kolom X, zullen de beeldwaarden automatisch berekend en weergegeven worden.

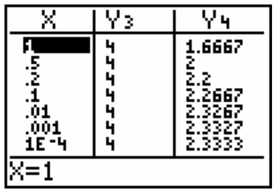
7.
Voor An bedraagt die snelheid 4 km/uur. Dit resultaat is logisch; er werd immers al vastgesteld dat An de hele weg wandelt tegen een constante snelheid van 4 km/uur.
Na twee uur stappen zal de ogenblikkelijke snelheid van Bart ongeveer 3,6666 km/uur bedragen.

8.









a) Na 1 uur stappen wandelt An aan 4 km/uur en Bart ongeveer aan 5 km/uur.
b) Na 3 uur stappen wandelt An aan 4 km/uur en Bart ongeveer aan 2,3333 km/uur.

9.

- An: $f'(t) = D(4t) = 4$

  Zoals je al wist, is de snelheid van An inderdaad constant, namelijk: 4 km/uur.

- Bart: $g'(t) = D\left(-\frac{2}{3}t^2 + \frac{19}{3}t\right) = -\frac{4}{3}t + \frac{19}{3}$

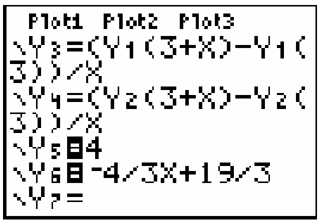
  - snelheid na 1 uur stappen: $-\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = \frac{15}{3} = 5$, dus 5 km/uur;
  - snelheid na 2 uur stappen: $-\frac{8}{3} + \frac{19}{3} = \frac{11}{3} = 3{,}666666667$, dus 3,667 km/uur;
  - snelheid na 3 uur stappen: $-\frac{12}{3} + \frac{19}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}333333333$, dus 2,333 km/uur.

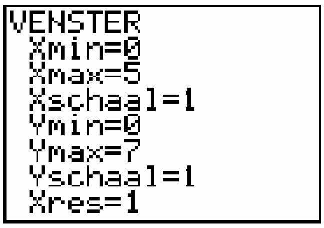
10.

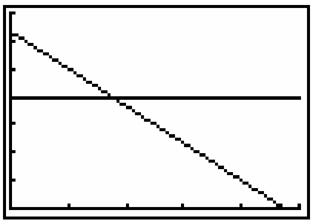
An stapt uiteraard met een snelheid van 4 km/uur over de eindmeet.

Bart 'strompelt' over de eindmeet aan een snelheid van 0,333 km/uur, want $-\frac{4}{3}.4{,}5 + \frac{19}{3} = -\frac{18}{3} + \frac{19}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}3333333333$.

11.







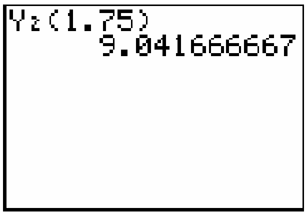
Als je de bovenste punten van de staafjes in de toenamediagrammen van An met elkaar verbindt, bekom je de snelheidsgrafiek van An. Ze wandelt immers tegen een constante snelheid van 4 km/uur. Een gemiddelde snelheid over een bepaald tijdsinterval is dan immers steeds gelijk aan de ogenblikkelijke snelheid.
Als je de bovenste punten van de staafjes in de toenamediagrammen van Bart met elkaar verbindt, bekom je slechts benaderingen van de snelheidsgrafiek van Bart aangezien hij niet tegen een constante snelheid wandelt. Hoe kleiner het tijdsinterval waarop gemiddelde snelheden worden berekend, hoe beter het toenamediagram de snelheidsgrafiek benadert.

12.
Je moet de waarde van *t* zoeken zodat $g'(t)=4$:

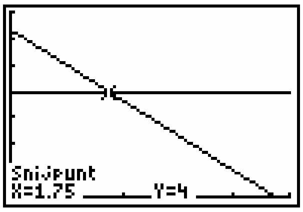
$$-\frac{4}{3}t+\frac{19}{3}=4 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{4}{3}t=4-\frac{19}{3} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{4}{3}t=-\frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad -4t=-7 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{7}{4}=1{,}75\,.$$

Bart stapte dus even snel als An na 1 uur 45 minuten.

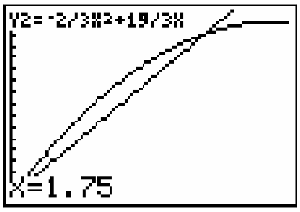
Op dat moment heeft Bart $g(1{,}75)$ kilometer gestapt, dit is dus iets meer dan 9 kilometer.

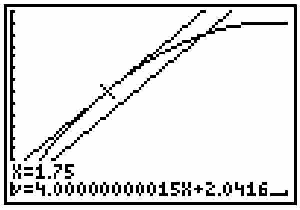


Je vindt uiteraard dezelfde *t*-waarde als je het snijpunt van de snelheidsgrafieken van An en Bart zoekt:



13.
Het construeren van de raaklijn gebeurt via **2nd DRAW, TEK, 5: Raaklijn**, gevolgd door het selecteren van functie Y2, het invoeren van de waarde 1,75 en een druk op de ENTER-toets:





Vaststelling: die raaklijn loopt evenwijdig met de grafiek van An.

Verklaring: An stapt met een constante snelheid van 4 km/uur. Het afstand-tijdsdiagram van An is bijgevolg een rechte met richtingscoëfficiënt 4. Wanneer Bart ook aan 4 km/uur stapt, dan is de afgeleide op dat moment gelijk aan 4 of dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 4. Die raaklijn en de grafiek van An lopen bijgevolg evenwijdig.

2 Een lekkende tankwagen

2.1 *Ongeval op de Ieperse noorderring*

2.2 *Exponentieel verband tussen de tijd en het volume*

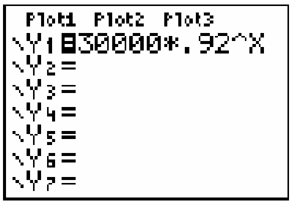
2.2.1 Manueel opsporen van het verband

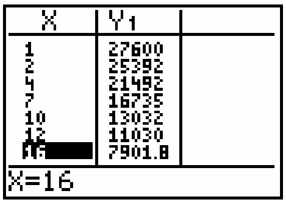
1.

Je zoekt eerst de groeifactor: $27600 = 30000.a \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{27600}{30000} = 0{,}92$.

Het verband tussen *t* en *V* kan je dus als volgt uitdrukken: $\boxed{V = 30000\,.\,0{,}92^t}$.

2.
Met behulp van het grafisch rekentoestel kan gecontroleerd worden of de gegevens uit de tabel (min of meer) kloppen.

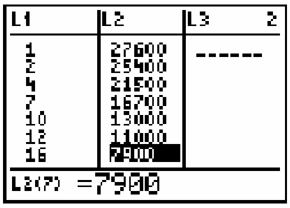




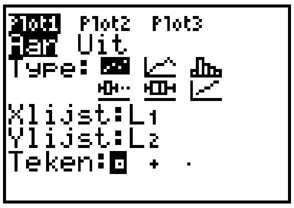
Het resultaat is zeer bevredigend.

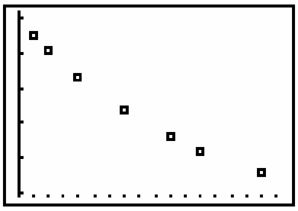
2.2.2 Opsporen van het verband met het grafisch rekentoestel

1.

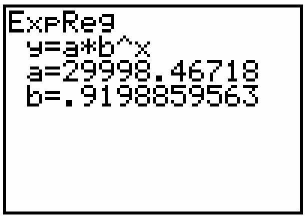


2.





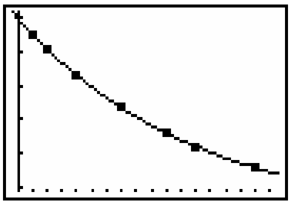
3.



Volgens de rekenmachine beantwoorden de gegevens uit de tabel het best aan het volgende exponentiële verband: $V = 29998{,}46718 . 0{,}9198859563^t$.

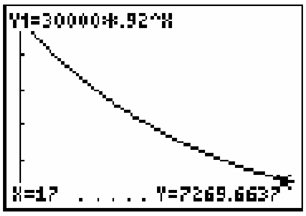
Dat antwoord komt overeen met de vergelijking $V = 30000 . 0{,}92^t$ die in 2.2.1 vraag 1 werd gevonden.

4.



2.3 De brandweer komt ter plaatse

1.



Bijvoorbeeld via TRACE kan je vaststellen dat er na 17 minuten nog ongeveer 7270 liter olie in de tank aanwezig is.
$30000 - 7270 = 22730$, bijgevolg is er al 22730 liter olie op het wegdek gevloeid.

2.

a) $30000 . 0{,}92^t = 15000$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}92^t = \dfrac{15000}{30000}$

$\Leftrightarrow \quad \log\left(0{,}92^t\right) = \log(0{,}5)$

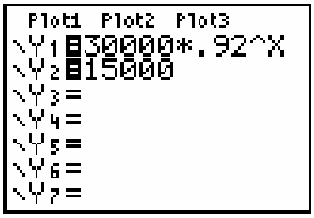
$\Leftrightarrow \quad t . \log(0{,}92) = \log(0{,}5)$

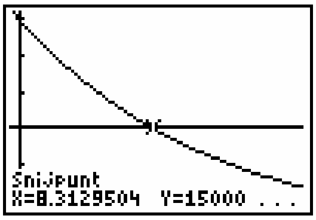
$\Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}92)}$

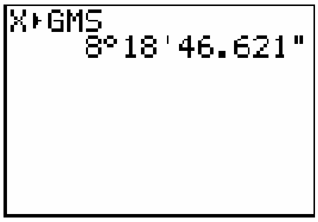
$\Leftrightarrow \quad t = 8{,}312950414$

De tank is dus half leeg na ongeveer 8,3 minuten (dit is 8 minuten 18 seconden).

b) Je zoekt het snijpunt van Y1 met Y2 = 15000:

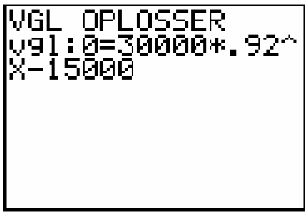


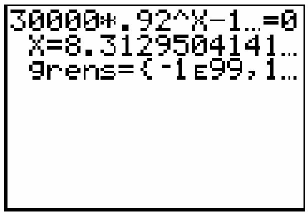




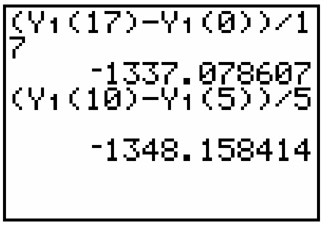
De tank is half leeg na 8 minuten en 19 seconden!

c) Je kan het antwoord op deze vraag ook vinden via **MATH, 0: Oplosser**:





3.



De functienamen Y1, Y2, …, Y0 kan je bekomen via ***VARS, Y-VARS, 1: Functie****. Dan kies je de gewenste functienaam en druk je op ENTER.*

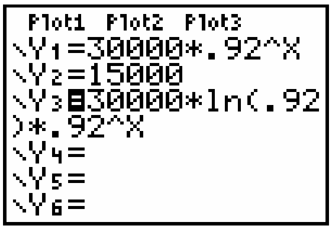
De gemiddelde uitstroomsnelheid tussen het tijdstip van het ongeval en het dichten van het lek, is 1337 liter per minuut.
Tussen de vijfde en de tiende minuut is die gemiddelde uitstroomsnelheid gelijk aan 1348 liter per minuut.

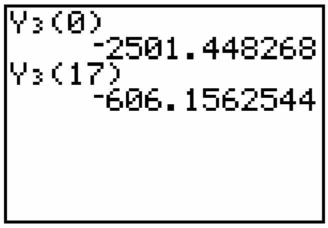
De bekomen resultaten zijn negatief omdat de inhoud van de tank 'vermindert'!

4.
Je berekent eerst de afgeleide V'.

$$V'(t) = D\left(30000.0{,}92^t\right) = 30000.\ln 0{,}92.0{,}92^t \ .$$

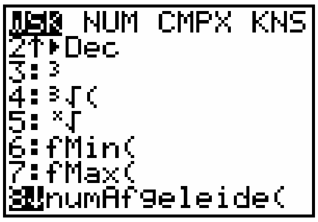
Je zet deze afgeleide functie in het grafisch rekentoestel en berekent het beeld van 0 en van 17:

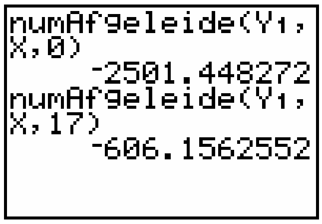




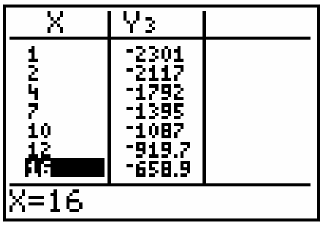
Net na het ongeval was de uitstroomsnelheid gelijk aan 2501 liter per minuut.
Op het moment van het dichten van het lek was die uitstroomsnelheid 606 liter per minuut.

Je kan ook $V'(0)$ en $V'(17)$ door het rekentoestel laten berekenen zonder het voorschrift van de afgeleide functie in te voeren.
Dat kan bijvoorbeeld gebeuren via **MATH, 8: numAfgeleide**.





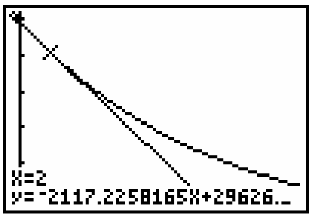
5.
Je werkt het best met een tabel waarbij de optie **Vraag** is aangeduid.

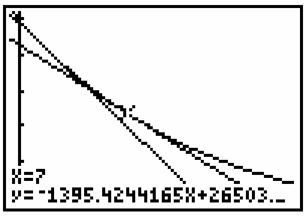


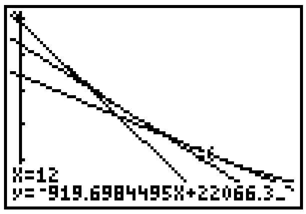
X	Y3	
1	-2301	
2	-2117	
4	-1792	
7	-1395	
10	-1087	
12	-919.7	
16	-658.9	

X=16

6.
De uitstroomsnelheden worden in absolute waarde steeds kleiner. Dat betekent dat het tempo waarmee de olie uit de tank lekt, steeds afneemt.
Op de grafiek van Y1 ($V = 30000\,.\,0{,}92^t$) is dit zeer goed te merken: de grafiek wordt steeds minder steil. Of nog anders uitgedrukt: de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de grafiek worden steeds kleiner in absolute waarde.







7.

$$\frac{-2501{,}448268}{2} = -1250{,}724134 .$$

Je moet dus de tijd t zoeken die beantwoordt aan: $V'(t) = -1250{,}724134$.

a) $30000 . \ln 0{,}92 . 0{,}92^t = -1250{,}724134$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}92^t = \frac{-1250{,}724134}{30000 . \ln 0{,}92}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}92^t = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(0{,}92^t\right) = \log(0{,}5)$$

$$\Leftrightarrow \quad t . \log(0{,}92) = \log(0{,}5)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}92)}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 8{,}312950414$$

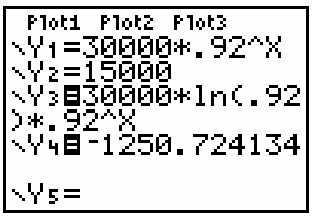
De uitstroomsnelheid is gehalveerd na ongeveer 8,3 minuten (dit is 8 minuten 18 seconden).

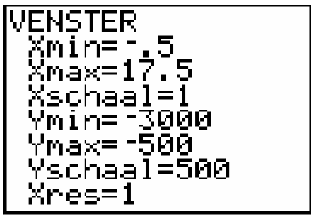
Je vindt dezelfde t-waarde als in 2.3 vraag 2. Dit is een gevolg van het feit dat de afgeleide van een exponentiële functie een veelvoud is van die exponentiële functie.

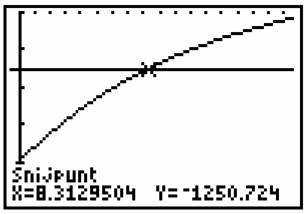
Hier is $V'(t) = V(t) . \ln 0{,}92$. Als t_1 dus voldoet aan: $V(t_1) = \dfrac{V(0)}{2}$, dan geldt:

$V(t_1) . \ln 0{,}92 = \dfrac{V(0) . \ln 0{,}92}{2}$ en bijgevolg: $V'(t_1) = \dfrac{V'(0)}{2}$.

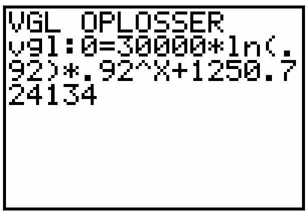
b) Je zoekt het snijpunt van de afgeleide functie met Y4 = -1250,724134.
De venstervariabelen zullen wel eerst moeten aangepast worden:

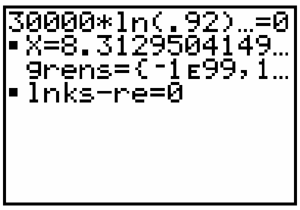






c)





2.4 Logaritmisch verband tussen het volume en de tijd

1.

$V = 30000 \, . \, 0{,}92^{t}$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}92^{t} = \dfrac{V}{30000}$

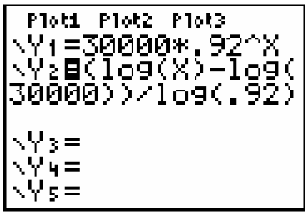
$\Leftrightarrow \quad \log\left(0{,}92^{t}\right) = \log\left(\dfrac{V}{30000}\right)$

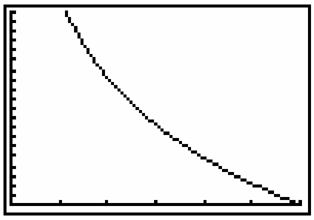
$\Leftrightarrow \quad t \, . \log 0{,}92 = \log\left(\dfrac{V}{30000}\right)$

$\Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\log\left(\dfrac{V}{30000}\right)}{\log 0{,}92}$

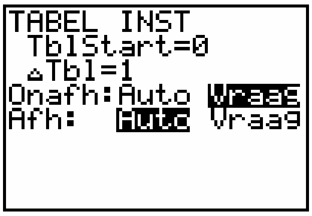
$\Leftrightarrow \quad \boxed{t = \dfrac{\log V - \log 30000}{\log 0{,}92}}$

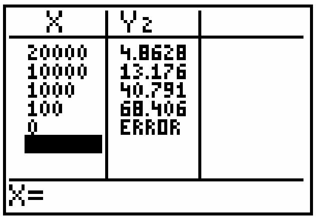
2.

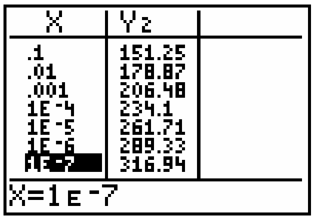




3.



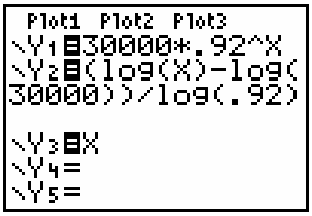


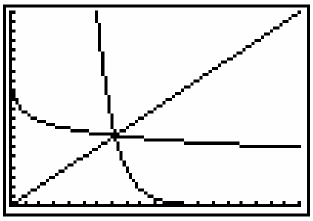


a) Er zit nog 20000 liter in de tank na bijna 5 minuten.
b) En 10000 liter na iets meer dan 13 minuten.
c) Nog 1000 liter na bijna 41 minuten.
d) Nog 100 liter na iets meer dan 68 minuten.
e) In principe zal de tank nooit helemaal leeg geraken (er zullen wel nog altijd oliedruppels in die tank blijven). De *y*-as (eigenlijk moet er hier van de *t*-as gesproken worden) is verticale asymptoot. Hoe dichter *V* bij 0 komt te liggen, hoe groter de waarde voor *t*.

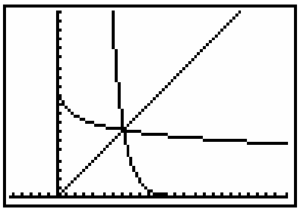
4.
De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice.

Het grafisch rekentoestel zal dat verband bevestigen. Maar om dat verband goed te kunnen illustreren, moet je geschikte venstervariabelen gebruiken!
Je mag Xmax en Ymax zeker niet gelijkstellen aan 30000 (de maximale tankinhoud), want dan zal je niet veel te zien krijgen van de grafieken aangezien de tijd maar varieert van 0 tot 17 minuten.





Om het verband heel duidelijk te zien, werk je best in een orthonormaal assenstelsel. Om dat hier te bekomen, vertrek je van de huidige vensterinstelling en druk je op **ZOOM, ZOOM, 5: ZVierkant** gevolgd door ENTER:



3 De slingerproef van Huyghens

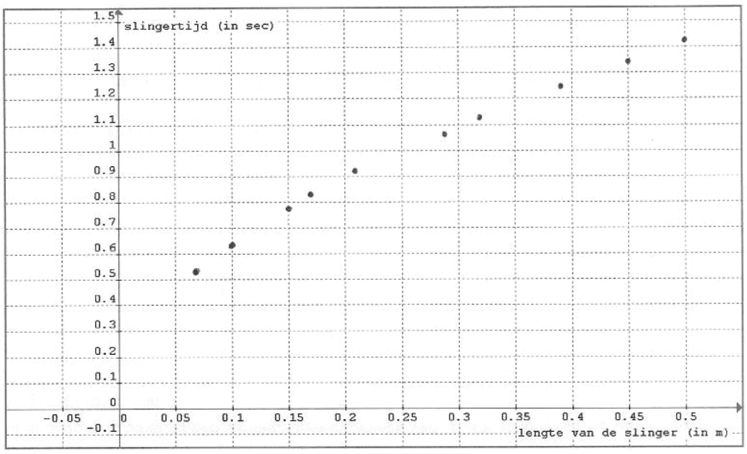
3.1 Christiaan Huyghens

1.
Enkele interessante websites zijn:
http://www.kuleuven.ac.be/bwf/onderwijs/basis/huyghensc.htm
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Huygens.html
http://webphysics.ph.msstate.edu/javamirror/ipmj/java/pend1/index.html

3.2 De lengte van een slinger en zijn slingertijd

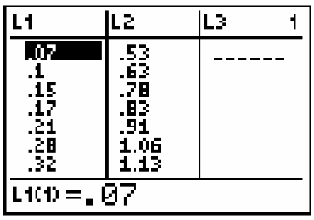
3.3 Het spreidingsdiagram

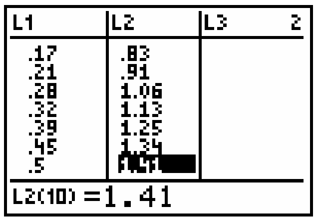
3.3.1 Manueel



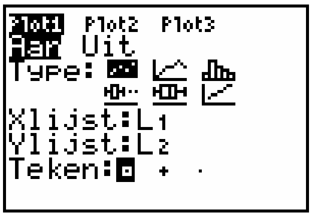
3.3.2 Met het grafisch rekentoestel

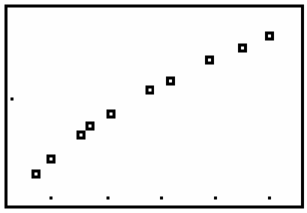
1.





2.

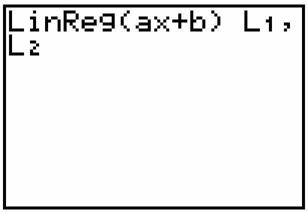


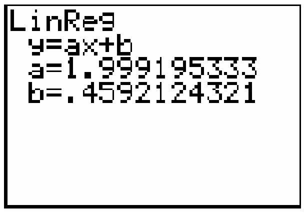


3.4 *De regressielijn*

3.4.1 Op zoek naar de vergelijking

1.

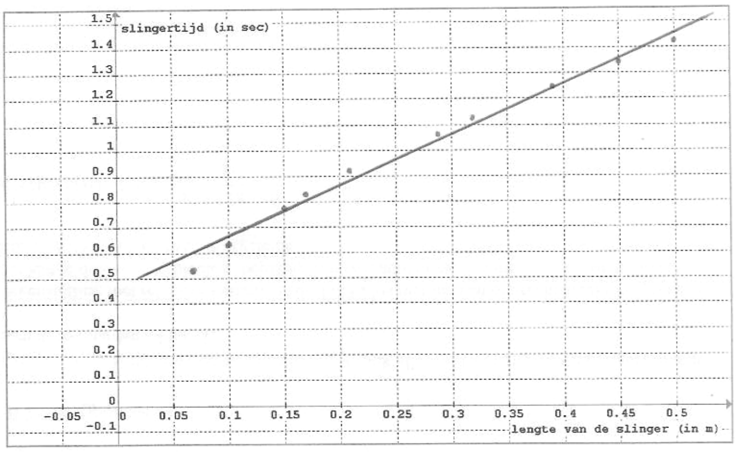




Blijkbaar is de rechte met vergelijking $y = 1{,}999195333x + 0{,}4592124321$ de regressielijn.

2.
Het lineaire verband tussen *l* en *t* is: $t = 1{,}999195333l + 0{,}4592124321$.

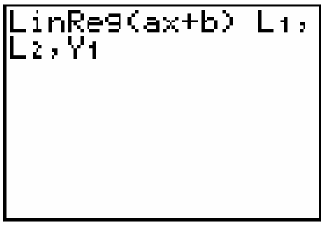
3.
Je zoekt eerst twee koppels van de regressielijn. Als je bijvoorbeeld *l* vervangt door 0,1 vind je *t* = 0,6591319654. Vervang je *l* door 0,5, dan is *t* = 1,458810099 .

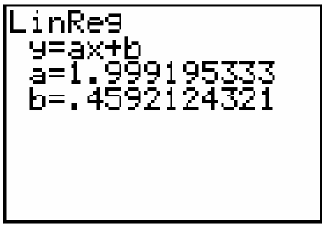


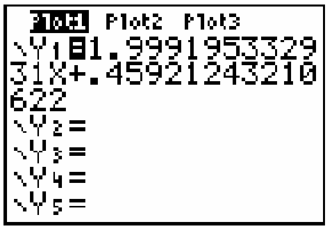
4.
Het spreidingsdiagram wordt vrij goed door de regressielijn benaderd.

3.4.2 De regressielijn laten plotten door het grafisch rekentoestel

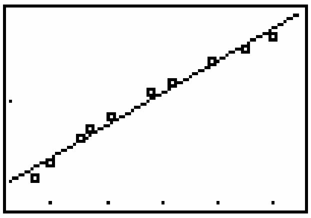
1.







2.

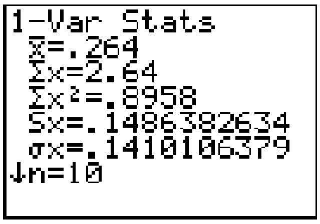


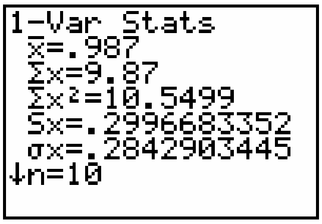
3.5 De correlatiecoëfficiënt

3.5.1 Definitie

3.5.2 Berekening van de correlatiecoëfficiënt

1.



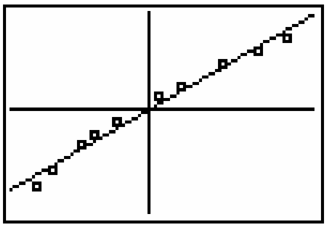


$\overline{x}$ (de gemiddelde lengte van de slingers) is 0,264 meter.
$\overline{y}$ (de gemiddelde slingertijd) is 0,987 seconden.

2.

De correlatiecoëfficiënt is dus gelijk aan: $$r = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left[(x_i - 0{,}264).(y_i - 0{,}987)\right]}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0{,}264)^2\right).\left(\sum_{i=1}^{10}(y_i - 0{,}987)^2\right)}}.$$

3.
De rechten $x = 0{,}264$ en $y = 0{,}987$ samen met het spreidingsdiagram en de regressielijn:

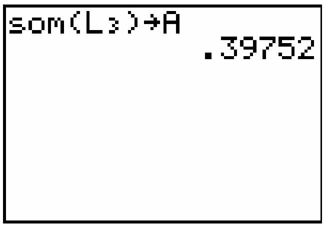


4.
De regressielijn bevat het zwaartepunt $(\overline{x}, \overline{y})$ van het spreidingsdiagram.

5.
Als je het vlak in vier kwadranten verdeelt volgens de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$, dan situeren de punten van het spreidingsdiagram zich in het eerste en derde kwadrant.

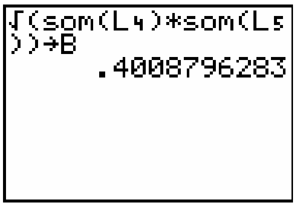
6.
De correlatiecoëfficiënt zal hier positief zijn.
De meeste afwijkingen $x_i - \overline{x}$ en $y_i - \overline{y}$ zullen hier hetzelfde teken hebben (voor de punten in het eerste kwadrant zijn die afwijkingen positief en voor de punten in het derde kwadrant zijn ze negatief). De producten van de vorm $(x_i - \overline{x}).(y_i - \overline{y})$ zijn hier dus positief. De som van deze termen (de teller in de formule voor de correlatiecoëfficiënt dus) zal hier bijgevolg positief zijn.
Aangezien de noemer in de formule voor de correlatiecoëfficiënt een vierkantswortel is, zal deze ook positief zijn.
De correlatiecoëfficiënt zal hier dus positief zijn.

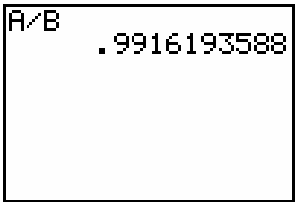
7.
Je maakt de lijst L3 aan: $\text{L3} = (\text{L1} - 0{,}264).(\text{L2} - 0{,}987)$ en je zoekt de som van de getallen die in L3 voorkomen. Deze som is dan gelijk aan de teller in de formule voor de correlatiecoëfficiënt.



Die som is gelijk aan 0,39752 (is hier toegekend aan de variabele A).

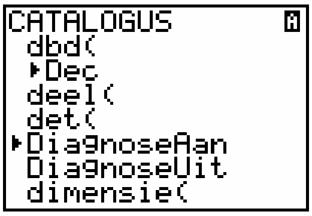
Je maakt nu de lijsten $\text{L4} = (\text{L1} - 0{,}264)^2$ en $\text{L5} = (\text{L2} - 0{,}987)^2$.
Op analoge manier ga je op zoek naar de noemer van de correlatiecoëfficiënt. Die noemer kan dan toegekend worden aan de variabele B:

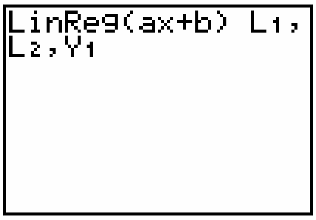


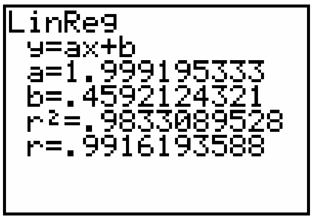


De correlatiecoëfficiënt is hier bijgevolg gelijk aan $\dfrac{0{,}36752}{0{,}4008796283} = 0{,}9916193588$.

8.







3.5.3 Verantwoording van de formule

1.
In dergelijk geval vertonen de punten van het spreidingsdiagram de tendens dat grote x_i-waarden overeenkomen met grote y_i-waarden en dat kleine x_i-waarden overeenkomen met kleine y_i-waarden. Als je het vlak in vier kwadranten verdeelt volgens de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$, dan liggen de meeste punten van het spreidingsdiagram in het eerste en het derde kwadrant. De meeste afwijkingen $x_i - \overline{x}$ en $y_i - \overline{y}$ hebben dan hetzelfde teken en de meeste producten $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ zijn dus positief. De som van deze producten is dus groot en positief. Aangezien de correlatiecoëfficiënt nooit groter kan zijn dan 1, moet die hier dan dicht bij 1 liggen (in ons voorbeeld is dit het geval).

2.
Als de punten van het spreidingsdiagram de tendens vertonen dat kleine x_i-waarden overeenkomen met grote y_i-waarden en omgekeerd, dan wordt er gesproken van een sterke negatieve lineaire correlatie. In dergelijk geval is de regressielijn dalend. Als je het vlak in vier kwadranten verdeelt volgens de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$, dan liggen de meeste punten van het spreidingsdiagram in het tweede en het vierde kwadrant. De meeste afwijkingen $x_i - \overline{x}$ en $y_i - \overline{y}$ hebben dan een verschillend teken en de meeste producten $(x_i - \overline{x}).(y_i - \overline{y})$ zijn dus negatief. De som van deze producten is dus negatief en groot in absolute waarde. Bijgevolg ligt de correlatiecoëffciënt dicht bij -1.

3.
Als de punten van het spreidingsdiagram geen bepaalde tendens vertonen, dan spreekt men van een zwakke lineaire correlatie. Als je het vlak in vier kwadranten verdeelt volgens de rechten $x = \overline{x}$ en $y = \overline{y}$, dan liggen de meeste punten gelijkmatig over de vier kwadranten rond het zwaartepunt verspreid. Heel wat afwijkingen $x_i - \overline{x}$ en $y_i - \overline{y}$ hebben dan hetzelfde teken, maar er zijn ook heel wat van die afwijkingen die een verschillend teken hebben. In de som van de producten $(x_i - \overline{x}).(y_i - \overline{y})$ zijn er dus heel wat positieve en negatieve termen die elkaar opheffen. De som van deze producten is dus in absolute waarde niet al te groot. Bijgevolg ligt de correlatiecoëfficiënt ver van 1 of -1.

3.6 Een beter verband tussen de slingerlengte en de slingertijd

3.6.1 De formule van Huyghens

1.
Volgens de formule zou een slinger van lengte 0 een slingertijd van 0,45921243210 seconden hebben, wat uiteraard niet kan.

2.
Nu is het beeld van 0 gelijk aan 0. Dit is logisch: een slinger met lengte 0 heeft geen slingertijd!

3.

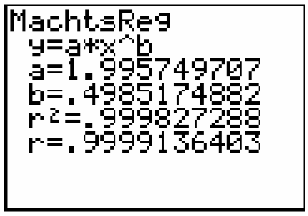
3.6.2 Op zoek naar een "machtsverband" met het grafisch rekentoestel

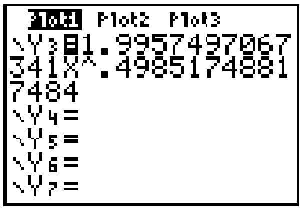
1.

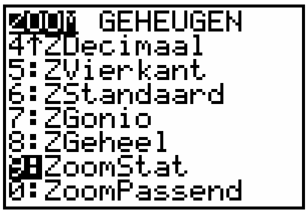
$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}}.\sqrt{l} \quad \Leftrightarrow \quad t = 2{,}006066681\,.\sqrt{l}\ .$$

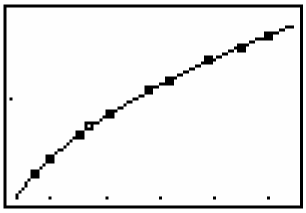
$t = 2\,.\sqrt{l}$ of $t = 2\,.\,l^{\frac{1}{2}}$ is dus een vrij secure benadering van deze formule.

2.





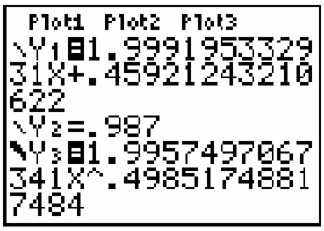


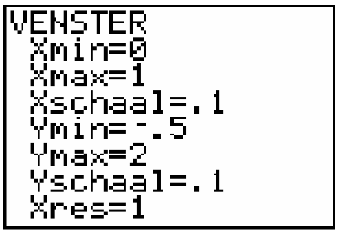


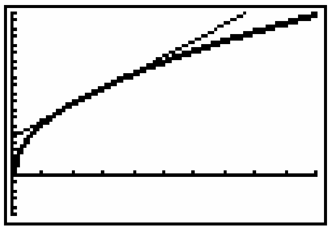
De TI83 Plus geeft aan dat $t = 1{,}995749707\,.\,l^{0{,}4985174882}$ (wat ongeveer hetzelfde is als $t = 2\,.\,l^{\frac{1}{2}}$) de beste benadering is van het spreidingsdiagram. Dat is ook duidelijk te zien op de grafiek. Het rekentoestel bevestigt dus de formule van Huyghens.

3.7 Voorspellingen

1.

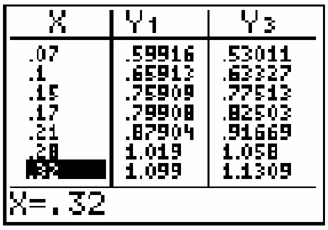


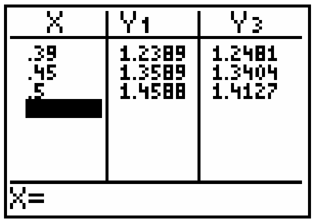




De grafieken vallen min of meer samen voor slingerlengten tussen 0,1 m en 0,4 meter. Maar je stelt duidelijk een afwijking vast voor lengtes die kleiner zijn dan 0,1 meter en groter dan 0,4 meter.

2.

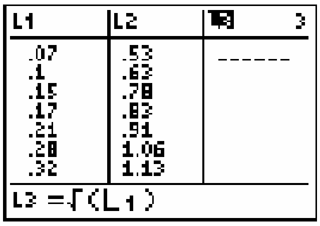


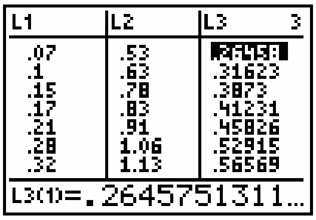


Je stelt vast dat de formule $t = 2.\sqrt{l}$ een (nog) betere benadering is dan het lineaire verband. De beeldwaarden van Y3 komen immers zeer sterk overeen met de oorspronkelijke gegevens.

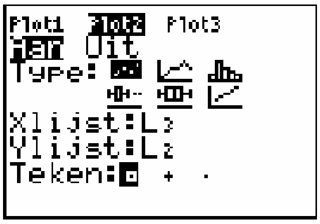
3.8 Betekenis van de correlatiecoëfficiënt bij een machtsverband

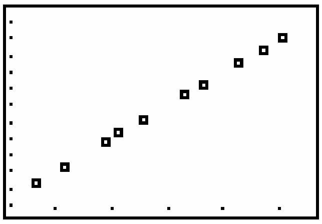
1.



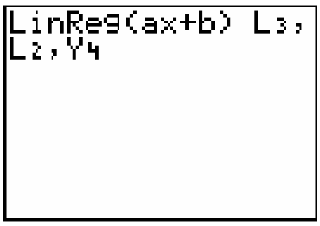


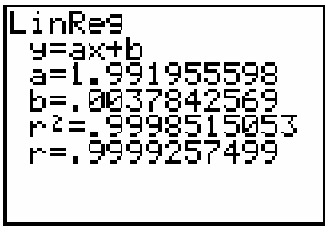
2.





3 en 4.



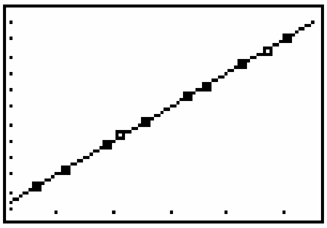


De vergelijking van de regressielijn is: $y = 1{,}991955598x + 0{,}0037842569$ wat gerust mag vereenvoudigd worden tot: $y = 2x$.

Hier is $x = \sqrt{l}$ en $y = t$. Bijgevolg geldt dat $t = 2.\sqrt{l}$, wat overeenkomt met de formule van Huyghens!

De correlatiecoëfficiënt is hier 0,9999257499 en ook deze waarde komt, op een kleine afronding na, overeen met de correlatiecoëfficiënt gevonden in 3.6.2 vraag 2.

5.



3.9 De onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke

1.

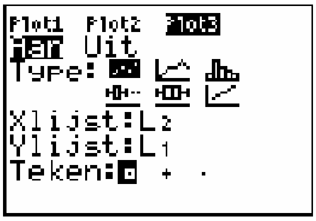
$t = 1{,}999195333\,l + 0{,}4592124321$

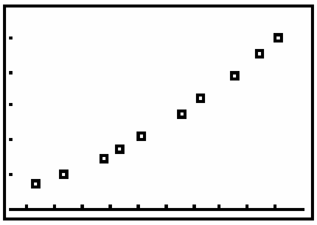
$\Leftrightarrow \quad 1{,}999195333\,l = t - 0{,}4592124321$

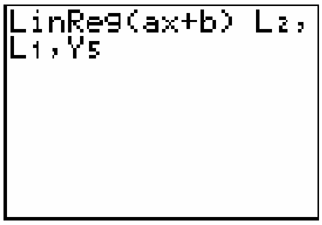
$\Leftrightarrow \quad l = \dfrac{1}{1{,}999195333}t - \dfrac{0{,}4592124321}{1{,}999195333}$

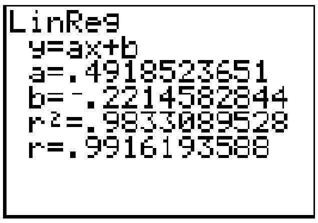
$\Leftrightarrow \quad l = 0{,}5002012477\,t - 0{,}2296986315$

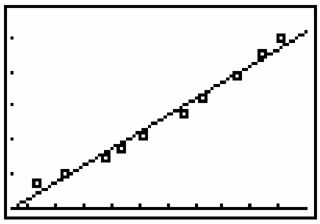
2.









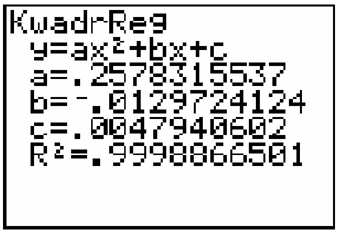


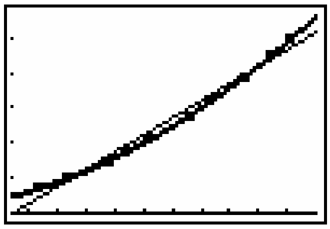
De gevonden vergelijking van de regressielijn komt, op een kleine afronding na, overeen met de vergelijking gevonden in punt 1.

3.

$t = 2.\sqrt{l} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 4l \quad \Leftrightarrow \quad l = 0{,}25\,t^2$

4.
Het verband tussen *t* en *l* (met *t* als onafhankelijke veranderlijke) is duidelijk een kwadratisch verband.





Je vindt hier dat $a = 0{,}2578315537 \approx 0{,}25$, $b = -0{,}0129724124 \approx 0$ en $c = 0{,}0047940602 \approx 0$.

Dat betekent dat $l = 0{,}25\,t^2$ overeenkomt met wat in punt 3 werd gevonden!

<u>Nog enkele opmerkingen</u>

- *Wellicht is punt 3.5.3 (verantwoording van de formule van de correlatiecoëfficiënt) enkel bestemd voor de wiskundig sterkere leerlingen. Voor de andere leerlingen kan de verantwoording van die formule via een 'klassieke' les aangebracht worden.*

- *Voor meer onderlegde leerlingen kan de formule van de correlatiecoëfficiënt uiteraard ook bewezen worden en er kan ook aangetoond worden dat een correlatiecoëfficiënt nooit groter wordt dan 1 en nooit kleiner dan -1.*

- *De berekening van de coëfficiënten van de regressielijn gebeurt aan de hand van de methode van de kleinste kwadraten. Voor de leerlingen is het belangrijk de idee achter de methode te vatten, niet zo zeer hoe men tot die formules komt. Dit neemt niet weg dat bij leerlingen die meer onderlegd zijn in wiskunde, de berekeningswijze kan afgeleid worden. Die leerlingen kunnen dan ook gemakkelijk verklaren dat de regressielijn het koppel* $(\overline{x},\overline{y})$ *bevat.*

Vanaf het schooljaar 2004-2005 worden de nieuwe leerplannen wiskunde voor de derde graad secundair onderwijs progressief ingevoerd. In deze cahier worden enkele leerstofonderdelen uit die nieuwe leerplannen van naderbij bekeken. Hierbij wordt ook de meerwaarde van de grafische rekenmachine TI-83 (84) Plus geïllustreerd. De behandelde voorbeelden kaderen tevens in het begeleid zelfstandig leren en werken en zijn opgemaakt op het niveau van de leerlingen, m.a.w. onmiddellijk bruikbaar voor de lespraktijk.

De volgende onderwerpen komen aan bod:

Grafieken interpreteren – functies en hun veranderingen
Dit onderwerp komt in alle leerplannen voor, zowel in ASO, TSO als KSO. Het voorbeeld dat behandeld wordt, kan al grotendeels gebruikt worden in de TSO- en KSO-richtingen met twee wekelijkse lestijden wiskunde.

Exponentiële en logaritmische functies
Dit onderwerp heeft ten opzichte van de vroegere leerplannen duidelijk een opwaarding gekregen en mag dus niet aan de aandacht ontsnappen. Het komt vrijwel in alle leerplannen met minstens drie wekelijkse lestijden wiskunde voor.

Lineaire regressie en correlatie
Dit onderwerp komt in alle ASO-leerplannen en in alle TSO- en KSO-leerplannen met minstens 4 wekelijkse lestijden, als keuze-onderwerp voor. In de richting Industriële Wetenschappen (met 6 + 2 lestijden) komt het als verplicht leerstofonderdeel voor.

GEERT DELALEEUW is pedagogisch vakbegeleider wiskunde in West-Vlaanderen en leraar wiskunde, derde graad, aan het Technisch Instituut Heilige Familie te Ieper.

TEXAS INSTRUMENTS