Använda rekursion och derivata för att lösa ekvationer

I denna aktivitet så visar vi hur man kan lösa ekvationer med *rekursiva* metoder med och utan derivata. Långt innan grafräknare och avancerade datorprogram i matematik fanns inom gymnasieskolan så var man ju tvungen att ta till numeriska metoder för att lösa ekvationer och man fick räkna i många steg. Detta kunde vara en lång och mödosam process.

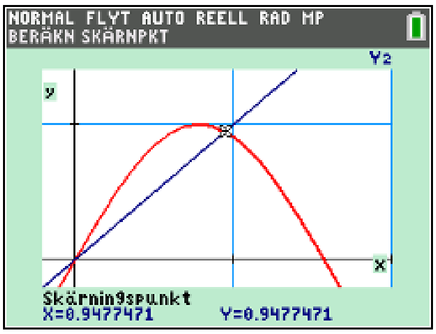
En metod man använde var Newtons metod där man utnyttjar derivata. Först tar vi dock upp lite om metoder där man inte använder derivator. Det handlar om upprepade beräkningar.

Man kan fråga sig varför vi tar upp detta. Jo, nu är det ju så att många av de beräkningar som vi till exempel kan göra med de moderna grafräknarna är osynliga för oss. Vi ser ofta bara resultatet. Då kan det vara en god pedagogisk idé att visa på hur det kan gå till internt i datorns eller räknarens program. Det är då det viktiga begreppet *rekursion* kommer in i bilden. Där tar man fram en serie av approximationer till en rot till en ekvation och varje nytt (och bättre) värde beräknas med hjälp av det föregående. I kurs 5 behandlas detta i samband med beräkningar på *talföljder.*

Antag att vi ska lösa ekvationen *x*-sin(2*x*) = 0 och beräkna den positiva roten. Vi skriver först om ekvationen på formen x = f (x). Det blir då *x*=sin(2*x*). Vi söker nu ett värde på *x* så att vänster- och högerled blir lika. Idén nu är att sätta in något som vi tror ligger nära det riktiga värdet och se vad vi får ut. Om det är en bättre approximation upprepar vi proceduren tills det inte verkar hända mer. Uttryckt med en formel kan det vi gör beskrivas som

$x_{n+1} = \sin(2x_n)$

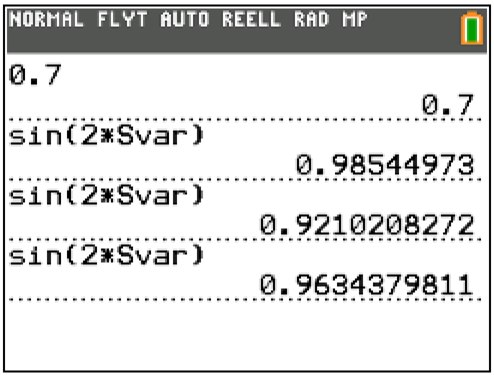
Se graferna nedan.



Här visar vi hur vi kan lösa ekvationen *x*-sin(2*x*)=0 utan hjälp av derivata.

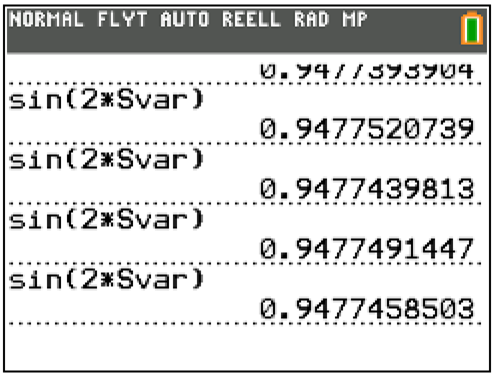
Beräkningarna kan utföras direkt i räknarens grundfönster och man utnyttjar den s.k. **ans**-funktionen. ans står för *sista beräknade svar*. På skärmen, om du har språkinställning svenska, står det **Svar** i stället för ans. Du använder alltså tangenten [2nd][ans].

Vi börjar till exempel med startvärdet 0,7 och trycker sedan på enter. Därefter skriver vi sin(2·*svar*) och trycker sedan på enter igen... och igen. Det blir så här:



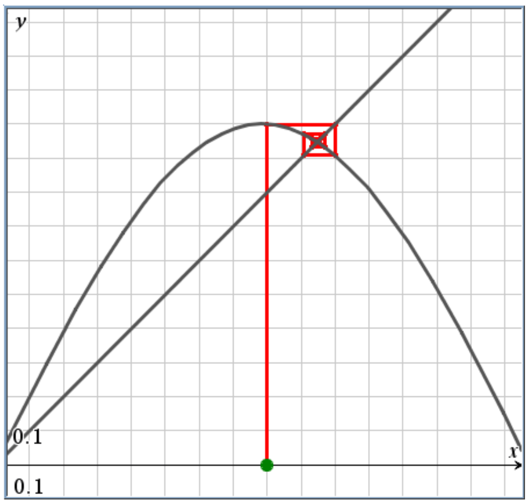
Vi får trycka väldigt många gånger innan siffrorna börjar stabilisera sig.

Efter ca 25 tryckningar på [enter] det ser ut så här:



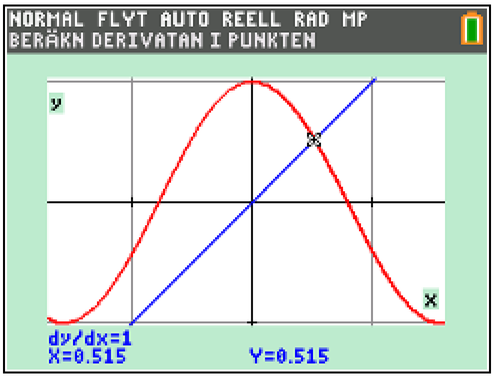
Vi får nu ett hyggligt närmevärde efter ett stort antal upprepade beräkningar (iterationer). Värdet stabiliseras så småningom till 0,947747 efter ett *stort* antal iterationer.

Vad är det som händer? Vi visar detta grafiskt genom att i steg arbeta oss in mot skärningspunkten mellan x och sin (2x). Se nästa sida.

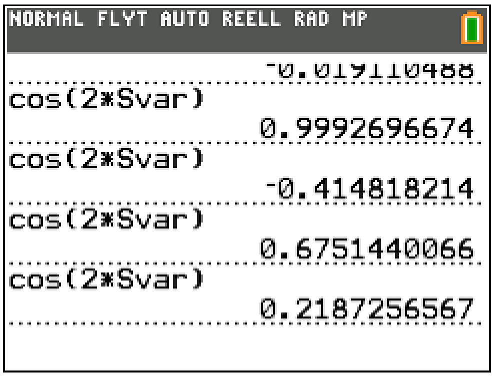


Man börjar med ett startvärde som i grafen ovan är den gröna punkten.

När man prövar med ekvationen ***x*-cos(2*x*)=0** fungerar inte denna metod alls. Anledningen är att cosinusfunktionen har för stor lutning. I grafen nedan visas lutningen i skärningspunkten.



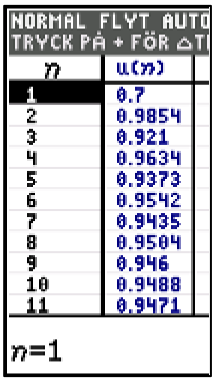
Så här blir det:

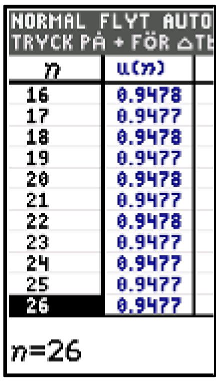


Vi ska nu visa ett annat sätt. Ställ nu in räknaren för att arbeta med talföljder. Gå till [mode] och väld nu SEKV (står för sekvens) på 5:e raden. Tryck sedan på tangenten [y=]. Skriv sedan in ditt uttryck så här:

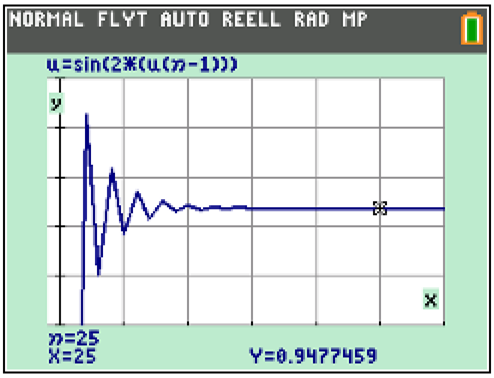
u är [2nd]-funktion till tangenten för [7]. Startvärdet är 7 och vi börjar räkna från *n*=1.

Tryck nu på [2nd][table] för att få en tabell. Då får vi våra värden utan att behöva trycka på enter för att få ett nytt värde.

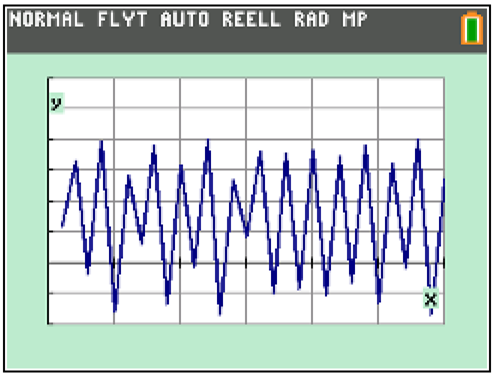




Vi ser att värdena verkar stabilisera sig för *x*= 0,9477. Vi plottar också.



För ekvationen *x*=cos(2*x*) funkar det inte alls som vi nämnt tidigare. Det blir så här:

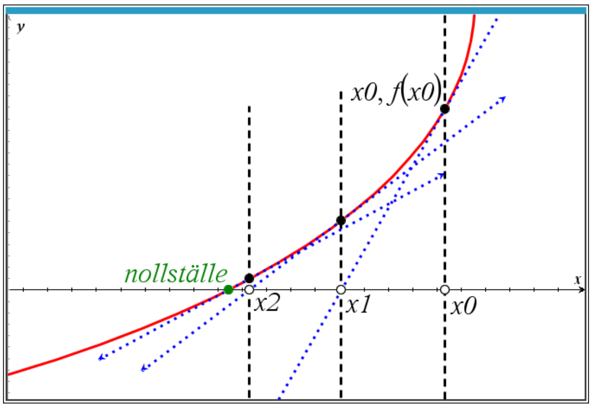


En metod där man använder derivator

Vi antar att vi ska beräkna nollställen till en funktion f(x) med en annan metod, *Newton-Raphsons* metod. Det är en iterativ metod för att beräkna nollställen där man använder sig av derivator.

Man börjar med att gissa ett startvärde x_0. Sedan konstruerar man en *tangent* vid denna punkt (x_0, $f(x_0)$). Denna tangent träffar *x*-axeln vid x_1. Denna punkt ger (oftast) ett bättre närmevärde på noll-stället än x_0.

Vi kan nu konstruera en ny tangent och hamnar nu i punkten x_2 på x-axeln, som är ett ännu bättre närmevärde. Så här kan man fortsätta tills man kommer tillräckligt nära nollstället. Se grafen nedan.



Så här härleder vi nu *rekursionsformeln*. Tangenten har enligt *enpunktsformen* ekvationen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangentens skärningspunkt med *x*-axeln har *y*-värdet noll, och *x*-värdet är x_1. Vi sätter in dessa värden i tangentens ekvation ovan och får då

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Vi löser ut x_1 i denna ekvation:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

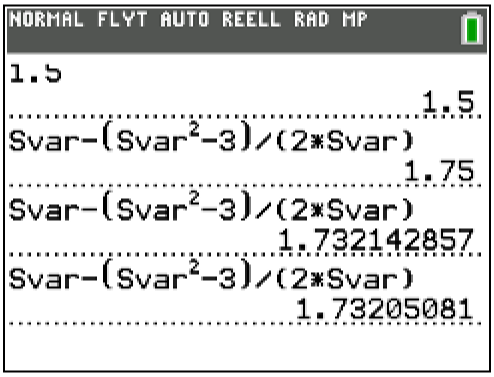
Vi fortsätter nu på samma sätt men nu utgår vi från x_1.

$$x_2 = x_2 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

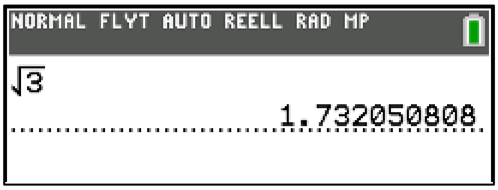
Vi sammanfattar: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Vi börjar med en enkel ekvation och först definierar vi ekvationen och dess derivata. Sedan matar vi in 1,5 som startvärde och trycker på enter. 1,5 är då det sista beräknade värdet och det ligger lagrat i **ans** (**Svar** i svensk språk-inställning).

Vi ska nu lösa ekvationen $x^2 - 3 = 0$. Vi utför först beräkningarna i grundfönstret och gissar först ett startvärde på 1,5. Vi får då



Redan efter tre iterationer får vi resultatet 1,73205081. Om vi beräknar roten ur 3 på räknaren får vi

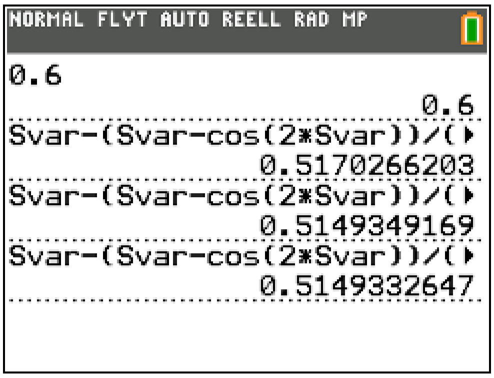


Korrekt resultat med 9 värdesiffror!

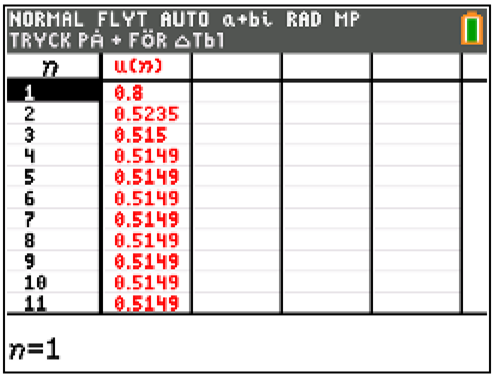
Här löser vi nu ekvationen ***x*-cos(2*x*) = 0** som vi hade problem med förut. Redan efter ett par iterationer så har vi korrekt resultat med sex decimaler. Derivatan av *x*-cos(2*x*) är 1+2sin(2*x*).

När vi matat in ett startvärde skriver man in följande uttryck:

Svar-(Svar-cos(2*Svar))/(1+2*sin(2*Svar)



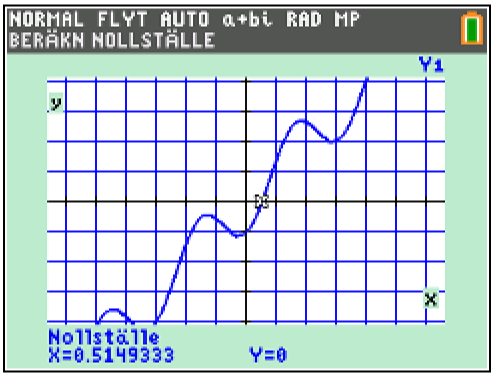
Om du gör beräkningarna med inställningen SEKV i editorn för talföljder får du följande resultat:


NORMAL FLYT AUTO a+bi RAD MP
TRYCK PÅ + FÖR △Tbl

n	u(n)
1	0.8
2	0.5235
3	0.515
4	0.5149
5	0.5149
6	0.5149
7	0.5149
8	0.5149
9	0.5149
10	0.5149
11	0.5149

n=1

Om vi plottar funktionen $y = x - \cos(2x)$ och beräknar nollstället ser det ut så här:



Vilken metod som räknaren använder vet vi inte men det kan vara Newtons metod, som vi har gjort. Derivatan kan däremot inte räknaren beräkna exakt men den kan med stor noggrannhet beräkna differenskvoten.

Pröva nu med någon annan ekvation. Gärna någon lite krångligare! Plotta en graf först så du ser var du ska ha startvärdet.