Formler och mönster

Figurerna visar ett mönster med ett antal kvadrater.

a) Hur många kvadrater är det i figur nr 10?

b) Teckna en formel som visar antalet kvadrater a_n i figur nr n.

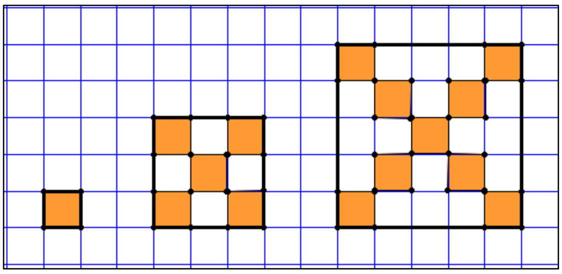
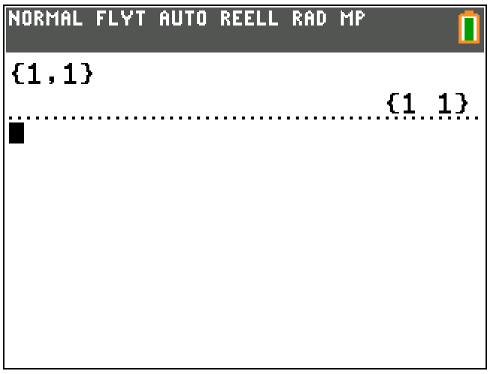


Fig 1 Fig 2 Fig 3

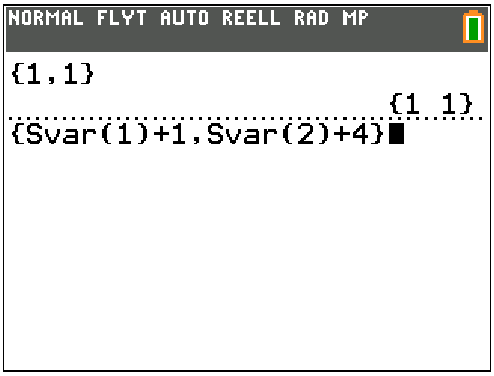
Vi kan ju naturligtvis räkna oss fram figur för figur eller också kan vi tänka så här: I figurerna så ökas antalet med 4 varje gång. Från figur 2 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir det
$1 + 9 \cdot 4 = 37$.

Ett annat sätt är att börja med att skriva så här:



Talen står för figurnummer och antalet kvadrater. Det är ju en kvadrat i figur 1.

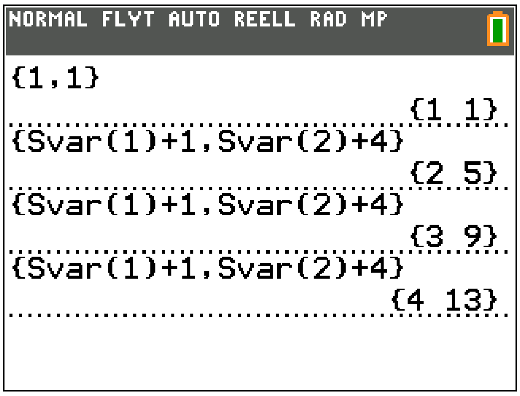
Fortsätt nu att skriva så här:



Svar får du genom att trycka på [2nd][ans]. Svar(1) betyder det först beräknade värdet i raden ovanför (som är 1) och Svar(1) + 1 betyder att vi ska lägga till 1 nästa gång vi gör en beräkning.

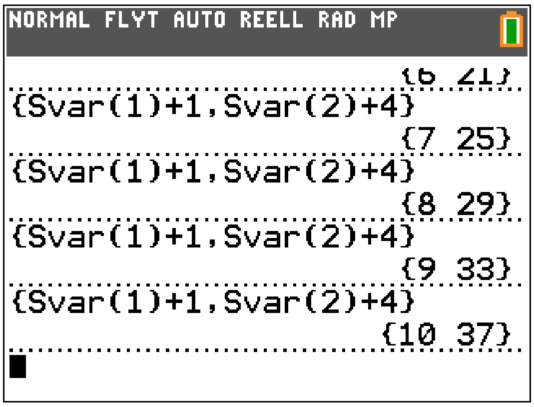
På motsvarande sätt är det för Svar(2) i raden ovanför (som är 1): vi ska lägga till 4.

Tryck nu upprepade gånger på [enter].



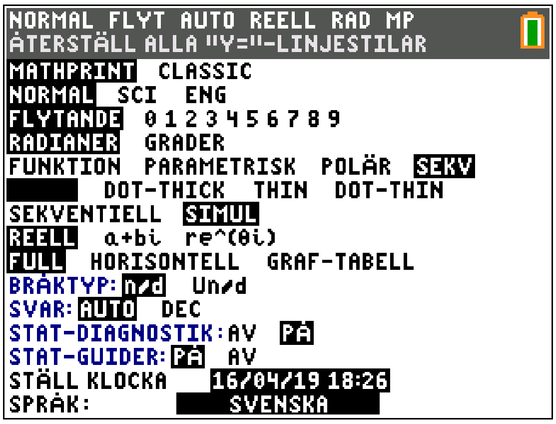
Nu får vi antalet kvadrater i figur 2, figur 3 osv.

Om vi fortsätter att trycka på [enter] så ser vi att det i figur 10 blir 37 st. Varje rad i räknarfönstret ger figurnummer och antalet kvadrater.



Det här är ju lite omständligt. Nu finns det ett annat sätt att göra beräkningarna. Vi ska skriva in ett utryck för den följd av tal vi får för antalet kvadrater. Det kallas för en talföljd och har beteckningen SEKV (står för sekvens) på räknaren.

Gå då först till räknarens allmänna inställningar genom att trycka på [mode].



Se till att du markerar SEKV på 5:e raden.

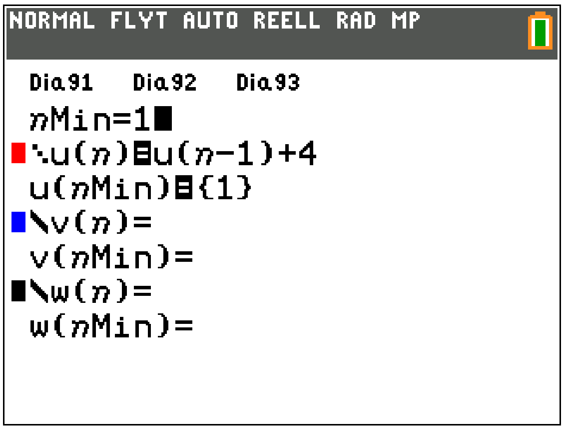
Tryck nu på [y=]. Då kommer inmatningsmenyn för talföljder.

Första raden säger att vi ska börja räkna från *n*=1.

Andra raden är formeln. Det är en formel i *rekursiv* form som betyder att varje nytt värde,(u(*n*), är det föregående, u(*n*-1), + 4.

Tredje raden säger att det minsta värdet då *n*= 1 är 1.

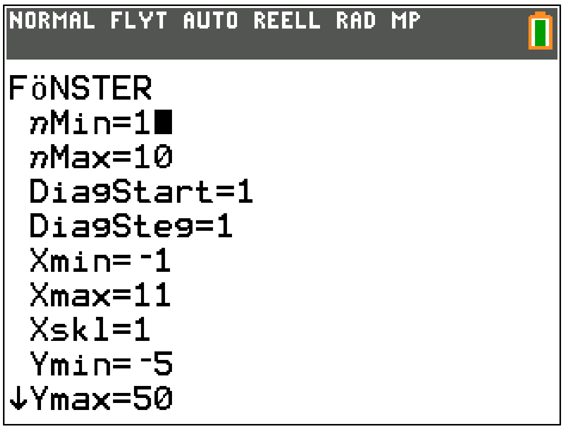
Vi har också ställt in att vi ska plotta i röd färg och prickat.



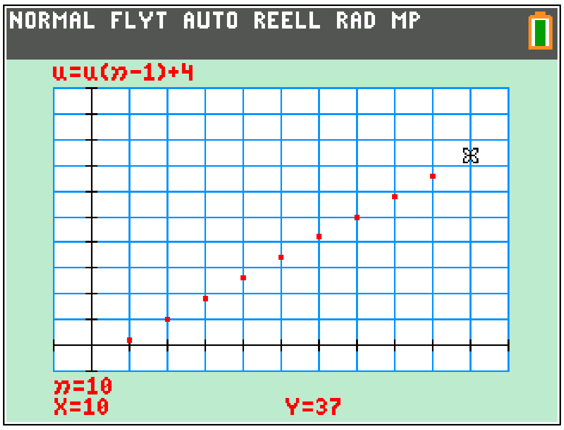
När du skriver in detta uttryck så behöver du komma åt beteckningen **u**. Tryck på [alpha] [7]. Du ser att det står ett litet u ovanför tangenten 7.

För att skriva in ***n*** så trycker du på [X,T,θ,n].

Nu kan vi snart plotta. Först bör vi dock ställa in ett bra fönster.

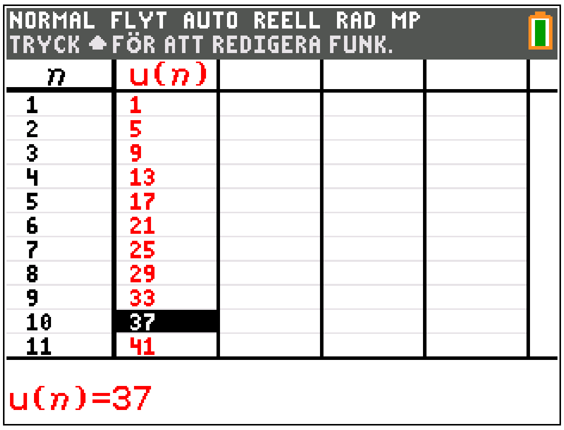


Nu kan vi plotta.



Vi kan spåra i plottningen genom att trycka på [trace].

Man kan också få en tabell med de värdena för de plottade punkterna. Tryck då på [2nd][table].



Hur ska man nu hitta en formel i *sluten* form som direkt ger antalet kvadrater i figur nr *n*? Om vi räknar från figur 1 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir antalet kvadrater i figur 10:

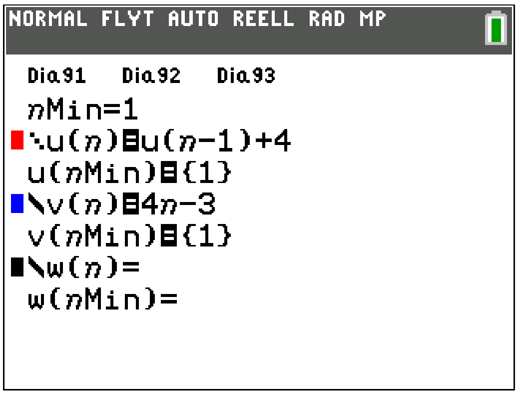
$1 + 9 \cdot 4 = 37$.

Om vi nu räknar från figur 1 till figur *n* blir det $1+(n-1)\cdot 4$. Vår formel blir då alltså

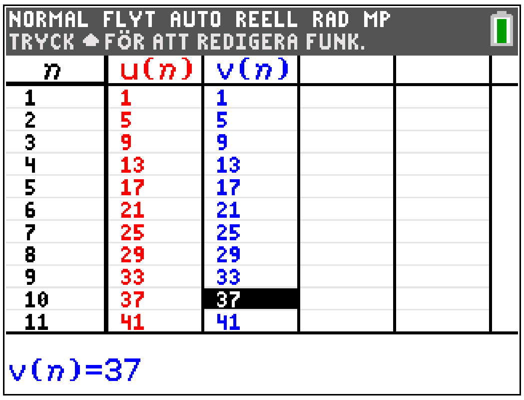
$u(n)=1+(n-1)\cdot 4$

Uttrycket kan förenklas till: $u(n)=4n-3$.

Vi matar nu in denna formel under $v(n)$.



Resultatet syns i tabellen. Vi får samma värden.



Nu till ett annat problem:

Titta på triangelmönstren ovan, där vi visar de första fyra stegen. Antag att vi vill veta hur många prickar det är i figur nr 10?

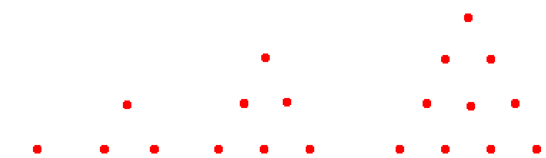
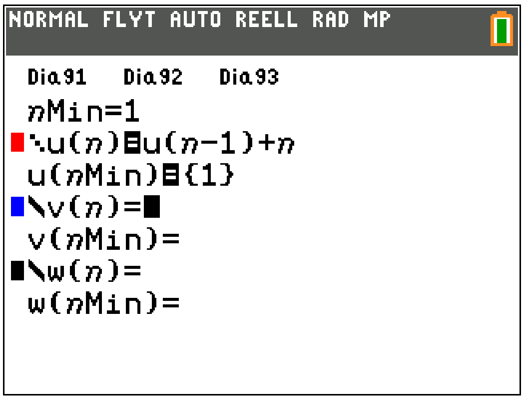


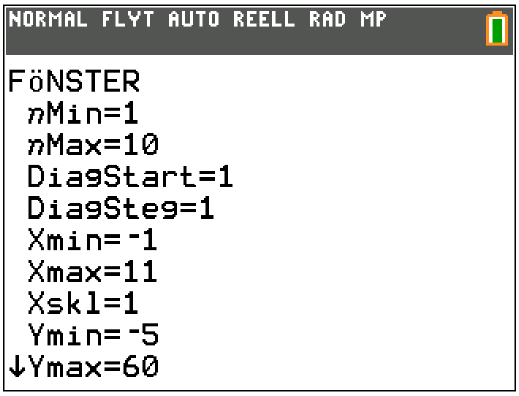
fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

Om vi tittar på figur nr 3 t.ex. så ser vi att antalet prickar där är antalet prickar i föregående figur, dvs. figur nr 2, plus det antal prickar som figurnumret anger (3 st).
Samma sak gäller om vi går till figur nummer 4. Antalet prickar där är antalet prickar i figur nr 3 plus 4 st till eftersom det är figur nr 4.

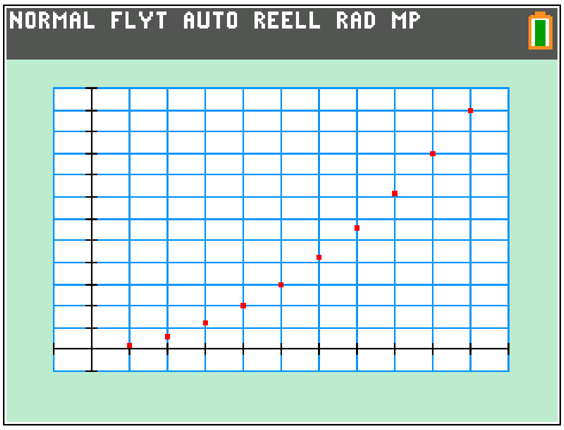
Vi har alltså funnit ett mönster och kan skriva in en rekursiv formel på samma sätt som i förra problemet. Se inmatningsmenyn nedan.

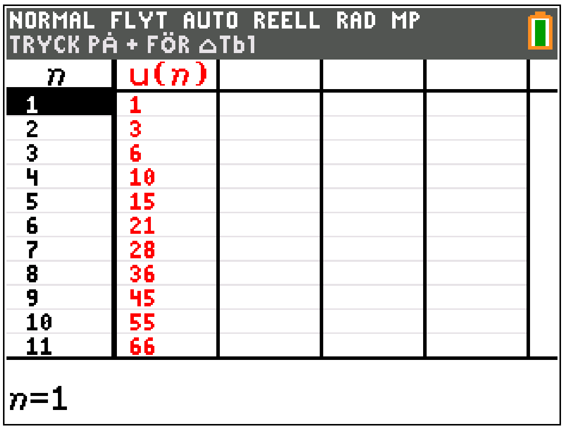


En bra fönsterinställning har du här. Man får ofta pröva sig fram här.



Vi tar fram en graf och en tabell.

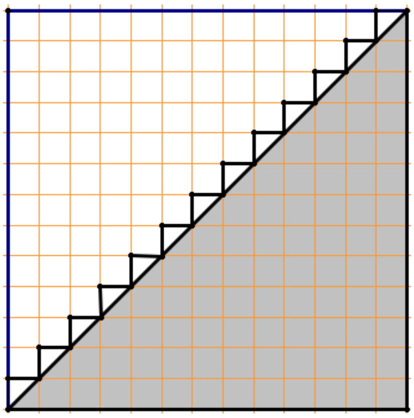




Vi ser att det blir 55 prickar i figur 10.

Om vi tittar på tringlarna i figuren så ser vi att de byggs upp av talen 1 + 2 + 3 + 4 + ….

Hur ska vi då beräkna summan för sådan tal-serie? Betrakta trappan i figuren som är byggd av kvadratiska block. Den stora kvadraten är här gjord som en 13×13 kvadrat.
Summan av alla block i trappan är halva kvadraten (det grå fältet) plus alla de svarta trappstegen, som är halva kvadrater. De har ju arean 1/2.



Om figuren nu är en $n \times n$ kvadrat så består hela trappan av

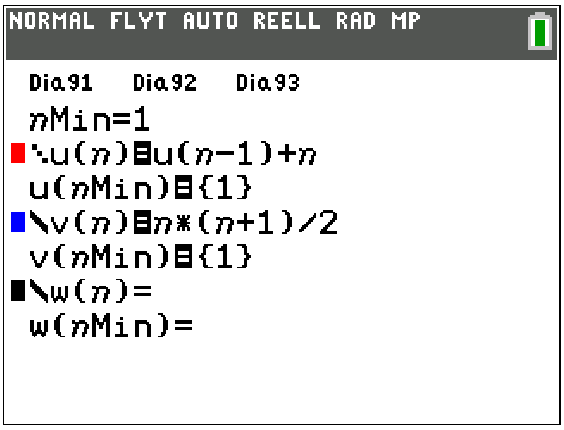
$\frac{n^2}{2}$ block (det grå fältet)

$n \cdot \frac{1}{2}$ block (trappstegen)

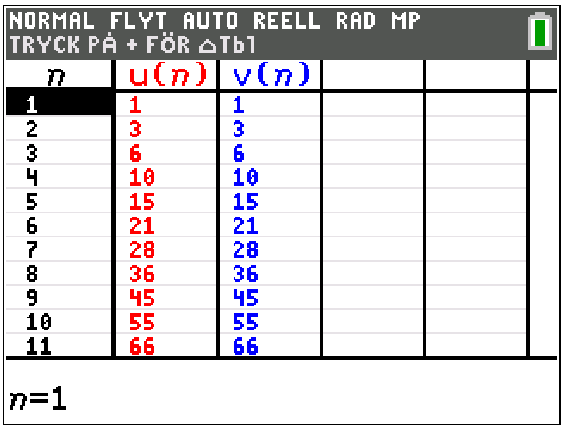
Totala antalet block blir då

$$\frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Med detta geometriska bevis har vi fått en annan formel för antalet prickar. Vi kan skriva in den i editorn för talföljder.



Vi får samma resultat.

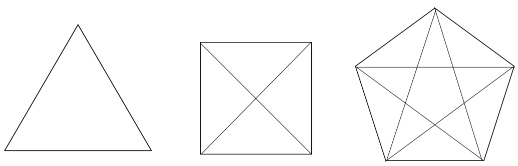


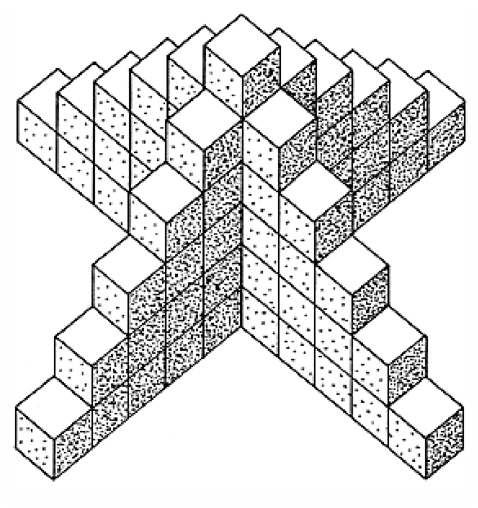
Den senare formeln är naturligtvis elegantare eftersom den direkt ger antalet prickar i tri-angelmönstret för vilken figur som helst.

Till sist ett problem som vi inte ger någon lösning på:

Hur många linjer kan man dra mellan de punkter som utgör hörn i månghörningar? Bilden nedan visar en triangel, en fyrhörning och en femhörning. Här kan vi räkna till 3, 6 resp. 10 linjer.

Ta alltså fram en formel som anger antalet linjer i n-hörning.

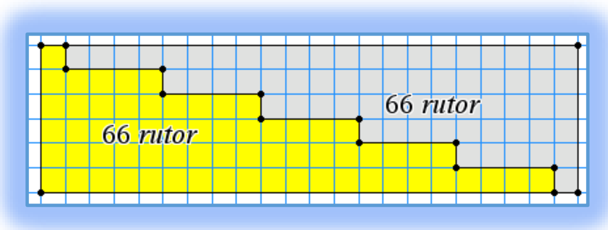




Titta noga på figuren ovan. Vi börjar nu uppifrån. Längst upp finns det en kub. På "våningen" under finns det en kub till plus 4 kuber. Det ger totalt 5 kuber. Går vi ännu en våning nedåt så få vi lägga till ytterligare 4 kuber till de vi redan har, dvs 5+4 = 9 kuber. Så här håller vi på 3 våningar till. Det totala antalet kuber i figuren blir då

$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 66$

Titta på figuren nedan. Om vi börjar högst uppe till vänster i det gula fältet och rör oss lodrätt nedåt så illustrerar figuren talen i serien ovan. Hela figuren består av två områden med vardera 66 rutor och hela figuren, som är en rektangel har måttet 6×22 rutor = 132 rutor.



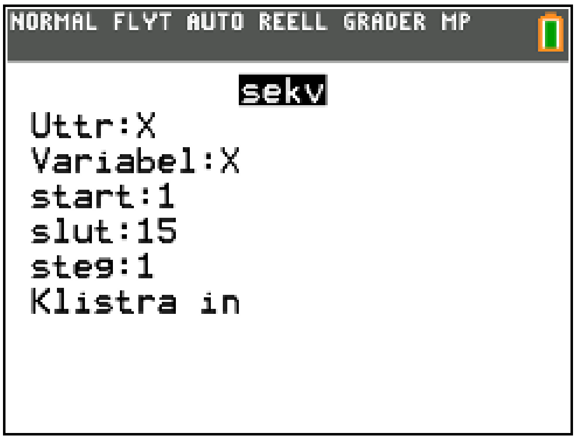
Vi går nu vidare.

Hur många kuber är det då i en kub som är 15 våningar hög?

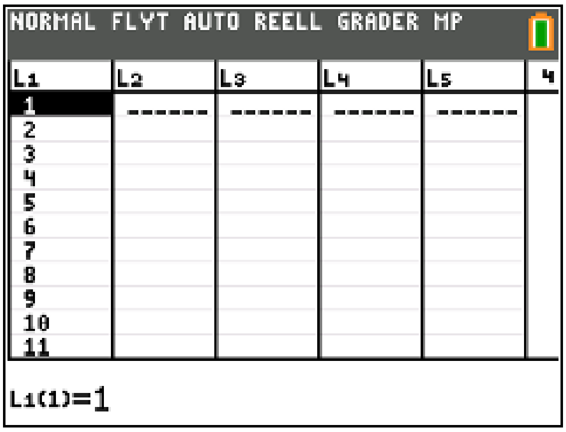
Nu blir det jobbigt att summera så många tal så här.Här kan vi då använda en funktion i räknarens statistikdel so heter *sekv*, som står för sekvens eller talföljd på svenska.

Placera markören i listhuvudet i lista L1. Tryck sedan på [2nd] [list]och välj OPS (står för Options).

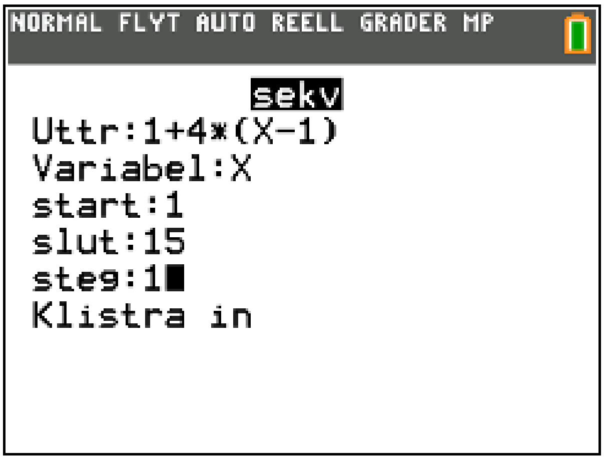
Välj där 5:*sekv* och tryck på [enter]. Fyll nu i listan så här:



Markera Klistra in och tryck på [enter]. Då kopieras instruktionerna till statistikeditorns inmatningsfält. Tryck nu på [enter] igen. Klart! Vi får en lista med talen 1 till och med 15.

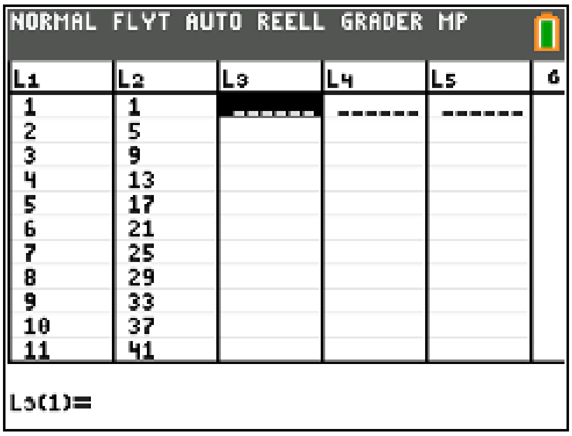


Nu ska vi skapa en lista med antalet kuber i våning 1, våning 2 osv. vi använder instruktionen *sekv* igen! Så här ser inmatningsrutan ut.



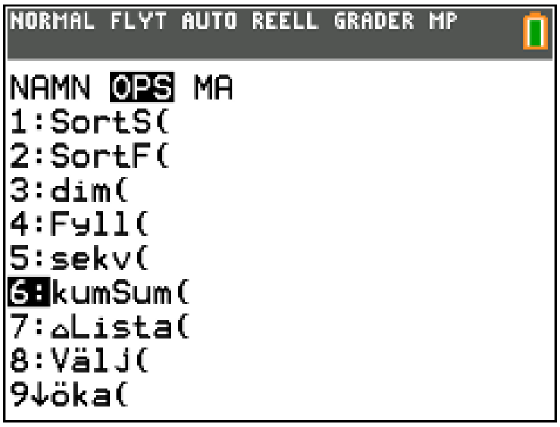
Observera formeln på första raden. För att vi ska få med värdet 1 i listan så måste vi skriva 1+4*(X-1). När X är 1 så blir uttryckets värde 1+4*(1-1) som är 1.

Så här blir listan.

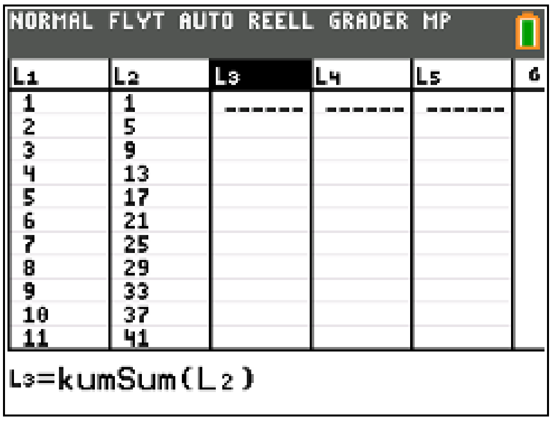


Nu ska vi summera värdena i lista L2 rad för rad. Vi ska alltså beräkna de *kumulerade* värdena: Första raden blir 1, andra raden blir 1+5=6, tredje raden blir 1+5+9=15 osv.

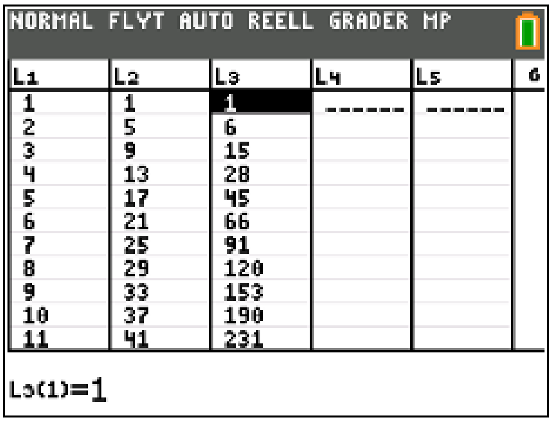
Placera markören i kolumnhuvudet i Lista L3 och tryck som förut på [2nd][list]. Välj OPS och sedan *6:kumSum*.



På inmatningstraden skriver du sedan så här:

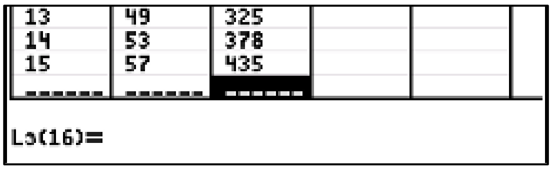


Nu trycker vi på [enter] igen. Så här blir resultatet.

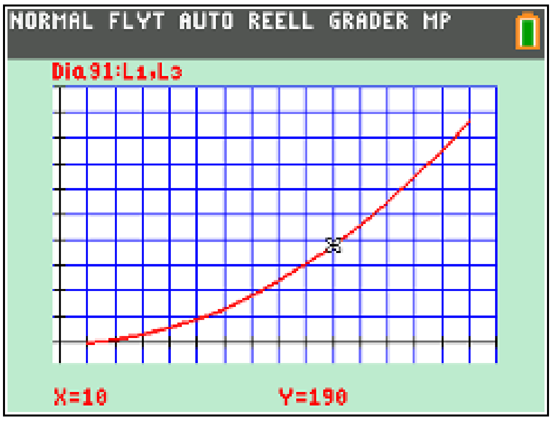


Nu kan se antalet kuber i konstruktionen för olika antalet våningar.

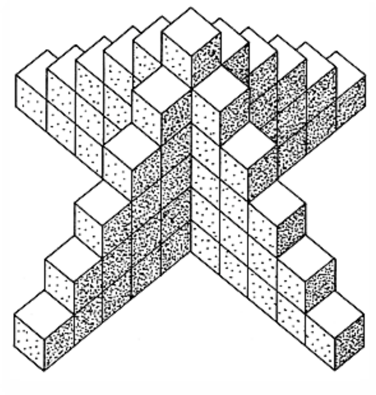
För 15 våningar blir det alltså 435 kuber.



Vi ka nu rita ett diagram med antalet våningar på *x*-axeln och antalet kuber i konstruktionen på *y*-axeln. Vi kan spåra i kurvan.



Nu kan man fråga sig om det inte finns någon formel för att direkt kunna beräkna antalet kuber. Vi tittar på figuren igen.



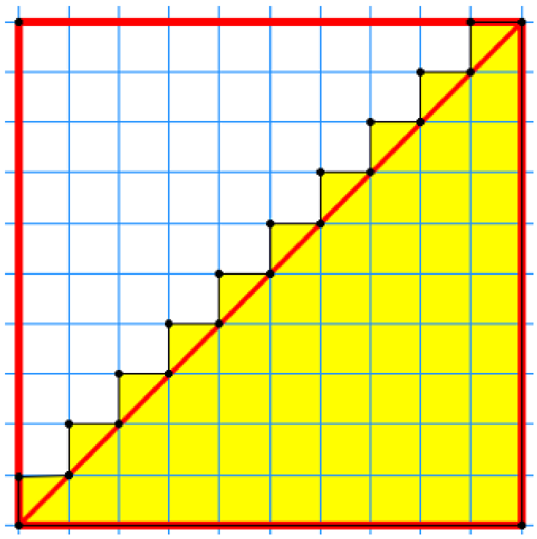
Vi tittar nu på de utstickande armarna (4 st). De ser ut så här sett från sidan i en tvådimensionell skiss. De är ju uppbyggda av kvadrater enligt mönstret

1+2+3+4 ...+(n-1)

Konstruktionen är ju *n* våningar hög och sidoarmarna sträcker sig **n-1** våningar upp.

Vi har här ritat för en kvadrat 10 $\times$10 men vi tänker oss att vi har en kvadrat

(n-1)$\times$(n-1) rutor



Det gula fältet i figuren består då av

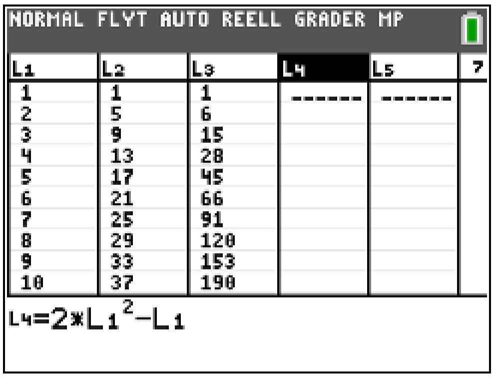
$$\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(n-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$$ rutor.

Vi förenklar uttrycket nu och får $\frac{n^2-n}{2}$

Nu har vi fyra sådana utstickare och dessutom *n* kuber i mitten av konstruktionen. Vi får då

$$4\cdot\frac{n^2-n}{2}+n \quad \Rightarrow \quad 2n^2-n$$

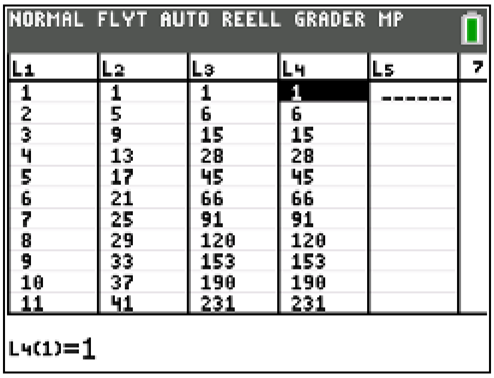
Nu kan vi mata in formeln i lista L4.



L1	L2	L3	L4	L5	7
1	1	1	------	------	
2	5	6			
3	9	15			
4	13	28			
5	17	45			
6	21	66			
7	25	91			
8	29	120			
9	33	153			
10	37	190			

L4=2*L1²−L1

Vi får samma resultat som tidigare.



L1	L2	L3	L4	L5	7
1	1	1	1	------	
2	5	6	6		
3	9	15	15		
4	13	28	28		
5	17	45	45		
6	21	66	66		
7	25	91	91		
8	29	120	120		
9	33	153	153		
10	37	190	190		
11	41	231	231		

L4(1)=1

Att utgå från en formel gör att vi enkelt kan beräkna antalet kuber för vilket antal våningar som helst! Antal kuber som går år för att bygga ett torn med 100 våningar blir:

$$2\cdot100^2-100=19900$$

Man kan också skriva in denna formel genom att ställa in grafritning av sekvenser som vi gjorde på sid 2.