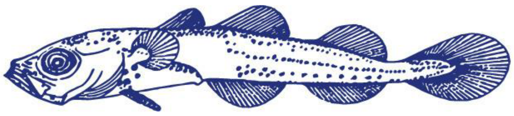
Differentialekvationer baklänges

Vid exponentiella förlopp så antar vi att den *relativa* förändringen hela tiden är konstant. Någonting ökar med till exempel med 5 % varje år. I verkligheten så används ofta en annan modell - *logistisk* tillväxt.

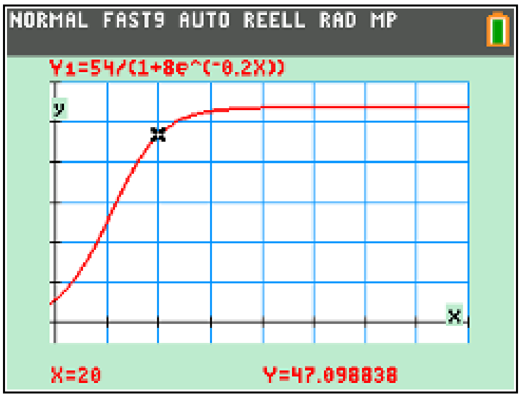


Ett bra exempel på logistisk tillväxt är när man släpper ut 200 fiskyngel i en damm. Man vet sedan att maximalt 5000 fiskar kan leva i dammen. Utifrån detta och värdet på en konstant kan man sedan beräkna populationens storlek efter en viss tid.

Följande funktionsuttryck är ett exempel på en sådan förändring. *x* står här för tiden och *y* kan vara populationsstorleken.

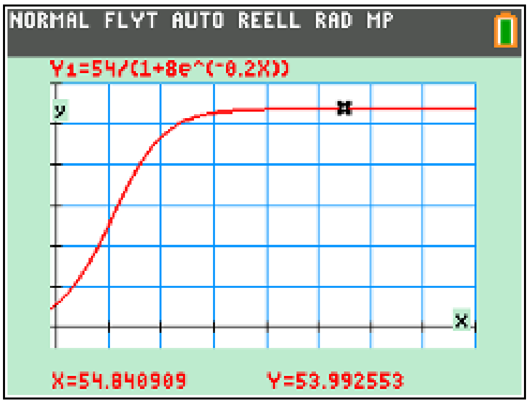
$$y = \frac{54}{1+8e^{-0,2x}}$$

Om vi ritar denna funktion i ett bra fönster kan det se ut så här:



Kurvan har från början värdet 6 och verkar först stiga exponentiellt för att sedan bli mindre brant och till slut plana ut och värdet närmar sig 54. Det finns alltså en *inflexionspunkt*. Du vet väl att en inflexionspunkt är?

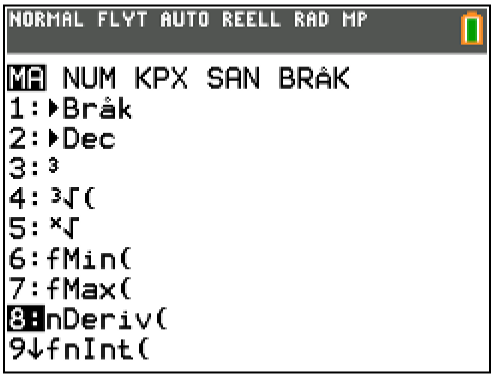
Derivatan av en funktion ger lutningen. Andra-derivatan berättar om lutningen ökar eller minskar. När andraderivatan är positiv är funktionen konkav uppåt. När andraderivatan är negativ är funktionen konkav nedåt. Inflexionspunkten är den punkt där den går från konkav uppåt till konkav nedåt eller tvärtom.



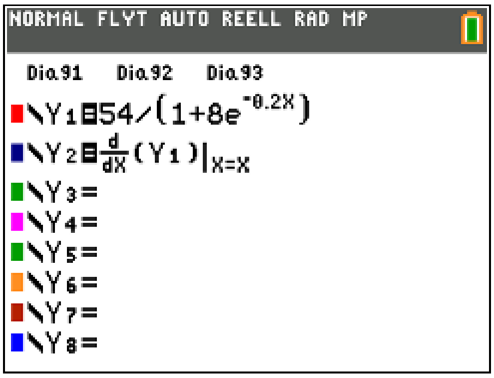
Vi undersöker nu derivatan. Om du deriverar algebraiskt får du derivatafunktionen

$$y = \frac{86,4 \cdot e^{-0,2x}}{(1+8 \cdot e^{-0.2x})^2}$$

Du kan naturligtvis också använda den numeriska derivatan. Den finns som inbyggd funktion under tangenten [math]. Placera först markören i editorn för funktionsinmatning vid Y2 och tryck på [math]. Väljs där alternativ 7:nDeriv och tryck på [enter].



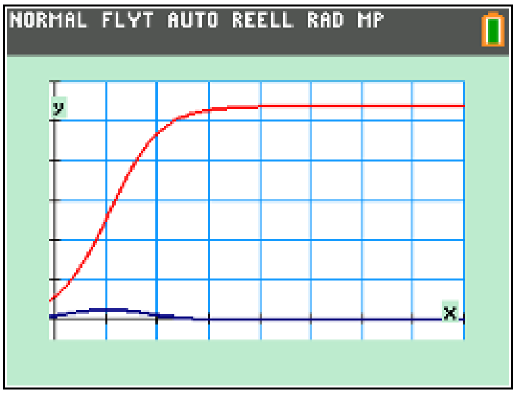
Fyll sedan i mallen så här:



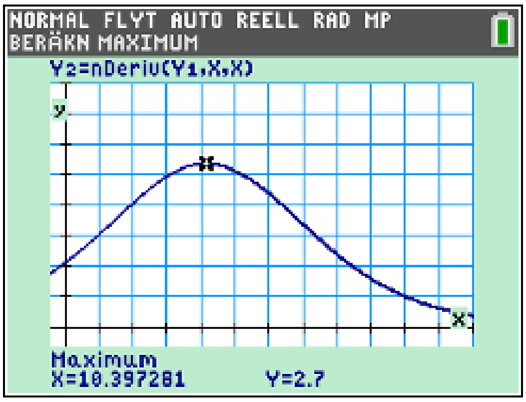
Du hämtar Y2 genom att trycka på tangenten [vars] och sedan välja fliken Y-VAR och sedan Y2.

© Texas Instruments 2021 TI-84 Plus CE-T Version 5.6

Så här ser funktionen och derivatafunktionen ut när vi plottar:

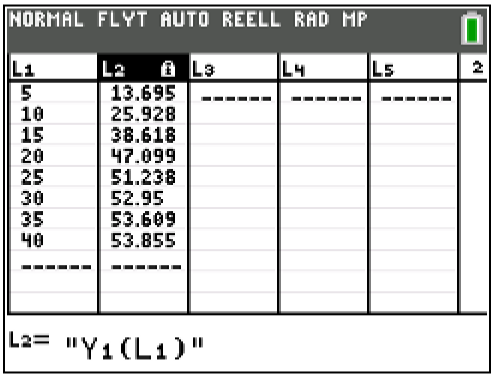


Nu dyker derivatafunktionen upp lägst ner på skärmen. Här är det bäst att avmarkera Y1 och skala om fönstret. Det blir så här:



Den verkar ha en topp när *x* är ungefär 10. Det stämmer ju bra med själva funktionen. Den är ju brantast där.

Gå nu över till statistikeditorn och mata in några värden för *x* i Lista L1. Skriv in värdena0, 5, 10, 15, … 35, 40 till exempel. I lista L2 ska du sedan ha värdena för funktionen. Då skriver man så här i kolumnhuvudet:

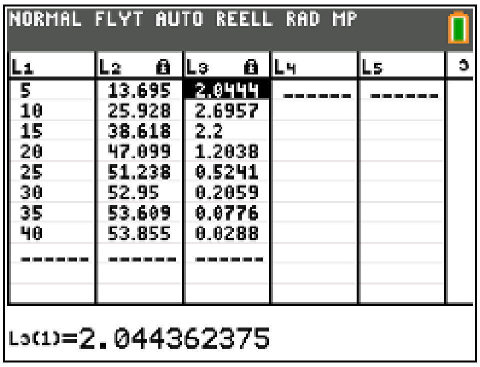


L1	L2	L3	L4	L5
5	13.695	------	------	------
10	25.928			
15	38.618			
20	47.099			
25	51.238			
30	52.95			
35	53.609			
40	53.855			
------	------			

L2= "Y1(L1)"

Citattecknen gör att formeln inte försvinner efter beräkningen utan ligger kvar i kolumnhuvudet.

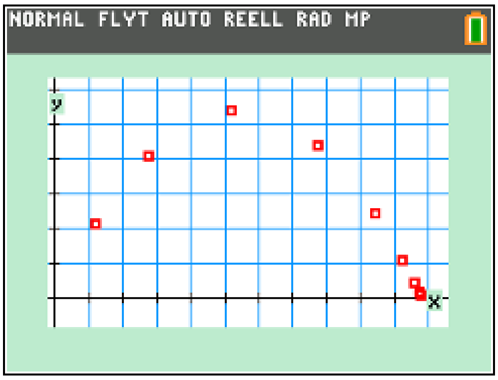
Vi gör sedan likadant för derivatan:



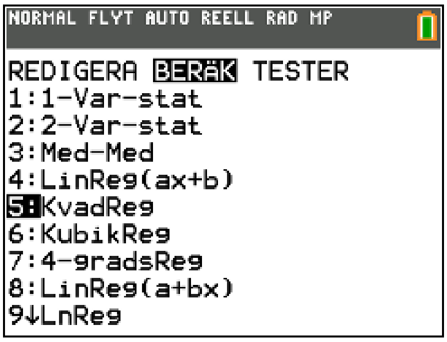
L1	L2	L3	L4	L5
5	13.695	2.0444	------	------
10	25.928	2.6957		
15	38.618	2.2		
20	47.099	1.2038		
25	51.238	0.5241		
30	52.95	0.2059		
35	53.609	0.0776		
40	53.855	0.0288		
------	------	------		

L3(1)=2.044362375

Om man nu först plottar L2 mot L3, dvs. funktionsvärdet mot derivatans värde får man följande:



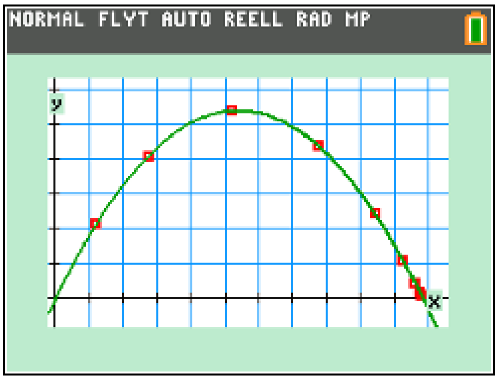
Detta ser ut som en andragradsfunktion Vi prövar med en *regressionsanalys*. Gå till statistikeditorn och välj sedan BERÄK högst upp på skärmen och sedan alternativ 5: KvadReg.



Välj alternativ 5 och tryck på enter vi upp följande mall där du fyller vilka listor det gäller och var du ska lagra den beräknade regressionsekvationen.

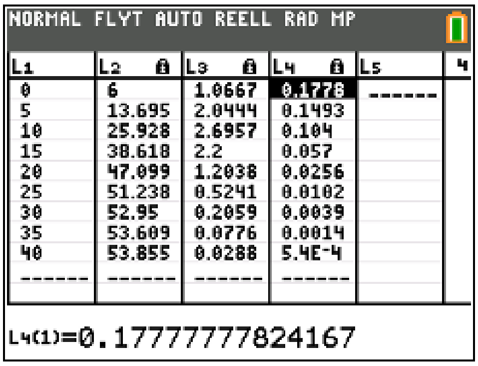
Markera **BERÄKNA** och tryck sedan på enter. Vi får följande resultat:

Nu kan vi rita funktionen som finns i Y3.



Andragradsfunktionen har en maxpunkt vid y = 27 och har då värdet 2,7.

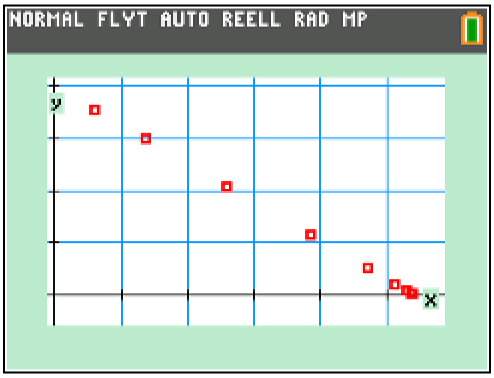
Till slut ska vi också den *relativa* förändringshastigheten, dvs. y'/y. Då blir formeln i kolumnhuvudet så här:



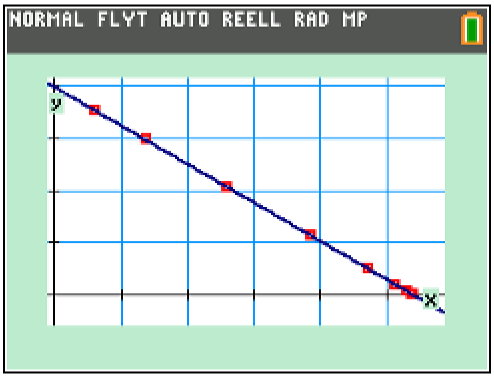
L1	L2	L3	L4	L5
0	6	1.0667	0.1778	------
5	13.695	2.0444	0.1493	
10	25.928	2.6957	0.104	
15	38.618	2.2	0.057	
20	47.099	1.2038	0.0256	
25	51.238	0.5241	0.0102	
30	52.95	0.2059	0.0039	
35	53.609	0.0776	0.0014	
40	53.855	0.0288	5.4E-4	
------	------	------	------	

L4(1)=0.17777777824167

Vi plottar sedan funktionsvärdet L2 mot de relativa förändringshastigheten L4.



Det verkar här finnas ett linjärt samband mellan funktionens värde och den relativa förändringshastigheten. Linjär regression ger detta resultat:



Vi kan alltså skriva sambandet så här:

$y'/y = -0{,}00370y + 0{,}2$

Vi kan skriva om detta som

$y' = -0{,}00370y^2 + 0{,}2y$

som kan faktoriseras som

$y' = 0{,}00370y(54 - y)$

Man ser här att så länge y är litet så betyder förändringar av faktorn (54 – y) inte så mycket men efterhand när y växer så påverkar den y' alltmer och hämnar tillväxten.

Ekvationen ovan är en *icke linjär differentialekvation*. Den kan man inte lösa algebraiskt med elementära metoder. Vi visar här nu en numerisk lösning med Eulers stegmetod. Den beskrivs i detalj i aktiviteten Eulers metod så vi tar inte upp den här.

Vi kommer att använda ett TI-Basic-program för att numeriskt lösa differentialekvationen. Nästa sida visar vi programkoden. Du kan ladda ner detta program via programmet *TI Connect CE*.

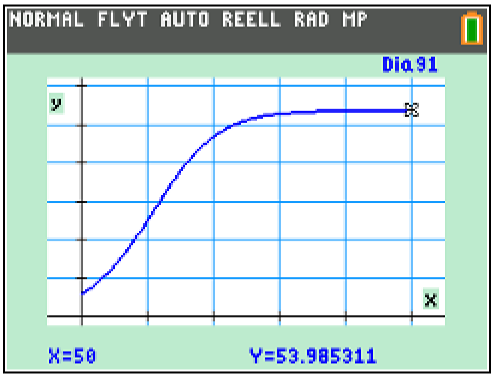
Programmet heter EULER1 och det löser numeriskt D.E. med startvärden för x och y. x-värden och beräknade y-värden läggs i listor i räknarens statistikeditor.

Du kan spåra i lösningskurvan och grafiskt se alla beräknade värden. Du kan ha högst 250 steg och kurvan plottas som ett linjediagram. Innan du kör programmet så matar du in D.E. i funktionseditorn vid Y1. Sedan avmarkera du ekvationen genom att placera markören vid likhetstecknet och trycker på enter.

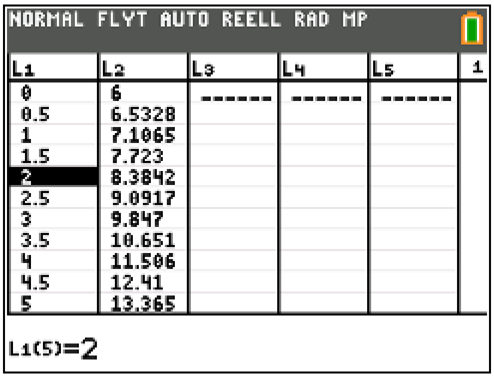

```
RensaLista L₁,L₂
Disp "STARTVÄRDE X":Input X
Disp "STARTVÄRDE Y":Input Y
Disp "SLUTVÄRDE X":Input B
Disp "ANTAL STEG":Input N:
(B-X)/N→H
1→M
While X≤B och M≤250
X→L₁(M):Y→L₂(M):X+H→S
Y+HY₁→T
S→X:T→Y
M+1→M
End
ZoomStat
Diag1(xyLinje,L₁,L₂,•)
```

Nu kör vi. Tryck på tangenten prgm och välj programmet EULER1. Först får vi upp en sida där vi väljer olika parametrar. Startvärdet är ju (0, 6) och vi väljer ett slutvärde för x=50. Med 100 steg blir då steglängden 0,5.

Efter några sekunder kommer lösningskurvan upp i graffönstret. Det gäller att välja ett bra fönster så att hela kurvan syns.



Så här ser det ut i statistikeditorn.



L1	L2	L3	L4	L5
0	6	------	------	------
0.5	6.5328			
1	7.1065			
1.5	7.723			
2	8.3842			
2.5	9.0917			
3	9.847			
3.5	10.651			
4	11.506			
4.5	12.41			
5	13.365			

L1(5)=2

Rensa listorna om du gör fler programkörningar.

Om vi matar in den ursprungliga funktionen

$$y = \frac{54}{1+8e^{-0,2x}}$$

så överlappar kurvorna varandra.