

Taux d'évolution moyen - Racine n^{ième}

Enoncé

Nous allons étudier le cours d'une crypto-monnaie cotée en bourse : il varie au cours des années.

- Ce cours augmente de 10 % la première année puis augmente de 3 % la deuxième année. Quel est le taux d'évolution moyen annuel durant les deux premières années ?
- Ce cours baisse ensuite de 18 % la troisième année et il augmente à nouveau de 5 % la quatrième année.
 - Quelle est l'évolution globale pendant ces quatre ans ?
 - Quel est le taux moyen annuel d'évolution du cours de cette crypto-monnaie pendant ces quatre ans ?
- On souhaite que le rendement de cette crypto-monnaie soit de 7 % au bout de 5 ans. Quel est le taux d'évolution que ce cours doit-on avoir durant la cinquième année ?



Crédit photo : www.pixels.com

1. Taux moyen sur 2 ans

Nous savons qu'une augmentation de 10% correspond à multiplier par un coefficient de 1,1 et qu'une augmentation de 3 % correspond à multiplier par un coefficient de 1,03. Le coefficient multiplicateur global pour les deux premières années est donc $CM_2 = 1,1 \times 1,03 = 1,133$. Le cours de la crypto-monnaie a ainsi globalement augmenté de $1,133 - 1 = 0,133 = 13,3 \%$ en 2 ans.

Si on appelle C le coefficient multiplicateur appliqué deux fois de suite pour cette même évolution on a $C \times C = C^2 = 1,133$ et puisque $C > 0$, on obtient $C = \sqrt{1,133} \approx 1,0644$ soit un taux annuel moyen d'augmentation d'environ $1,0644 - 1 = 0,0644 = 6,44 \%$.

| NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP | |
|-------------------------------|--------------|
| $1.1 * 1.03$ | 1.133 |
| $\sqrt{1.133}$ | 1.064424727 |
| Rep-1 | 0.0644247273 |

2.a. Evolution sur 4 ans

Tout d'abord, le coefficient multiplicateur pour une baisse de 18 % est égal à 0,82 et celui pour une augmentation de 5 % est égal à 1,05 donc le coefficient multiplicateur global pour les quatre années successives est égal à $CM_4 = 1,1 \times 1,03 \times 0,82 \times 1,05 = 0,975513$.

On en déduit que le cours de la crypto-monnaie a donc baissé de $1 - 0,975513 = 0,024487 = 2,4487 \%$ en 4 ans (malgré trois augmentations et une seule baisse, le cours de la crypto-monnaie a globalement baissé !).

| NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP | |
|-------------------------------|----------|
| $1.1 * 1.03 * 0.82 * 1.05$ | 0.975513 |
| 1-Rep | 0.024487 |
| Rep*100 | 2.4487 |

Taux d'évolution moyen - Racine n^{ième}

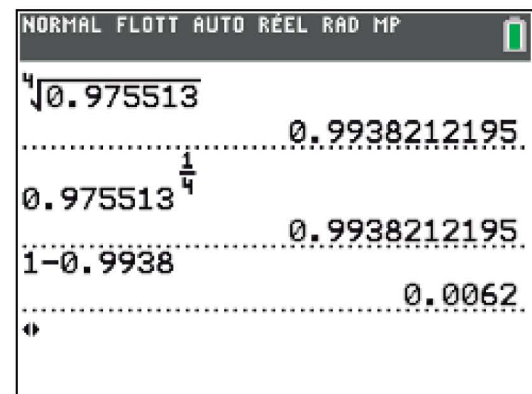
2.b. Taux moyen sur 4 ans

On cherche à présent le taux moyen annuel de baisse qui correspond à la même baisse globale. On cherche donc la valeur d'un coefficient multiplicateur unique positif C vérifiant $C \times C \times C \times C = C^4 = 0,975513$.

Or si a est un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2, l'unique réel strictement positif tel que $x^n = a$ est une racine n^{ième} de a , notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$. Ainsi $x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$.

L'équation $C^4 = 0,975513$ a donc pour solution $C = 0,975513^{\frac{1}{4}} \approx 0,9938$.

On calcule cette valeur à l'aide des touches \sqrt{x} $\frac{1}{x}$ de notre calculatrice.

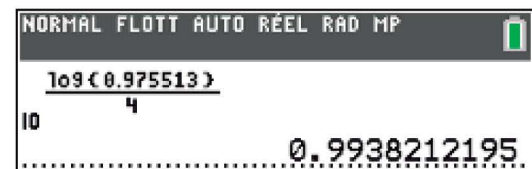


Le taux moyen annuel de baisse du cours de cette crypto-monnaie pendant ces quatre ans est donc d'environ $1 - 0,9938 = 0,0062 = 0,62\%$. Conclusion : cette crypto-monnaie a perdu pendant ces quatre ans en moyenne chaque année environ 0,62 % de sa valeur.

Remarque : pour résoudre l'équation $C^4 = 0,975513$, on pourrait aussi utiliser le logarithme décimal en procédant par équivalences soit $C^4 = 0,975513 \Leftrightarrow \log(C^4) = \log(0,975513) \Leftrightarrow 4 \times \log(C) = \log(0,975513)$ puis

$$4 \times \log(C) = \log(0,975513) \Leftrightarrow \log(C) = \frac{\log(0,975513)}{4} \Leftrightarrow C = 10^{\frac{\log(0,975513)}{4}}$$

On vérifie ce calcul avec notre calculatrice à l'aide des touches 2^{nd} \log .



3. Rendement de 7 % sur 5 ans

Pour obtenir un rendement de 7 % au terme des 5 années, on cherche un taux d'évolution lors de la cinquième année tel que le coefficient multiplicateur C_5 correspondant vérifie $CM_4 \times C_5 = 1,07$.

On obtient alors $C_5 = \frac{1,07}{CM_4} = \frac{1,07}{0,975513} \approx 1,0969$ (touche $\frac{\square}{\square}$ de la calculatrice) soit une augmentation du cours de la crypto-monnaie d'environ 9,69 % lors de la cinquième année.

