

TI-NACHRICHTEN

Ausgabe 1/15

INHALT

Dr. F. Schlöglhofer 1
3D-Darstellungen der Erdoberfläche

Dr. A. Roulier 6
Saturnmonde Janus und Epimetheus

H. Kammer 8
Messung des mechanischen Wärme-
äquivalents mit modernen Mitteln

I. Mgeladze, T. Lüthi 10
Peltier- und Piezo-Elemente

M. Tewes 13
Phasenverschiebung an
Wechselstromwiderständen

Dr. H. Heugl 16
Iterationsverfahren zur
Approximation irrationaler Zahlen

R. Vehling 21
Konfidenzintervalle
mit dem TI-Nspire™ CAS

Weitere Unterrichtsmaterialien:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³
finden Sie unter:

www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch



3D-Darstellungen der Erdoberfläche



Dr. Franz Schlöglhofer

Im Beitrag werden einige Möglichkeiten beschrieben, mit TI-Nspire™ Darstellungen von Kreisen und Kugeln anzufertigen sowie Berechnungen auszuführen. Beispielhaft werden Darstellungen von Kreisen auf der Erdoberfläche behandelt. Dabei wird näherungsweise für die Erdoberfläche Kugelgestalt angenommen. Als Radius wird der Erdradius mit 6370 km gewählt. Damit ergeben sich in den Berechnungen näherungsweise Entfernungen auf der Erdoberfläche.

Inhalt

Abschnitt 1: Ausgehend von der parametrischen Kreisdarstellung werden Äquatorlinie und Nullmeridian grafisch dargestellt. Darauf aufbauend wird eine Parameterdarstellung für einen Punkt der Kugeloberfläche entwickelt, die auf der geografischen Länge und Breite beruht. Damit ergibt sich eine parametrische Darstellung der Oberfläche der Kugel, wenn für die Parameter geeignete Intervalle gewählt werden.

Abschnitt 2: Mit der Formel für einen Punkt der Oberfläche wird eine Darstellung von Breiten- und Längenkreisen (Meridianen) eingegeben. Gesteuert wird durch Schieberegler.

Abschnitt 3: Es wird eine Formel zur Berechnung der kürzesten Entfernung von zwei Orten auf der Oberfläche hergeleitet.

Abschnitt 4, 5: Darstellungen für Orte auf der Kugeloberfläche werden entwickelt. Ein Großkreis durch zwei Punkte der Oberfläche (und den Kugelmittelpunkt) wird berechnet und in Parameterform dargestellt.

Die Abschnitte 3, 4 und 5 werden in der nächsten Ausgabe der TI-Nachrichten abgedruckt.

Anregungen für die Verwendung von TI-Nspire™

Zu diesem Artikel liegt in der Materialdatenbank die Datei Geo1_1.tns zum Download bereit. Geografische Länge und Breite können im Fenster 1.2 mit Schieberegler verändert werden. Die dazugehörigen Breiten- und Längenkreise werden ausschließlich in diesem



Fenster dargestellt. Im Fenster 1.3 können die geografische Länge und Breite von zwei Orten eingegeben werden. Alle weiteren Berechnungen und Darstellungen werden automatisch ausgeführt. Es sind keine weiteren Eingaben vorgesehen. Bei Verwendung der .tns-Datei als fertige Datei sollte zumindest die Herleitung der Formel für einen Punkt der Oberfläche im ersten Abschnitt behandelt werden sowie die Berechnung der Entfernung von zwei Punkten der Oberfläche im dritten Abschnitt. Damit können diverse Aufgaben gelöst werden, z.B. Entfernung des Heimatortes zum Äquator, Entfernung zum Pol, Darstellung von Kreisen allgemein in 3D u.ä.

Eigene Erstellung der Datei: Wer sich mehr mit Problemen der Darstellung als immer wichtiger werdender mathematischer Inhalt beschäftigen will, kann sich damit in den Abschnitten zwei und vier auseinandersetzen.

Je nach Aufgabenstellung können die Darstellungen selbst angefertigt werden oder gemeinsam entwickelt werden. Der Abschnitt fünf ist als Ergänzung gedacht, wenn noch die Erweiterung der Kreisgleichung in einer allgemeineren Lage beabsichtigt ist.

ZEICHENERKLÄRUNG



Computeralgebrasystem

TI-89 Titanium, Voyage™ 200



Graphische Taschenrechner

TI-82 STATS, TI-83 Plus, TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-84 Plus CE-T, TI-SmartView™ Emulator Software



Messwerterfassungssystem

CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle



TI-Nspire™ Technologie

(GTR, CAS, Software für Schüler, Lehrer-Software, Apps für iPad®, umfangreiches Zubehör)

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

ist es Ihnen gleich aufgefallen? Die erste Ausgabe der TI-Nachrichten des Jahres 2015 kommt in neuer Gestaltung zu Ihnen. Strukturierter, klarer, auf das Wesentliche konzentriert. Geblieben ist das von den Lesern geschätzte Konzept: eine breit gefächerte Palette an Ideen und Anregungen zum sinnvollen Einsatz von TI-Technologie im mathematischen und im naturwissenschaftlichen Unterricht – aus der Feder erfahrener Lehrerinnen und Lehrer aus Deutschland, Österreich und der Schweiz. Doch bei einer neuen Gestaltung allein möchten wir es nicht belassen. Deshalb ist uns Ihre Meinung wichtig. Im Beileger haben wir eine kleine Umfrage zusammengestellt, um von Ihnen zu erfahren, wie Sie sich in Zukunft die TI-Nachrichten wünschen: Welche Themen interessieren Sie? Welchen Wert haben für Sie die gedruckten Nachrichten und welchen die elektronische Ausgabe?

Die TI-Nachrichten sind natürlich nicht die einzigen Neuigkeiten des Jahres. Auf der jüngsten Didacta in Hannover feierten gleich zwei Geräte von Texas Instruments ihre Messepremiere: der TI-30X Plus Multiview™, ein wissenschaftlicher Taschenrechner, und der neue Graphikrechner TI-84 CE-T. Zudem steht seit wenigen Tagen das neueste Update 4.0 für TI-Nspire™ und TI-Nspire™ CAS zum Herunterladen bereit.

Der TI-30X Plus Multiview™ wurde vordergründig entwickelt, um die neuen Anforderungen des Kultusministeriums in Baden-Württemberg an einen schulartübergreifenden wissenschaftlichen Taschenrechner zu unterstützen. Erfreulicherweise zeigen die Rückmeldungen von vielen Lehrerinnen und Lehrern nicht nur auf der Messe in Hannover, sondern auf vielen Veranstaltungen im Land, dass das übersichtliche Bedienkonzept des Rechners den Nerv der Zeit trifft: der Rechner passt ideal in die Sekundarstufe I und bereitet dort gegebenenfalls den Einsatz leistungstärkerer wissenschaftlicher Taschenrechner, Grafikfähiger Taschenrechner und Computeralgebrasysteme vor.

Wichtigste Neuheit auf der Didacta war zweifellos die Premiere des neuen TI-84CE-T, selbstverständlich mit Farbdisplay. Der erste Eindruck: schlanker, leichter, modern - die zeitgemäße Interpretation eines weltweit millionenfach bewährten Rechners. In Frankreich und den Niederlanden überzeugte insbesondere die Press-to-Test-Funktion, die den Rechner auf Knopfdruck in einen von den Kultusministerien definierten sicheren Prüfungsmodus setzt: simpel, robust und durch eine blinkende LED auch optisch aus der Entfernung gut zu kontrollieren.

Wir würden uns freuen, wenn unsere Schulberater die Neuigkeiten Ihnen und Ihren Kolleginnen und Kollegen an der Schule direkt vorstellen dürfen. Und bitte nicht vergessen: unsere kleine Umfrage zur künftigen Ausrichtung der TI-Nachrichten, damit auch die nächsten Ausgaben Ihr Interesse finden – mit vielen Neuigkeiten!

Ihr TI-Team



1) Kreis- und Kugeldarstellung – Äquator, Nullmeridian, Oberfläche

Wir verwenden zur Darstellung von Kreislinien und Kugeloberflächen die Parameterdarstellung in 3D. In Abbildung 1 wird in einem NOTES-Fenster der Erdradius einfach als 6,37 gespeichert. In Abbildung 2 wird die Parameterdarstellung für eine Kreislinie in der xy-Ebene mit dem Radius r_e gezeigt. Dabei wird verwendet, dass jeder Punkt der Kreislinie in der xy-Ebene dargestellt wird durch

$$(r_e \cdot \cos(t); r_e \cdot \sin(t); 0)$$

Dabei kann man z.B. den Parameter t im Intervall $[0;360]$ (Gradmaß) wählen, um die gesamte Kreislinie darzustellen, man kann aber auch das Intervall $[-180;180]$ wählen, was den geografischen Längen eher entspricht.



Abb. 1

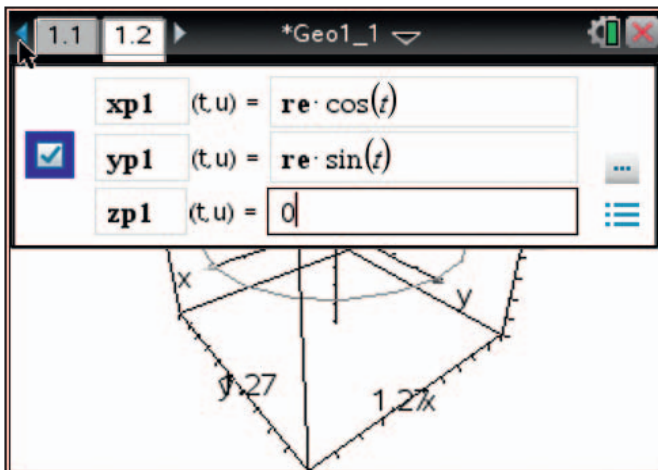


Abb. 2

Äquatorlinie: Dazu wird die Parameterdarstellung (Abb. 2) gewählt und der Parameter t wird im Intervall $[-180;180]$ angenommen. Damit kann für jede westliche und östliche Länge der zugehörige Punkt auf der Äquatorlinie dargestellt werden. Für $t = 0$ ergibt sich der Punkt der Äquatorlinie auf der x-Achse. Dies entspricht dem Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator. Für westliche Länge ist das Vorzeichen negativ, für östliche Länge positiv.

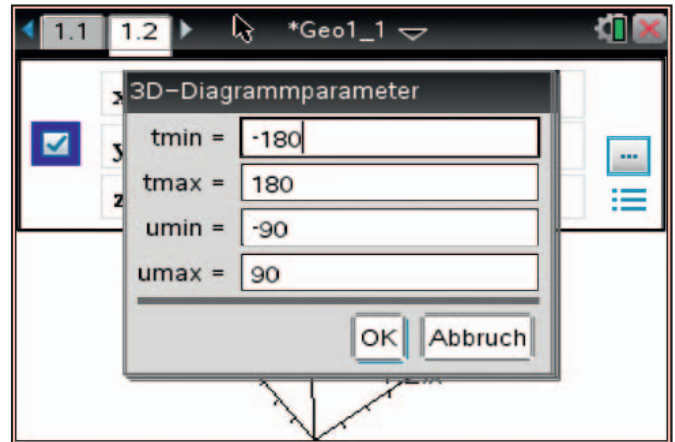


Abb. 3

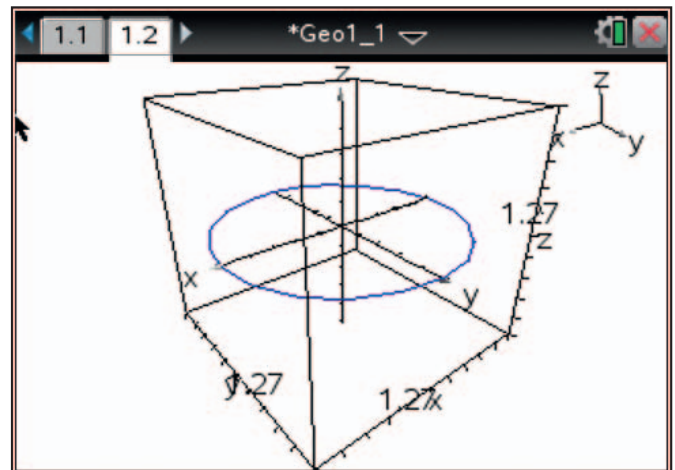


Abb. 4

Nullmeridian: Der Nullmeridian ergibt sich zum Beispiel als Halbkreis mit dem Parameter u im Intervall $[-90;90]$. Damit kann für jede südliche bzw. nördliche Breite der zugehörige Punkt dargestellt werden. Für $u=0$ ergibt sich der Punkt auf der x-Achse. Für nördliche Länge ist das Vorzeichen positiv, für südliche Breite negativ. Die folgenden Abbildungen geben die Parameterform für den Nullmeridian als Halbkreis an (Abb. 5) und die grafische Darstellung (Abb. 6).

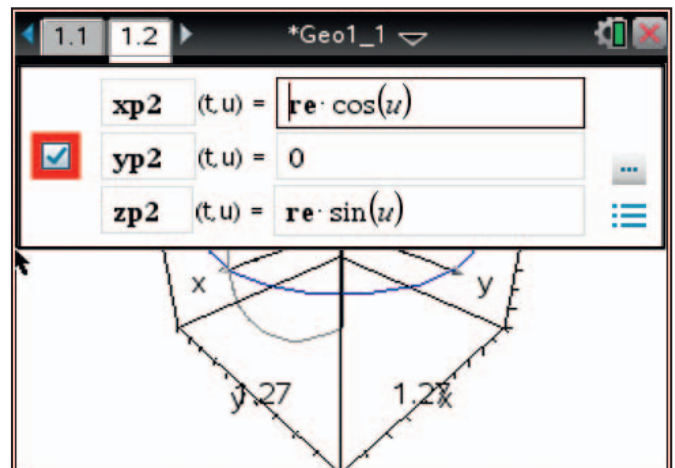


Abb. 5

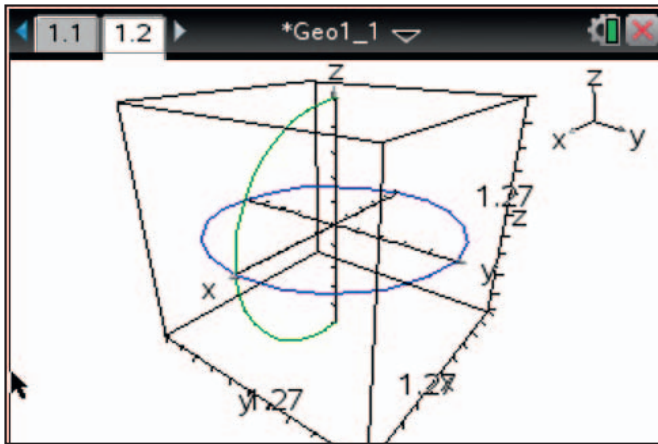


Abb. 6

Kugeloberfläche: Zur Darstellung der Erdoberfläche in Parameterform fassen wir die bisherigen Darstellungen zusammen. Ausgangspunkt ist die Parameterdarstellung der Äquatorlinie:

$$(r \cdot \cos(t); r \cdot \sin(t); 0)$$

Für jeden Punkt dieser Linie wird der zugehörige Meridian aufgetragen, damit ergibt sich die Parameterdarstellung:

$$(r \cdot \cos(t) \cdot \cos(u); r \cdot \sin(t) \cdot \cos(u); r \cdot \sin(u))$$

Mit den entsprechenden Grenzen ergibt sich nach einigen Formatierungen die 3D-Darstellung einer Kugel.

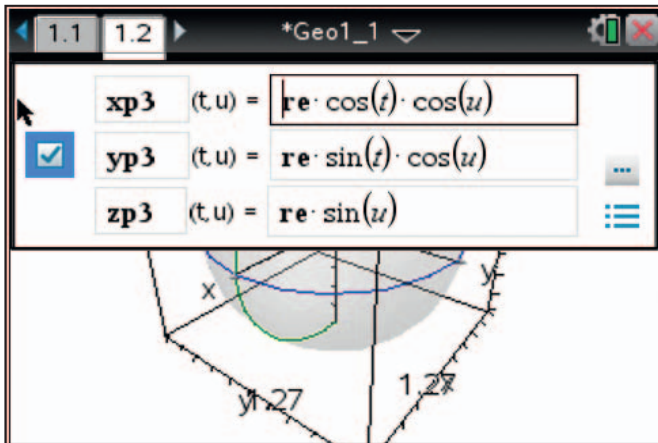


Abb. 7

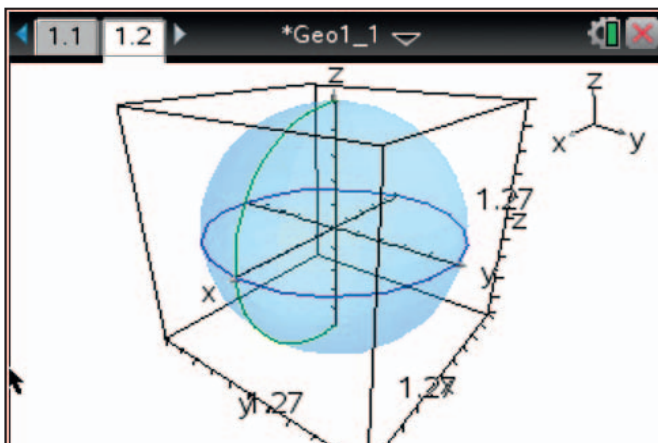


Abb. 8

2) Geografische Länge und geografische Breite

Die nächste Aufgabe ist die Darstellung eines Punktes auf der Kugeloberfläche, der durch die geografische Länge und geografische Breite gegeben ist. Zur übersichtlichen Gestaltung tragen wir den zugehörigen Breitenkreis und den Meridian ein (Abb. 9). Breitenkreis, Meridian und Punkt sind rot dargestellt. Für den Punkt selbst wird Kugelgestalt verwendet.

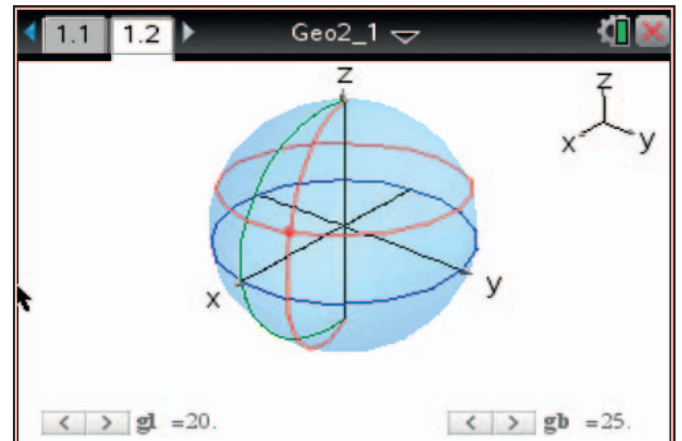


Abb. 9

Im folgenden Teil wird der Aufbau der Darstellung beschrieben:

Geografische Länge (**gl**) und Breite (**gb**) werden durch Schieberegler gesteuert. Die folgenden Abbildungen zeigen die Parameterdarstellungen der jeweiligen Kreise. Grundsätzlich gehen wir auch hier von der Formel für die Kugeldarstellung aus. Wir lassen nur jeweils einen Parameter konstant.

Für den Parameter **t** wird die geografische Länge **gl** eingesetzt. Es ergibt sich der zugehörige Meridian.

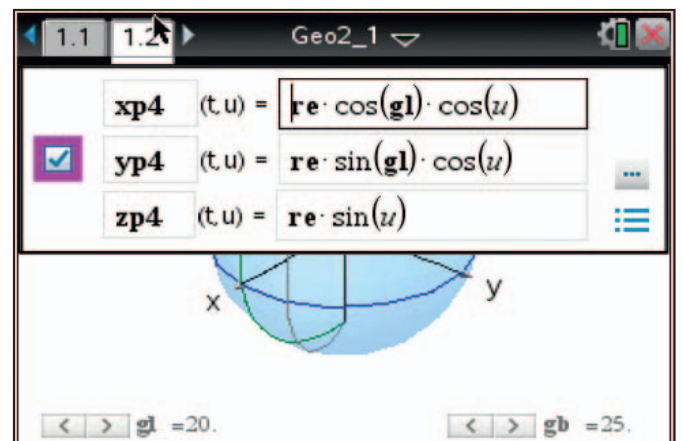


Abb. 10

Für den Parameter u wird die geografische Breite gb eingesetzt. Es ergibt sich der zugehörige Breitenkreis.

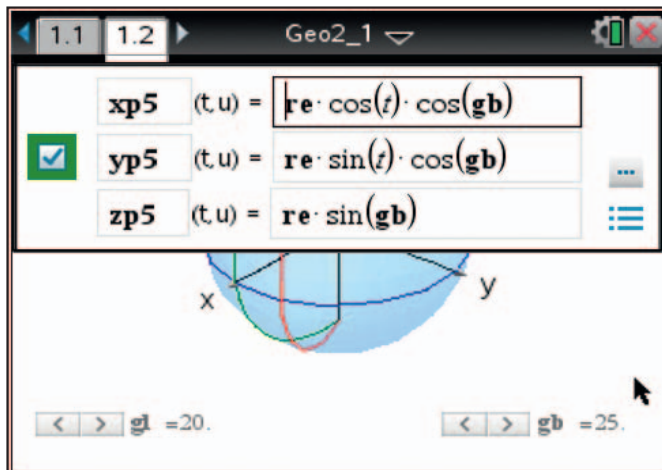


Abb. 11

Zusätzlich wurde hier noch der gefundene Schnittpunkt zwischen Meridian und Breitenkreis mit einer weiteren Kugeldarstellung in diesem Punkt deutlicher gemacht. (Diesen Teil der Aufgabenstellung könnte man mit Schülerinnen und Schülern auch weglassen).

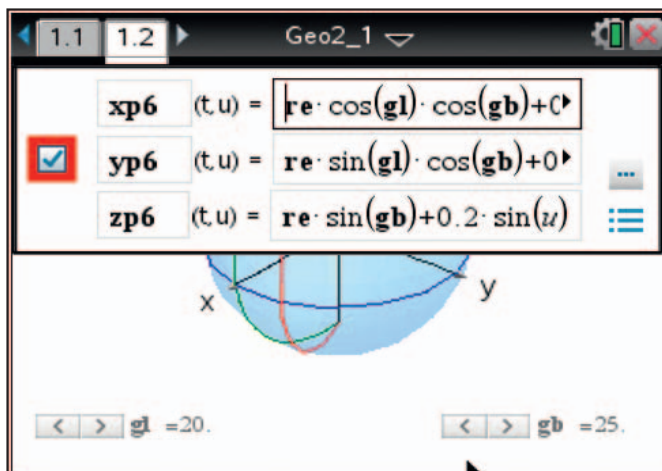


Abb. 12

Man geht aus vom Schnittpunkt des Meridians mit dem Breitenkreis. Darauf wird eine Kugel (hier mit Radius 0,2) gesetzt. Die drei Koordinaten dieser Darstellung lauten:

$$\begin{aligned} & (re \cdot \cos(gl) \cdot \cos(gb) + 0, 2 \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) ; \\ & re \cdot \sin(gl) \cdot \cos(gb) + 0, 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(u) ; \\ & re \cdot \sin(gb) + 0, 2 \cdot \cos(u)) \end{aligned}$$

Literatur

Weinhandl, Robert: *Die Verebnung der Welt – Kartographie im Mathematikunterricht* (Diplomarbeit, Universität Wien bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. S. Götz); Wien 2011

Autor
Dr. Franz Schlöglhofer, Linz (A)

TI-30X Plus MultiView™

Alles auf einen Blick!

- » Schulartübergreifend für Sek I/II geeignet.*
- » Einfache Bedienung, max. 2-fach-Belegung.
- » Umfangreiche Stochastikfunktionen.
- » Emulator-Software. Kostenlose Test-Version!
- » Unterrichtsmaterialien und Fortbildungen.

* Bitte orientieren Sie sich an den jeweiligen Zulassungsrichtlinien. Der Schulrechner erfüllt beispielsweise die Anforderungen des Ministeriums für Kultur, Jugend und Sport in Baden-Württemberg. Zudem ist er im Abitur des Freistaats Bayern zugelassen.

Saturnmonde Janus und Epimetheus

Dr. Alfred Roulier



Situation

Im Abstand von ca. 150'000 km umkreisen auf annähernd Kreisbahnen zwei kleine Monde den Planeten Saturn: Janus (Ø 179 km) und Epimetheus (Ø 113 km). Ihre Bahnradialen unterscheiden sich um nur 50 km. Weil der innere Mond gemäß 3. Keplerschem Gesetz etwas schneller läuft, holt er den äußeren in ca. 4 Jahren ein. Eigentlich sollte nun eine Kollision erfolgen, aber die beiden vollführen innerhalb von 100 Tagen ein Kreuzungsmanöver. Der innere Mond wechselt nach außen, der äußere nach innen. Sie kommen sich nie näher als 10'000 km.

Wir wollen die Himmelsmechanik dieses Phänomens berechnen. Dazu werden vereinfachend reine Kreisbahnen der Monde (die Bahnexzentrizitäten sind $< 10^{-2}$) und ein ruhender Saturn (seine Masse ist mehr als 10^8 -mal größer als jene der Monde) angenommen.

Drehimpuls- und Energieerhaltung

Aus der Literatur entnehmen wir folgende Werte:

- Gravitationskonstante $G = 4.979 \cdot 10^{-10} \text{ km}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ d}^{-2}$
- Masse Saturn $m_s = 5.68 \cdot 10^{26} \text{ kg}$
- Masse Janus $m_j = 1.912 \cdot 10^{18} \text{ kg}$
- Masse Epimetheus $m_e = 5.304 \cdot 10^{17} \text{ kg}$
- Anfangsabstand Janus – Saturn $r_j = 1.51472 \cdot 10^5 \text{ km}$
- Anfangsabstand Epimetheus – Saturn $r_e = r_j - 50 \text{ km}$

Aus den Mondmassen und den Bahnradialen kann man den Gesamtdrehimpuls I und die Rotationsenergie E berechnen. Zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω eines Mondes und seinem Bahnradius r im Schwerfeld des Saturns besteht die Beziehung

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r^3}}$$

(Gravitationskraft entspricht der Zentripetalkraft). Somit ergibt sich für den Drehimpuls und für die Rotationsenergie:

$$I = m_j \cdot r_j^2 \cdot \omega_j + m_e \cdot r_e^2 \cdot \omega_e = 5.055 \cdot 10^{29} \text{ kg} \cdot \text{km}^2 \cdot \text{d}^{-1}$$

$$E = m_j \cdot r_j^2 \cdot \omega_j^2 + m_e \cdot r_e^2 \cdot \omega_e^2 = 2.280 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{km}^2 \cdot \text{d}^{-2}$$

Es bietet sich nun an, zu prüfen, ob es unter Erhaltung von Drehimpuls und Energie ein anderes Bahnpaar mit Radien x_j und x_e gibt. Dazu sind zwei quadratische Gleichungen für diese Variablen zu lösen. In der Tat erfüllen 2 Radien-Paare die Erhaltungsbedingung, nämlich $\{x_{j1} = r_j, x_{e1} = r_j - 50\}$, unsere Anfangswerte, und $\{x_{j2} = r_j - 22, x_{e2} = r_j + 28\}$, die Bahnen nach der Kreuzung. Die Monde tauschen demnach nicht exakt ihre Bahnen. Das würden sie nur tun, wenn ihre Massen identisch wären. Hingegen sind nach 2 Kreuzungsmanövern die Bahnen wieder gleich.

Diesen Tatbestand hat 1990 ein Team „Jugend forscht“ aus Deutschland ebenfalls festgestellt: *„Berechnung und Simulation der Bewegung der koorbitalen Saturnmonde Janus (1980-S1) und Epimetheus (1980-S3)“* unter www.jugend-forscht/projekt Datenbank

„Im Gegensatz zur existierenden Literatur stellten die Jungforscher fest, dass bei dem ersten Aufeinandertreffen der innere Mond zum äußeren wird und umgekehrt – allerdings tauschen die Monde ihre Bahnen nicht exakt aus. Beim zweiten Zusammentreffen nehmen die Monde dann wieder ihre ursprünglichen Bahnradialen ein.“

Das Kreuzungsmanöver

Bei der Berechnung des Kreuzungsmanövers als ebenes Dreikörperproblem sind Schwierigkeiten zu erwarten: Die Integration erstreckt sich über viele Mondumläufe; denn das Kreuzungsmanöver dauert ca. 100 Tage, die Umlaufdauer aber nur ca. 0.7 Tage. Daher die Idee, die gegenseitige Beeinflussung von J und E in einem mit Winkelgeschwindigkeit ω mitrotierenden Koordinatensystem zu untersuchen. Dabei soll z.B. Janus in Ruhe bleiben, also

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r^3}} = 9.021 \cdot \text{d}^{-1}.$$

Auf die Monde wirken im rotierenden Koordinatensystem 4 Kräfte, nämlich K_s = Anziehungskraft des Saturns, K_z = Zentrifugalkraft zufolge der Rotation des Bezugssystems, K_c = Corioliskraft und K_m = gegenseitige Anziehung der Monde K_m . Weil $K_s \cong K_z \gg K_m$, tauchen die interessierenden Unterschiede erst viele Stellen nach dem Komma auf. Man könnte nun über eine Reihenentwicklung von $K_s + K_z$ die Saturnmasse näherungsweise „kürzen“. Es hat sich aber gezeigt, dass TI-Nspire™ die Differentialgleichungen ohne diese Maßnahme problemlos löst. Der Kraftvektor K_m bewirkt eine radiale Beschleunigung, für den äusseren Mond nach innen und für den inneren Mond nach aussen. Zwar erzeugt K_m beim äusseren Mond eine Verlangsamung, aber Saturn mischt mit und sorgt über das 3. Keplersche Gesetz netto für eine Zunahme der Tangentialgeschwindigkeit, gegengleich für den inneren Mond.

Differentialgleichungen

Die 4 Kräfte, welche beispielsweise auf den Mond Janus wirken (für Epimetheus mit entsprechendem Index), sind

$$K_s = - \frac{G \cdot m_s \cdot m_j}{|\vec{x}_j|^2} \cdot \frac{\vec{x}_j}{|\vec{x}_j|}$$

$$K_z = m_j \cdot \omega^2 \cdot \vec{x}_j$$

$$K_c = 2 \cdot m_j \cdot (\vec{x}_j \times \omega)$$

$$K_m = - \frac{G \cdot m_e \cdot m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_e|^2} \cdot \frac{|\vec{x}_j - \vec{x}_e|}{|\vec{x}_j - \vec{x}_e|}$$

Das Vektorprodukt im Ausdruck für die Corioliskraft ergibt

$$(\vec{x}_j \times \omega) = [\omega \cdot v_{y_j} - \omega \cdot v_{x_j}, 0]$$

Damit ergeben sich folgende 8 Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_j}{dt} = v_{x_j} \quad \frac{dy_j}{dt} = v_{y_j}$$

$$\frac{dv_{x_j}}{dt} = 2 \cdot v_{y_j} \cdot \omega + x_j \cdot \omega^2$$

$$- \frac{G \cdot m_s \cdot x_j}{\{x_j^2 + y_j^2\}^{3/2}} + \frac{G \cdot m_e \cdot (x_e - x_j)}{\{(x_j - x_e)^2 + (y_j - y_e)^2\}^{3/2}}$$

$$\frac{dv_{y_j}}{dt} = -2 \cdot v_{x_j} \cdot \omega + y_j \cdot \omega^2$$

$$- \frac{G \cdot m_s \cdot y_j}{\{x_j^2 + y_j^2\}^{3/2}} + \frac{G \cdot m_e \cdot (y_e - y_j)}{\{(x_j - x_e)^2 + (y_j - y_e)^2\}^{3/2}}$$

Weitere 4 Differentialgleichungen analog mit Index e anstelle von j und umgekehrt.



Anfangsbedingungen

Janus sei zu Beginn im rotierenden Bezugssystem in Ruhe, also $vx_j(0) = vy_j(0) = 0$. Sein Ort sei bei $x_j(0) = 0, y_j(0) = r_j$.

Epimetheus dreht sich etwas schneller um Saturn als Janus.

$$\omega_e = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{(r_j - 50)^3}} = 9.02638 \text{ d}^{-1}$$

Das Kreuzungsmanöver dauert ca. $T = 100$ Tage. Somit soll Epimetheus zu Beginn um den Winkel $\varphi = T/2 \cdot (\omega_e - \omega) = 0.223466$ zurückliegen. Der Abstand Epimetheus – Saturn ist $d = -50$ km kürzer. Die Anfangskordinaten betragen dann:

$$x_e(0) = (r_j + d) \cdot \cos\left(\frac{T}{2} - \varphi\right) = 33534 \text{ km}$$

$$y_e(0) = (r_j + d) \cdot \sin\left(\frac{T}{2} - \varphi\right) = 147645 \text{ km}$$

Die Anfangsgeschwindigkeitskomponenten sind

$$vx_e(0) = (r_j + d) \cdot (\omega_e - \omega) \cdot \cos(T - \varphi) = 659.87 \text{ km} \cdot \text{d}^{-1}$$

$$vy_e(0) = (r_j + d) \cdot (\omega_e - \omega) \cdot \sin(T - \varphi) = 149.96 \text{ km} \cdot \text{d}^{-1}$$

Simulation

TI-Nspire™ löst die 8 gekoppelten Differentialgleichungen rasch und genau. Man öffnet einen Graphen, wählt unter Eingabe „7 Differentialgleichung“ und trägt die 8 Gleichungen sowie die Anfangswerte ein. Als Resultat erhält man 8 Interpolationsfunktionen. Der Rechner gibt ihnen automatisch einen Namen, beispielsweise für die x-Koordinate von Janus $de1.y5_01()$. Man kann mit diesen zwar weitere Berechnungen ausführen, aber nur mühsam, denn bei jeder Anwendung werden sie neu erzeugt. Man kommt besser voran, wenn man sie zuerst in eine Liste „auspackt“:

```

abstand:=seq(sqrt((de1.y5_01(i)-de1.y7_01(i))^2+(de1.y6_01(i)-de1.y8_01(i))^2),i,1,100)
• { 33095.1,32427.3,31762.6,31101.4,30443.8,29789.9,29140.,28494.2,27852.7,27215.8,26583.7
zeit:=seq(i,i,1,100)
• { 1.2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35;
bahnj:=seq(sqrt((de1.y5_01(i))^2+(de1.y6_01(i))^2)-r0,i,1,100)
• { -0.050947,-0.109334,-0.160089,-0.225144,-0.281328,-0.349934,-0.413713,-0.486465,-0.5583
bahne:=seq(sqrt((de1.y7_01(i))^2+(de1.y8_01(i))^2)-r0,i,1,100)
• { -49.8223,-49.609,-49.4268,-49.1914,-48.9875,-48.7413,-48.5122,-48.2477,-47.9773,-47.7061;

```

Abb. 1

Wir erwarten für den Abstand zwischen J und E ein Trogprofil mit einem Minimum von ca. 10'000 km nach ca. 50 Tagen und dass die Abstände Mond – Saturn in Funktion der Zeit zwei sich kreuzende Kurven zeigen. Genau dies ist der Fall:

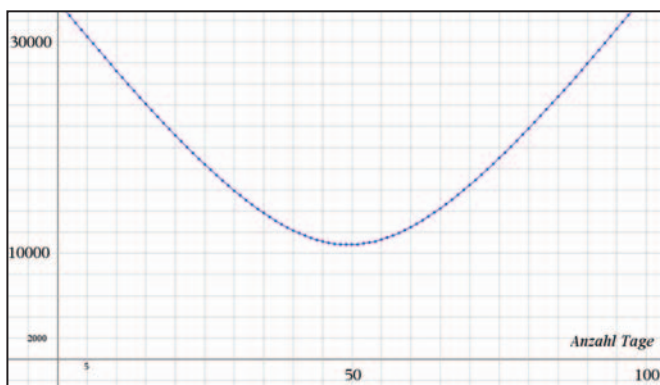


Abb. 2

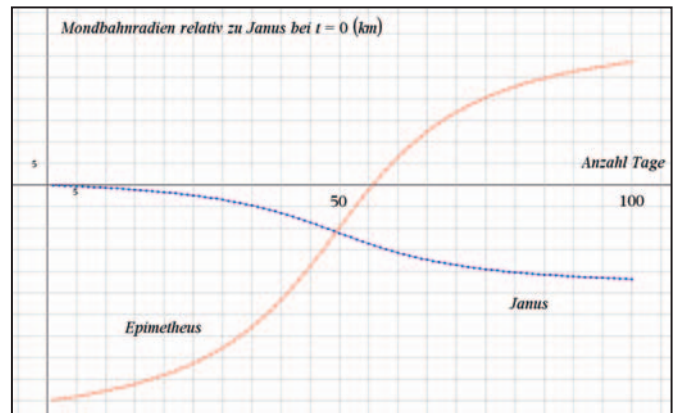


Abb. 3

Die Abstände erreichen asymptotisch die im Abschnitt Impuls- und Energieerhaltung berechneten Werte. Aus Kreisbahnen werden wieder Kreisbahnen. In Wirklichkeit sind die Bahnen schwach elliptisch. Der Aufwand, dies bezüglich genauer zu rechnen, lohnt sich indessen nicht; die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge sind anhand der Kreisbahnen hinreichend klargelegt worden.

Quellen

H. Lesch, „Sternstunden des Universums“, Hans Bébié, Bern



Autor

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)

Erstaunlich schlank. Extrem handlich. Eindeutig TI-84 Plus.

NEU

Verfügbar im
Frühsommer 2015.

TI-84 Plus CE-T

Messung des mechanischen Wärmeäquivalents mit modernen Mitteln



Hans Kammer

Das mechanische Wärmeäquivalent erlaubt die Berechnung der bei mechanischer Reibung entstehenden Wärme. J.P. Joule wies 1845 experimentell nach, dass zur Erwärmung von 1 kg Wasser um 1 °C eine Arbeit von 4186 Newton · Meter (Joule) erforderlich ist (Abb. 1). Joules mechanisches Wärmeäquivalent wies damit den Weg zu einer entscheidenden Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik.

Im Schulunterricht ist das Joule'sche Experiment von grundlegender Bedeutung und wird meist mit dem klassischen Gerät der Firma Leybold (Abb. 2) durchgeführt.

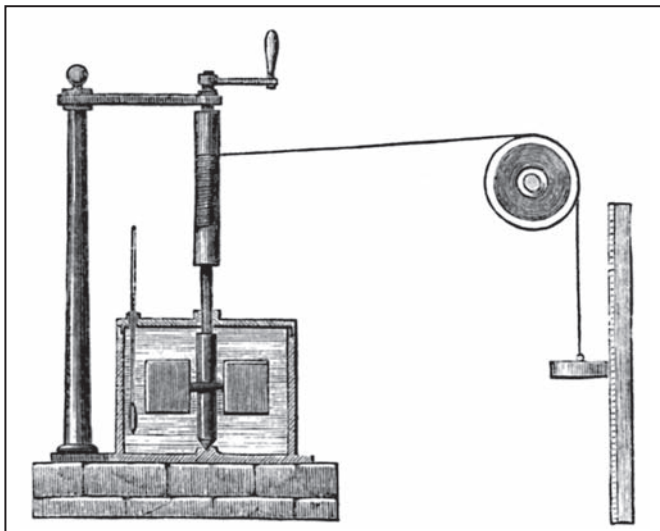


Abb. 1: Joule'sche Apparatur zum mechanischen Wärmeäquivalent (1869)

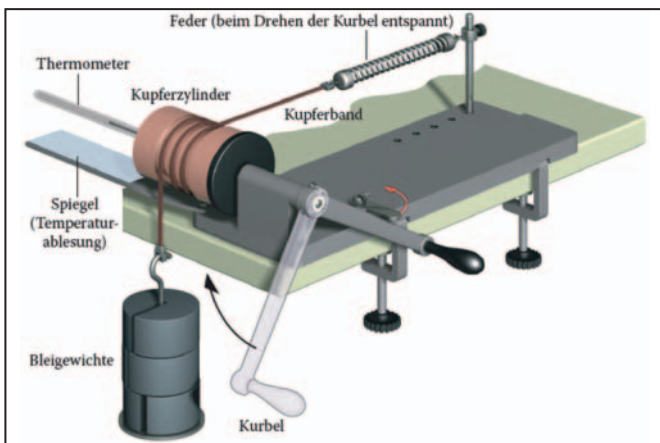


Abb. 2: Schulgerät (Leybold, Nr. 388 00-06)

Mit diesem Gerät wird die spezifische Wärmekapazität eines rotierenden Kupfer- oder Aluminiumzylinders durch Umwandlung von Reibungsarbeit in Wärme direkt gemessen. Ein weiches Band oder eine Kunststoffschnur umschlingt einen massiven Kupfer- oder Aluminiumzylinder (Durchmesser d , Masse m) in einigen Windungen.

Am einen Ende des Bands hängt ein Gewichtsstein (z.B. Bleigewichte, Masse M), das andere Ende wird mit einer Feder F gespannt. Im Zylinder steckt ein Flüssigkeitsthermometer, das mitrotiert und mithilfe eines Spiegels abgelesen werden kann (Abb. 2).



Abb. 3: Apparatur zum Wärmeäquivalent mit Temperatursonde (z. B. Go!Temp der Firma Vernier)

Wir ersetzen dieses Thermometer durch eine Temperatursonde (z.B. Go!Temp von Vernier) und messen mithilfe eines Messprogramms, hier mit der Vernier DataQuest Applikation des Rechners oder der Software TI-Nspire™ CX CAS (Abb. 3).

Setzt man den Versuch als Demonstrationsexperiment im Unterricht ein, hat dies den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler den Temperaturanstieg während des Drehens an der Kurbel direkt beobachten können (Abb. 4 und 5).

Als Wärmekontaktmedium zwischen Sonde und Kupferzylinder wird ein Silikonfett eingesetzt. Dreht man die mit dem Kupferzylinder verbundene Kurbel, entspannt die Feder, so dass das gesamte Gewicht $M \cdot g$ des Gewichtssteins als Reibungskraft auf den Kupferzylinder wirkt. Pro Umdrehung wird so eine mechanische Arbeit $W = M \cdot g \cdot d \cdot \pi$ verrichtet, welche dem Kupferzylinder die Wärmemenge $\Delta Q = c_{Cu} \cdot m \cdot \Delta \vartheta$ zuführt.

Dabei nimmt die innere Energie dieses Körpers um den Betrag ΔQ zu. Macht man z Umdrehungen mit der Kurbel, so misst man eine Temperaturzunahme von $\Delta \vartheta$. Setzt man die gesamte verrichtete mechanische Arbeit $z \cdot W$ gleich der dem Kupfer- bzw. Aluminiumzylinder zugeführten Wärme $c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$, so erhält man für die spezifische Wärmekapazität von Kupfer:

$$c = \frac{z \cdot M \cdot g \cdot d \cdot \pi}{m \cdot \Delta \vartheta}$$



Für ansprechende Messresultate spielt wegen der zu erwartenden Wärmeverluste (vor allem durch Konvektion und Strahlung) die Wahl der Anfangstemperatur eine Rolle. Ist bei der Erwärmung durch Reibung eine Temperaturdifferenz von z.B. 5 °C zu erwarten, so sollte die Anfangstemperatur des Kupfer- bzw. Aluminiumzylinders ca. 2,5 °C unter die Zimmertemperatur abgesenkt werden. So können die Wärmeverluste näherungsweise kompensiert werden. Zu diesem Zweck wird der Zylinder vor der Durchführung des Versuchs z.B. in kaltes Leitungswasser getaucht.

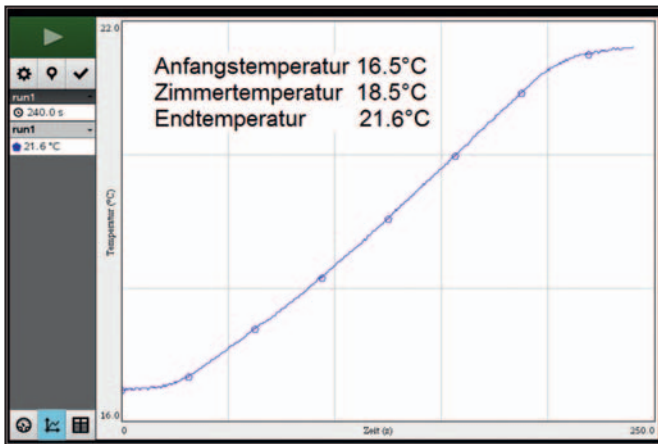


Abb. 4: Temperaturanstieg des Kupferzylinders

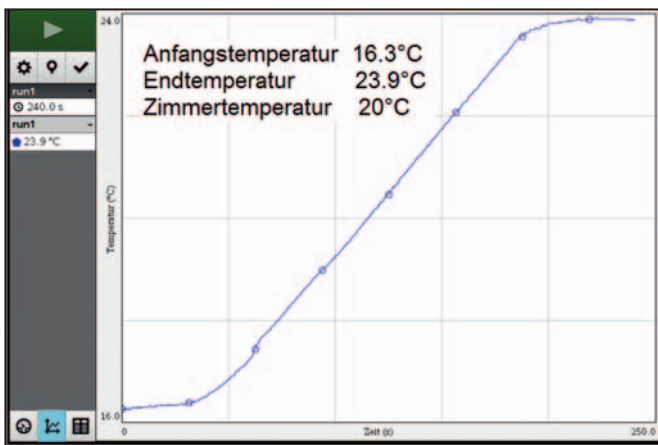


Abb. 5: Temperaturanstieg des Aluminiumzylinders

1. Experiment Kupferzylinder (Abb. 4)

Masse $m_{Cu} = (0,663 \pm 0,001) \text{ kg}$
 Durchmesser $d_{Cu} = (0,0469 \pm 0,0001) \text{ m}$
 Masse Gewichtsstein $M = (5,00 \pm 0,01) \text{ kg}$
 Anzahl Umdrehungen $z = (200 \pm 1) \text{ (Zählwerk)}$
 Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = (21,6 - 16,5) \text{ °C} = 5,1 \text{ °C} \pm 0,2 \text{ °C}$

$$c_{Cu} = \frac{z \cdot M \cdot g \cdot d_{Cu} \cdot \pi}{m_{Cu} \cdot \Delta\vartheta}$$

$$= \frac{200 \cdot 5 \cdot 9,81 \cdot 0,0469 \cdot \pi}{0,663 \cdot 5,1} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}$$

$$= (427 \pm 21) \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}$$

Der resultierende Wert von $(427 \pm 21) \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{°C})^{-1}$ liegt ca. 10% über dem Literaturwert von $383 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{°C})^{-1}$ bei einem Messfehler von ca. 5%.

Die systematische Abweichung dürfte auf Wärmeverluste (vor allem durch Konvektion und Strahlung) zurückzuführen sein, da das Mittel zwischen Anfangs- und Endtemperatur $0,6 \text{ °C}$ über der Zimmertemperatur liegt.

Beim zweiten Experiment mit einem Aluminiumzylinder lag das Mittel zwischen Anfangs- und Endtemperatur nur ca. $0,1 \text{ °C}$ über der Zimmertemperatur. So entstand ein besseres Resultat:

2. Experiment Aluminiumzylinder (Abb. 5)

Masse $m_{Al} = (0,216 \pm 0,001) \text{ kg}$
 Durchmesser $d_{Al} = (0,0470 \pm 0,0001) \text{ m}$
 Masse Gewichtsstein $M = (5,00 \pm 0,01) \text{ kg}$
 Anzahl Umdrehungen $z = (200 \pm 1) \text{ (Zählwerk)}$
 Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = (23,9 - 16,3) \text{ °C} = 7,6 \text{ °C} \pm 0,2 \text{ °C}$

$$c_{Al} = \frac{z \cdot M \cdot g \cdot d_{Al} \cdot \pi}{m_{Al} \cdot \Delta\vartheta}$$

$$= \frac{200 \cdot 5 \cdot 9,81 \cdot 0,0470 \cdot \pi}{0,216 \cdot 7,6} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}$$

$$= (877 \pm 35) \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}$$

Hier liegt der Mittelwert zwischen Anfangs- und Endtemperatur ($16,3 \text{ °C}$ und $23,9 \text{ °C}$) bei $20,1 \text{ °C}$, also praktisch bei der Zimmertemperatur. Deshalb erhalten wir mit $(877 \pm 35) \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{°C})^{-1}$ ein ausgezeichnetes Resultat, das nur ca. 1% vom Literaturwert $c_{Al} = 896 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{°C})^{-1}$ abweicht.

Ich danke meinen Kollegen Jürg Barblan, Niklaus Koch und Thomas Thormeier sowie der Schulleitung des Gymnasiums Thun für die kollegiale Zusammenarbeit und die Möglichkeit, die Geräte der Physiksammlung zu benutzen.

Literatur

Leybold Didactic GmbH, Gebrauchsanweisung 388 00-06, Gerätegruppe zum mechanischen und elektrischen Wärmeäquivalent, www.ld-didactic.de/documents/en-US/GA/GA/3/388/38800de.pdf

Autor
 Hans Kammer, Bern (CH)



1. Hintergrund

Die Materialeigenschaften eines Stoffes werden wesentlich durch seinen atomaren Aufbau bestimmt. Mit der Struktur-Eigenschafts-Beziehung eines Stoffes können seine physikalischen Eigenschaften besser verstanden und nachvollzogen werden.

In den folgenden Experimenten werden zwei Bausteine untersucht: Das Peltier-Element und das Piezo-Element, die beide eine Spannung erzeugen können. Beim Peltier-Element ist die Ursache eine Temperaturänderung, beim Piezo-Element eine Druckänderung. Dabei verändert sich jeweils eine räumliche Anordnung im System. Bei Peltier-Elementen ändert sich die Verteilung unterschiedlich energetischer Elektronen und bei Piezo-Elementen sind es die Atome.

1.1 Peltier-Elemente (PE)

Das Peltier-Element (PE) basiert auf einer umkehrbaren Wechselwirkung zwischen Temperatur und Elektrizität. Legt man zwei Leiter mit unterschiedlichen Temperaturen zusammen, bewegen sich durch Diffusion die „warmen“ energetischen Elektronen zu dem kalten Leiter und Elektronen mit wenig Energie in die entgegengesetzte Richtung. Eine sogenannte **Seebeck-Spannung** entsteht durch das Ungleichgewicht der Elektronen-Strömung. Die Spannung ist proportional zur Temperaturdifferenz: $U \sim T_2 - T_1$

Der Proportionalitätskoeffizient ist sehr klein und liegt für Metalle bei Raumtemperatur in der Größenordnung von etwa $10 \mu\text{V/K}$.

Der **Peltier-Effekt** beschreibt den inversen Seebeck-Effekt. Ein elektrischer Stromfluss bewirkt eine Änderung des Wärmetransportes.

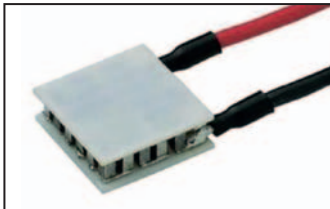


Abb. 1: Peltier-Element aus Halbleitern

Während der Seebeck-Effekt das Entstehen einer Spannung beschreibt, tritt der Peltier-Effekt durch das Fließen eines elektrischen Stromes auf, wobei die bewegten Elektronen neben der Ladung e^- auch immer Energie transportieren. Beim Übergang von einem Material zum anderen ändert sich die mit den Elektronen transportierte Energie. Die Differenz wird an der Kontaktstelle als Wärme freigesetzt oder aufgenommen. Dieser Effekt ist jedoch bei Metallen sehr gering. Um den Wirkungsgrad des Peltier-Effekts zu vergrößern, werden zwei Halbleiter verwendet. Die Peltier-Elemente (PE, Abb. 1) bestehen aus zwei quadratischen Platten aus Aluminiumoxid-Keramik und dazwischen eingelöteten Halbleiter-Quadern.

PE können für schnelle Kühlung (zum Beispiel bei Kühlboxen) eingesetzt werden.

1.2 Piezo-Elemente (Pz)

Pierre und Jacques Curie entdeckten bei ihren Experimenten mit Turmalin, Quarz und Rochellesalz-Kristallen (Seignette-Salz, Kaliumnatriumtartrat-Tetrahydrat $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$), dass sie durch Deformation der Proben deren Polarisierung auslösen konnten. Sie nannten den Effekt nach dem griechischen Wort piezein = drücken **Piezo-Effekt**. Dabei ist die gemessene Spannung direkt proportional zu der ausgeübten Kraft $U \sim F$.

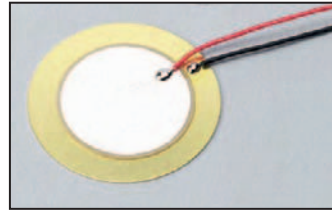


Abb. 2: Piezokeramischer Schallwandler

Gabriel Lippmann sagte 1881 mit Hilfe mathematischer Ableitungen von thermodynamischen Grundlagen einen inversen Effekt voraus. Die Gebrüder Curie konnten diesen Umkehr-Piezo-Effekt bald darauf experimentell nachweisen. Dabei beobachtet man eine relative Verformung des Körpers nach Anlegen einer Spannung $U \sim S$.

Damit können piezoelektrische Materialien als Sensoren (Mikrofon) oder als Aktoren (Lautsprecher) benutzt werden.

2. Durchführung

Für Untersuchung der Eigenschaften sowohl der PE als auch der Pz eignet sich das Digitale Messwerterfassungssystem (DMS) gut.

2.1 Peltier-Elemente

Material: Computer mit Messwerterfassung; Netzgerät; Spannungssensor; zwei ca. $3 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ Aluminium- oder Kupferplatten; PE $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$ (max. Strom 3 A; Nennspannung max. 1,9 V; Max. Operating Temperatur: 138°C), Solarmotor, n-Pentan (Achtung, gesundheitsschädlich) oder Aceton oder Eis.

Thermospannung

Das Peltier-Element (PE) wird zwischen den zwei Aluminium- oder Kupferplatten eingelegt und das Ganze wird mit Kabelbindern zusammen gezurrt oder mit Plastikschrauben befestigt. PE an Spannungsmessgerät anschließen und eines der Metallplättchen mit Eis bzw. n-Pentan oder Aceton, das verdunstet, kühlen. Das andere Metallplättchen wird mit einem LötKolben erhitzt. Der Anstieg der Spannung wird mit der Messwerterfassung beobachtet (Abb. 4). Die Messung kann durch Verwendung von Wärmeleitpaste zwischen dem PE und den Platten verbessert werden.

Einstellungen: Messmodus: Time Based; 10 Stichproben; Dauer 100 s.

Thermogenerator

Zwei PE werden, wie oben beschrieben, in denselben zwei Metallplättchen eingelegt. Das eine PE wird mit dem Netzgerät verbunden, das andere PE wird am Spannungsmessgerät angeschlossen. Das Netzgerät wird angeschaltet (ca. 3 A; 0,8 V).



Abb. 3: Zwei PE zwischen zwei Kupferplatten. Eines wird am Netzgerät angeschlossen, das andere am Spannungsmessgerät.



An den Metallplättchen des am Netzgerät angeschlossenen PE entwickelt sich eine Temperaturdifferenz, welche durch die Wärmeleitfähigkeit der Metallplättchen auf das andere PE übertragen wird. Damit lässt sich eine Spannung am zweiten PE erzeugen und mit dem Messwertsystem erfassen.

Einstellungen: Messmodus: Time Based; 5 Stichproben; Dauer 150 s.

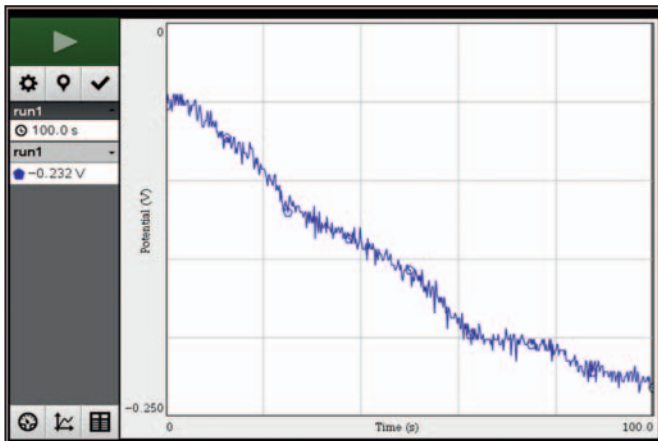


Abb. 4: Thermospannung, PE zwischen Kupferplatten

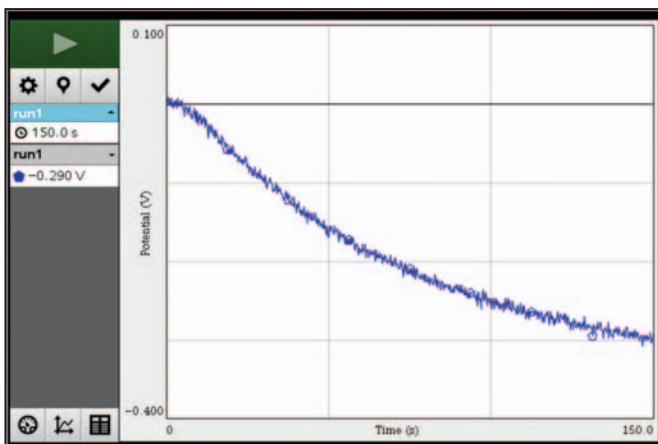


Abb. 5: Thermogenerator, PE zwischen Aluminiumplatten

Mit einem PE einen Solarmotor betreiben

Ein Motor (Abb. 6), der in seinen Anlaufesigenschaften und Betriebsdaten mit hochwertigen Systemen zu vergleichen ist, läuft bereits bei geringster Energie an (Betriebsspannung 0,5 V–6 V; Anlaufstrom 10 mA).



Abb. 6: Solarmotor mit geringem Innenwiderstand

Ein solcher Motor kann mit einem PE betrieben werden (Abb. 7). Erwärmt man eine Seite zum Beispiel mit dem LötKolben und die andere Seite wird

mit Eiswasser, Pentan oder Aceton gekühlt, so beginnt sich die Scheibe zu drehen. Interessant wäre es, die eine Seite mit fokussierten Sonnenstrahlen zu heizen.

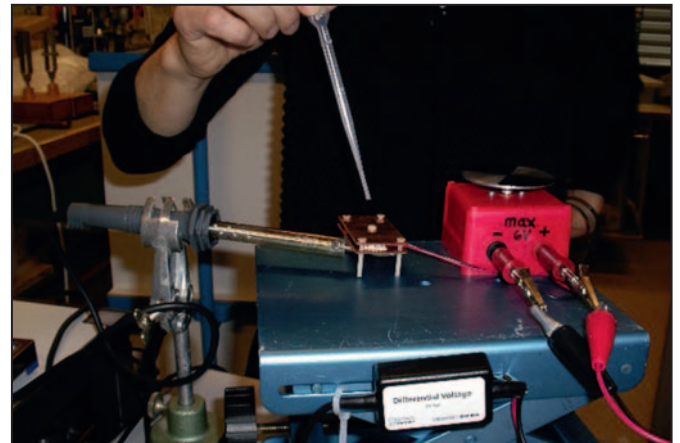


Abb. 7: PE bringt einen Solarmotor zum Drehen

2.2 Piezo-Elemente (Pz)

Material: Computer mit Messwertfassung; Spannungssensor, div. Piezoelektrische Materialien (Quarz, Seignettesalz-Kristall⁽¹⁾, Piezokeramische Schallwandler, Turmalin), Kaliumaluminiumsulfat-Kristall (Alaun, nicht piezoelektrisch, zur Kontrolle), Steckplatine, Leuchtdiode, Transistor, Batterie 4,5 V, diverse Kabel, Alufolie oder Kupferstreifen, Wäscheklammern oder Holzplättchen.

Messung Spannungssignal

Ein piezokeramischer Schallwandler (Pz) wird an das Spannungsmessgerät angeschlossen und die Messwertfassung gestartet. Der Pz wird gedrückt oder leicht gebogen und das Spannungssignal verfolgt (Abb. 10).

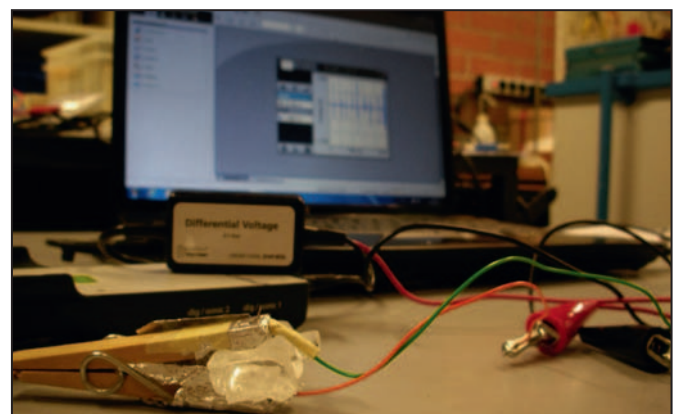


Abb. 8: Seignette-Kristalle in leitfähiger Wäscheklammer eingespannt mit Verbindung zum Spannungsmessgerät

Dasselbe Experiment kann auch mit den verschiedenen Kristallen durchgeführt werden, wobei die Kristalle leitend mit der Spannungssonde verbunden werden müssen. Das kann wie in Abb. 8 mit Wäscheklammern geschehen, welche mit Alufolie oder Kupferstreifen eingepackt sind. Der Druck soll bei den Kristallen in verschiedenen Orientierungen erfolgen, da der Piezo-Effekt richtungsabhängig ist (Abb. 9). Zur Kontrolle kann auch ein unipolarer Alaun untersucht werden.

Einstellungen: Messmodus: Time Based; 5 Stichproben; Dauer 10 s

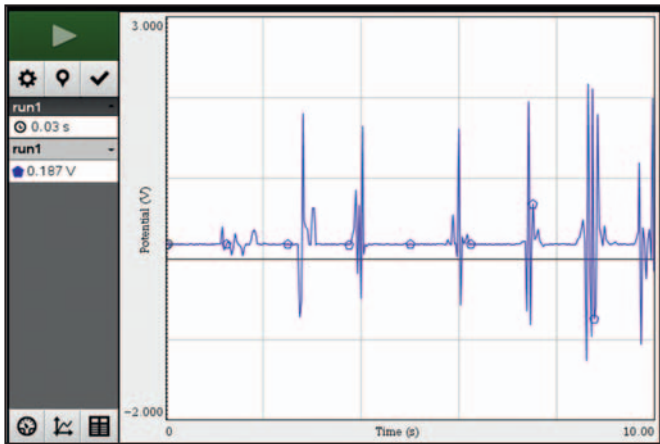


Abb. 9: Spannungssignal bei Seignette-Kristalle

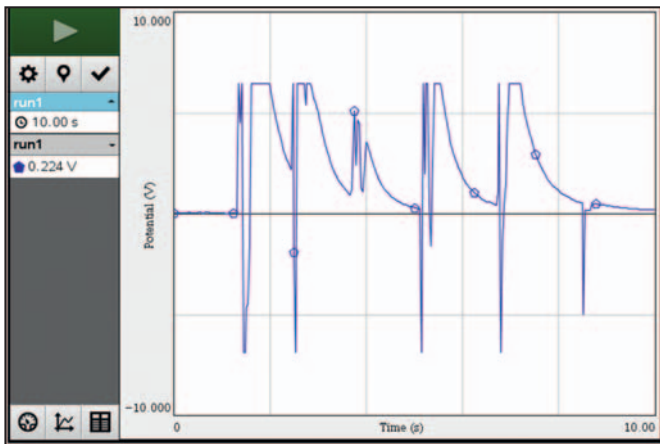


Abb. 10: Spannungssignal bei Piezokeramischer Schallwandler

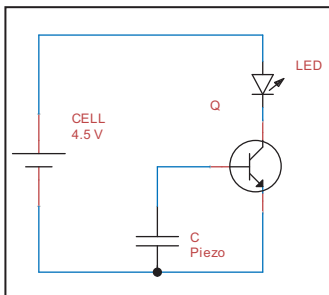


Abb. 11: Schaltung LED mit Pz

Piezo-Element als Signalsteuerung mit Transistor als Schalter

Ein Transistor kann als Schalter dienen. Ist keine Spannung auf der Basis des Transistors, so fließt kein Strom und der Stromkreis ist nicht geschlossen. Durch Druck auf ein Pz-Element wird eine Spannung auf die Basis gegeben, Strom fließt, die LED leuchtet. Dazu kann ein einfaches Schalt-schema nach Abb. 9 auf einer Steckplatine aufgebaut werden. Als Pz kann alternativ der Schallwandler oder ein piezoelektrischer Kristall eingebaut werden. Durch Druck wird die LED zum Leuchten gebracht.

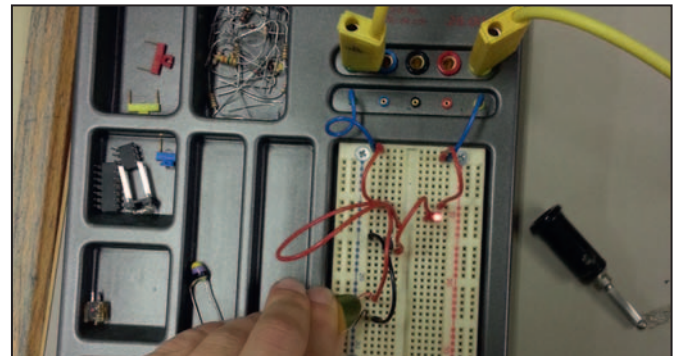


Abb. 12: Schaltkreis mit Schallwandler als Impulsgeber

2.3 Anwendungen für Peltier- und Piezo-Elemente

Die Elemente finden Anwendung im Alltag, in der Forschung und in der Freizeit. Mit diesen Beispielen kann gut ein Bezug zur Welt der Jugendlichen hergestellt werden.

Wohl alle kennen Gasanzünder oder Feuerzeuge, die mit einem Piezo-Element gezündet werden. Durch Druck auf den Piezo-Kristall entstehen grosse Spannungen, ein Funke entsteht und das Gas wird entzündet.

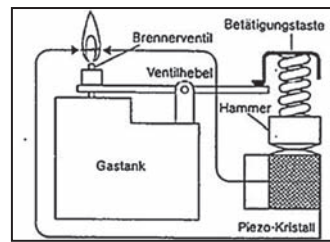


Abb. 13: Zündung eines Feuerzeuges mit Piezo-Kristall

Bei Tintenstrahldruckern wird die Tinte durch feine Düsen auf das Papier gespritzt. Die Düsen werden über Piezoelemente gesteuert. Wird Spannung auf das Piezoelement gegeben, verformt es sich und drückt die Tinte aus dem Düsenkopf.

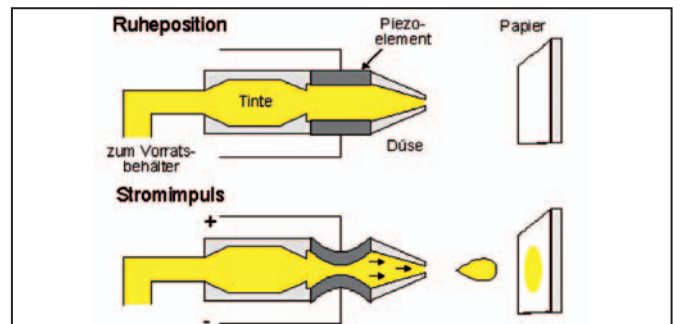


Abb. 14: Düse des Tintenstrahl Druckers wird mit einem Pz gesteuert

Anmerkungen

(1) Seignette-Salz-Kristalle lassen sich sehr einfach und innerhalb zwei Tagen selber züchten. Dazu wird eine gesättigte Lösung von Kaliumnatriumtartrat-Tetrahydrat (130 g in 200 ml Wasser unter Heizen lösen, abfiltrieren) in einem Gefäss offen stehen gelassen. Entstehen zu viele kleine Kristalle, so können diese bis auf wenige entfernt werden, damit möglichst grosse Kristalle entstehen.



Autoren

Irma Mgeladze, Therese Lüthi, Bern (CH)

Phasenverschiebung an Wechselstromwiderständen

Mirco Tewes



Im Wechselstromkreis können die zeitlichen Verläufe von Stromstärke und Spannung an einem Bauteil gegeneinander verschoben sein. Die zeitliche Phasenverschiebung ist von den verwendeten Bauelementen abhängig. Während bei einem ohmschen Widerstand keine Phasenverschiebung auftritt, eilt bei einem idealen Kondensator die Stromstärke der Spannung um eine Viertelperiode voraus. Bei einer idealen Spule erreicht die Stromstärke hingegen ein Viertel einer Periode später als die Spannung ihr Maximum. Phasenverschiebungen treten demnach immer dann auf, wenn sich induktive oder kapazitive Widerstände in einem Wechselstromkreis befinden.

Um Phasenverschiebungen sehr einfach nachzuweisen, können die beiden Größen mit einem Spannungs- und einem Stromsensor über mehrere Perioden aufgezeichnet und graphisch dargestellt werden. Die Phasenverschiebungen sind dann sofort ersichtlich und lassen sich direkt aus den Graphen quantitativ bestimmen. Alternativ kann die Stromstärke auch mithilfe des Spannungsabfalls über einem weiteren ohmschen Widerstand gemessen werden. Dann muss aber mindestens eine der beiden Spannungssonden ein Differentialspannungssensor sein, der den Potentialunterschied unabhängig vom Massepotential misst.

Als Spannungsquelle eignen sich herkömmliche Kleinspannungsnetzgeräte, die meist eine Festspannung mit 50 Hz Frequenz liefern, oder Funktionsgeneratoren mit variabler Frequenz der Wechselspannung.

Versuchsaufbau

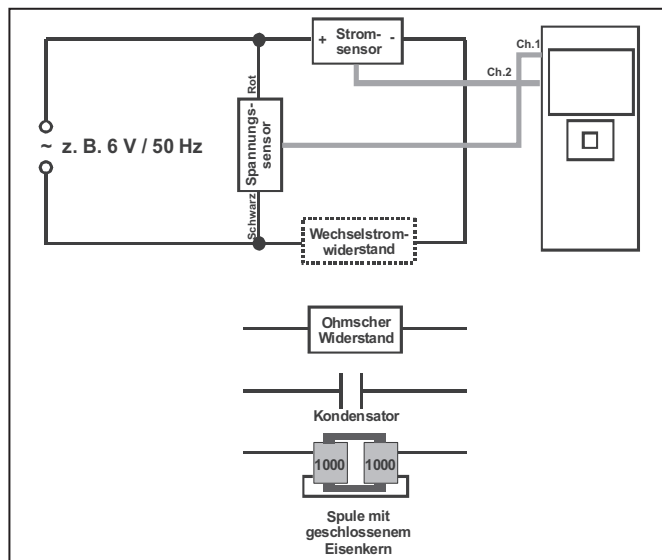


Abb. 1: Versuchsaufbau mit TI-Nspire™ CX und Lab Cradle™, Wechselstromwiderstände

Material

- Kleinspannungsnetzgerät für Wechselspannung oder Funktionsgenerator, Verbindungsleiter
- 2 Spulen (z. B. je 1000 Windungen) mit geschlossenem Eisenkern (geblättert)
- Metallpapierkondensator, z. B. 4,7 μF oder mehr (kein Elektrolytkondensator)
- ohmscher Widerstand, z. B. 100 Ω
- (Taschen-)Computer mit Messwerterfassung (hier TI-Nspire™ Lab Cradle™)
- Spannungssensor (z. B. Voltage Probe, VP-BTA)
- Stromsensor (z. B. DCP-BTA)

Einstellungen

- Messmodus: Time Based (zeitbasiert)
- Messzeit: z. B. 0,05 s
- Messrate: z. B. 4000 Messungen pro Sekunde

Versuchsdurchführung

Für die Vorbereitung und Durchführung werden etwa 30 Minuten benötigt.

Die Schaltung wird nach Schaltplan aufgebaut. An der Spannungsquelle ist eine sinusförmige Wechselspannung mit maximal 6 V Spannung einzustellen. Messrate und Messzeit sind so zu wählen, dass über zwei bis fünf Perioden etwa 200 Messungen aufgenommen werden können.

In der Schaltung wird zunächst der **ohmsche Widerstand** als Wechselstromwiderstand verwendet. Stromstärke und Spannung werden gleichzeitig gemessen (hier 0,05 s). In den Abbildungen sind jeweils die Spannungskurve oben und die Stromstärkekurve unten zu sehen. Beide Graphen erreichen gleichzeitig ihr Maximum. Es liegt keine Phasenverschiebung vor.

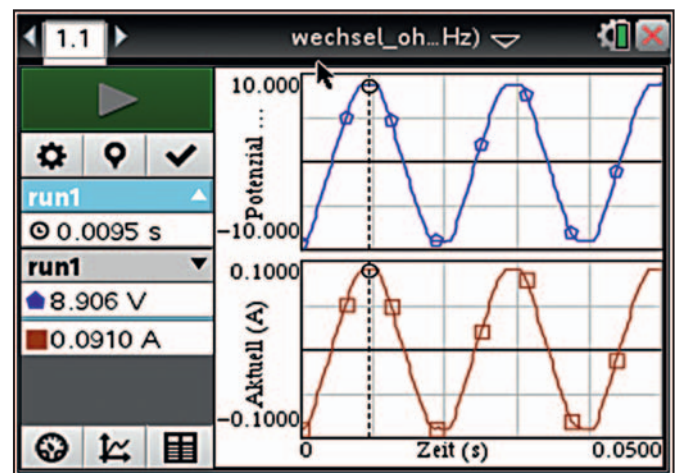


Abb. 2: Spannungs- und Stromstärkeverlauf mit ohmschem Widerstand ($f = 50 \text{ Hz}$)

Verwendet man den **Kondensator** als Wechselstromwiderstand in der Schaltung, ist zu erkennen, dass die Stromstärke ihr Maximum früher erreicht als die Spannung. Die Stromstärke eilt der Spannung um eine Viertelperiode voraus.

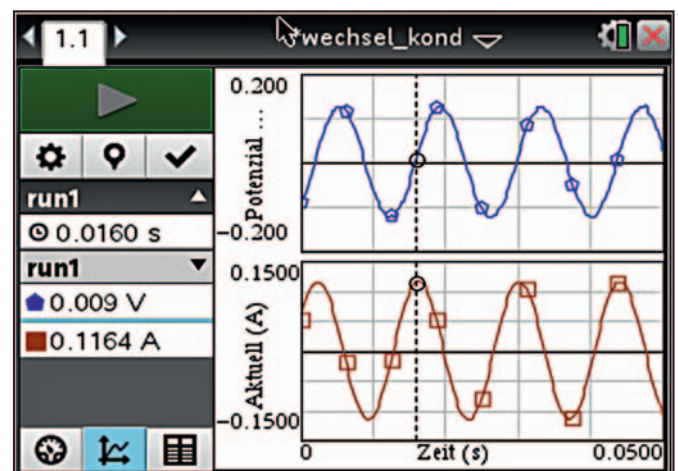


Abb. 3: Spannungs- und Stromstärkeverlauf mit Kondensator ($f = 100 \text{ Hz}$, $C = 20 \mu\text{F}$)

Phasenverschiebung an Wechselstromwiderständen

Mirco Tewes

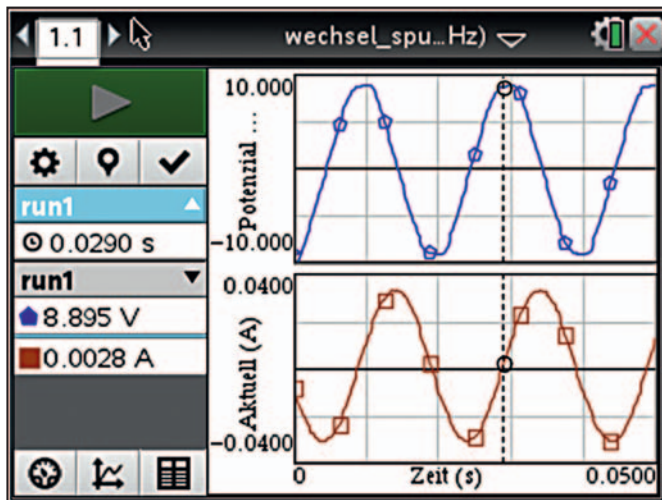


Abb. 4: Spannungs- und Stromstärkeverlauf mit Spule ($f = 50$ Hz)

Bei der Schaltung mit **Spule** lässt sich ebenfalls eine Phasenverschiebung feststellen. Hier erreicht zuerst die Spannung ihr Maximum. Die Spannung eilt der Stromstärke eine Viertelperiode voraus. Es ist zu beachten, dass bei einer realen Spule der ohmsche Widerstand des Spulendrahtes nicht immer vernachlässigbar ist. Dies kann zu abweichenden Phasenverschiebungen führen. Verwendet man Spulen mit hoher Induktivität, bleiben die Abweichungen gering.

Anmerkung der Redaktion

Dieser Artikel ist im Rahmen der T³-Arbeitsgruppe Physik entstanden und ergänzt das aktuelle Heft **Schülerexperimente im Physikunterricht mit digitaler Messwerterfassung – Die Top 13: Sicheres Gelingen – Hoher Lernerfolg**. Der Artikel ist an die Struktur der Materialien angepasst: Einführende Erläuterungen zum Experiment richten sich an Lehrkräfte. Das Arbeitsblatt ist auf der folgenden Seite als Kopiervorlage abgedruckt. In den Materialien finden Sie auch zusätzliche Hilfestellungen und Lösungshinweise.

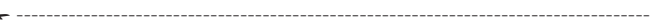
Anhang

Die folgenden Hilfestellungen sind für Ihre Schülerinnen und Schüler gedacht und können bei Bedarf verteilt oder den Lernern zur optionalen Verwendung bereit gestellt werden.



Autor

Mirco Tewes, Bernau (D)



Hilfe 1

Einstellungen

Für die angestrebte Messung sind folgende Einstellungen geeignet:

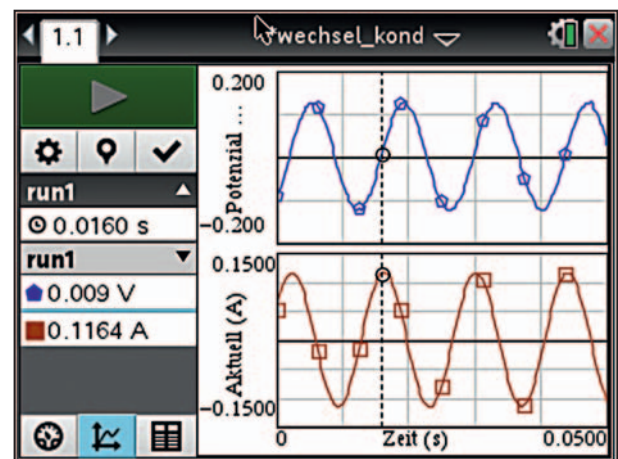
- Messmodus: Time Based (zeitbasiert)
- Messzeit: z. B. 0,05 s
- Messrate: z. B. 4000 Messungen pro Sekunde



Hilfe 2

Beispielgraph / Bestimmen der Phasenverschiebung

Eine gelungene Messung könnte wie folgt aussehen:



Beispielgraph

Die Phasenverschiebung beträgt hier ein Viertel einer Periode. Dies kann man beispielsweise bestimmen, indem man den zeitlichen Abstand zweier zugehöriger Maxima der Spannungs- und Stromstärkekurve abliest. Es ist außerdem anzugeben, welche Größe vor der anderen das Maximum erreicht.

TI Materialdatenbank

Unterrichtsmaterialien für Mathematik und Naturwissenschaften

„Die Top 13“ und viele weitere Aufgabenbeispiele, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank. Allein zur TI-Nspire™ Technologie gibt es aktuell Hunderte Einträge:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Ausgewählte Hefte von TI und T³ – auch „Die Top 13“ – sind im Webshop zu beziehen:

www.ti-activities-shop.net





Aufgabenstellung

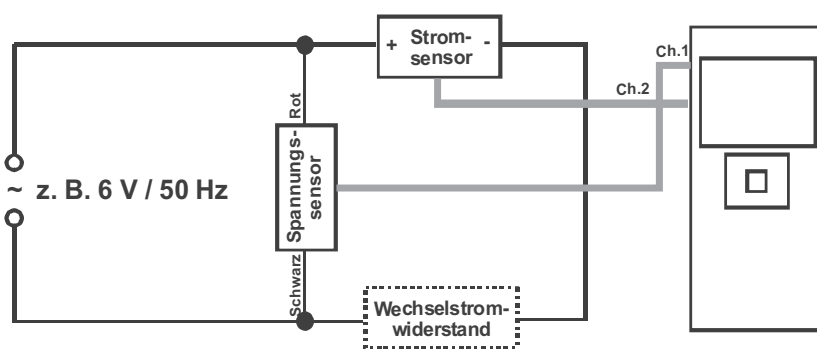
Bestimmen Sie jeweils die zeitliche Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung in einem Wechselstromkreis mit ohmschen Widerstand, Kondensator oder Spule.

- (1) Bauen Sie die Schaltung nach Schaltplan auf. Benutzen Sie zunächst den ohmschen Widerstand als Wechselstromwiderstand. Beachten Sie die Polung der Sensoren (vgl. Schaltplan).
- (2) Wählen Sie an der Spannungsquelle eine sinusförmige Wechselspannung mit maximal 6 V Spannung. Stellen Sie die Messwerterfassung so ein, dass Sie über zwei bis fünf Perioden etwa 200 Messungen aufnehmen können. [Hilfe 1](#)
- (3) Führen Sie die Messung von Stromstärke und Spannung durch. Bestimmen Sie die zeitliche Phasenverschiebung zwischen den beiden Größen. [Hilfe 2](#)
- (4) Wiederholen Sie die Aufgabe (3) mit dem Kondensator und mit der Spule als Wechselstromwiderstände.

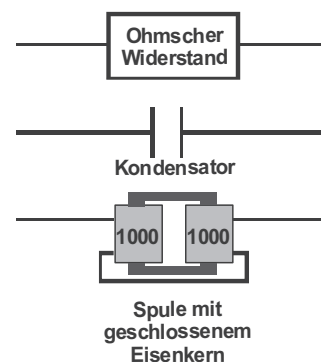
Material

- Kleinspannungsnetzgerät für Wechselspannung oder Funktionsgenerator
- 2 Spulen (z. B. je 1000 Windungen) mit geschlossenem Eisenkern (geblättert)
- Metallpapierkondensator, z. B. 4,7 μF oder mehr (kein Elektrolytkondensator)
- ohmscher Widerstand, z. B. 100 Ω
- Verbindungsleiter
- (Taschen-)Computer mit Messwerterfassung
- Spannungssensor
- Stromsensor

Versuchsaufbau



Schaltskizze / Aufbau



Wechselstromwiderstände



Wir verwenden als Näherungswert $x_1 = x_0 + h$ und entwickeln eine Rekursionsformel:

$$x_1 = x_0 + \frac{2 - x_0^2}{2 \cdot x_0}$$

$$x_1 = \frac{2 \cdot x_0^2 + 2 - x_0^2}{2 \cdot x_0} = \frac{x_0^2 + 2}{2 \cdot x_0}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right) \quad [\dots] \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

1.4 Simulation

Die Simulation dieses rekursiven Modells kann mit Hilfe des TI-Nspire™ grafisch oder tabellarisch erfolgen. Man sieht in beiden Fällen die rasche Konvergenz:

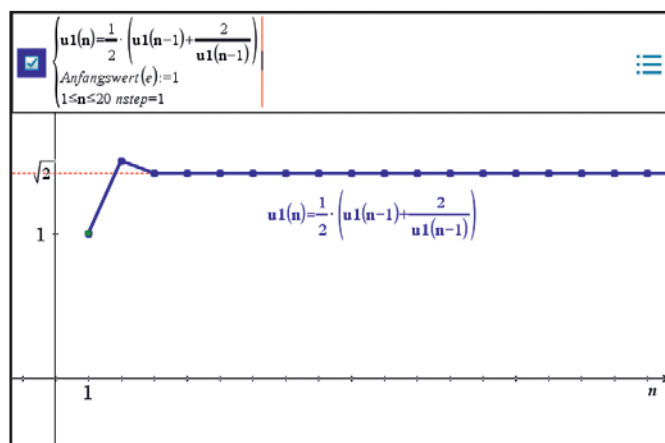


Abb. 3: Zeichnen im Graphikfenster, Graph-Eingabe Einstellung: Folge

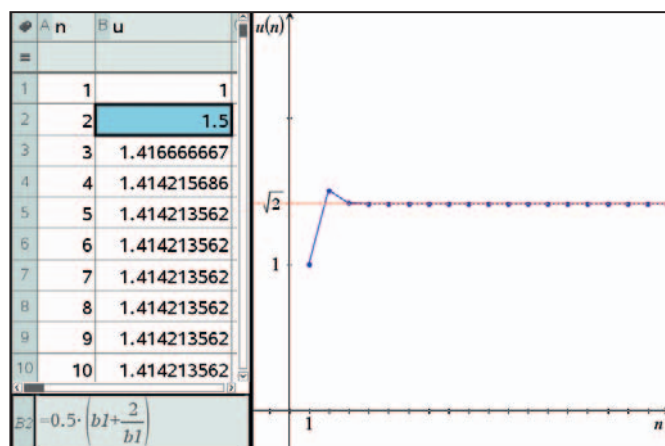


Abb. 4: Berechnen mit „List & Spreadsheet“, Graph-Eingabe Einstellung: Streudiagramm

Teil 2: Näherungsverfahren für $\sqrt[k]{a}$

Eine Möglichkeit, ein rekursives Modell für $\sqrt[k]{a}$ zu finden, wäre natürlich das Newtonsche Näherungsverfahren.

In diesem Artikel sollen zwei rekursive Modelle zur Approximation von $\sqrt[k]{a}$ bezüglich ihrer Konvergenz untersucht werden. Die Quelle⁽¹⁾ ist ein „Mathe-Brief“ der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Im dortigen Artikel wird die Konvergenz der folgenden Modelle „klassisch“ untersucht (Monotonie, Beschränktheit):

Modell 1 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$

Modell 2 $x_{n+1} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$

Wir wollen die Konvergenz mit Hilfe der Technologie in zwei Schritten untersuchen.

- Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, Finden einer Vermutung.
- Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, exakter Beweis mit Hilfe des CAS.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, finden einer Vermutung

TI-Nspire™ bietet zwei Darstellungsmöglichkeiten an:

- „Time-Modus“: $x_n = f(n)$
- „Web-Modus“: $x_n = g(x_{n-1})$

Der im „Web-Modus“ entstehende Streckenzug visualisiert sehr gut die zwei Phasen der rekursiven Denktechnologie – „Auswerten“ und „Rückkoppeln“.

In der experimentellen Phase können wir natürlich nur konkrete Beispiele behandeln. Wir untersuchen die Konvergenz für $\sqrt[3]{7}$ mit $k = 3, 4, 5$.

Untersuchung von Modell 1

Die Untersuchung erfolgt zunächst im „Time-Modus“: Für $k = 3$ ist die Konvergenz offensichtlich.

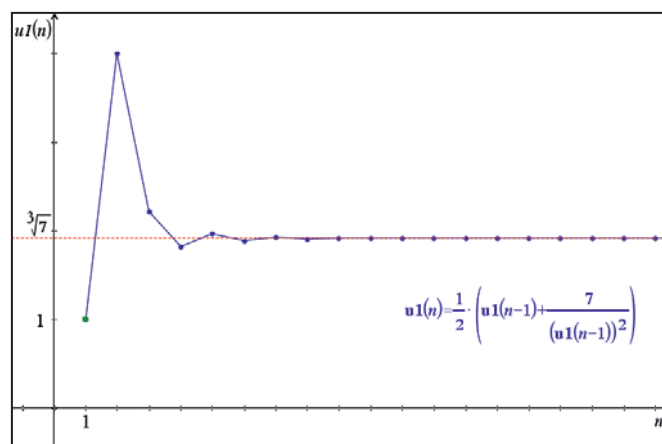


Abb. 5

Für $k = 4$ kann man für n zwischen 1 und 20 noch keine gesicherten Schlüsse ziehen. Man kann aber den Graphen auch im Intervall [1500;1520] untersuchen. Die noch immer auftretende Oszillation macht eine Konvergenz unwahrscheinlich.

Für $k = 5$ zeigt sich ein ähnliches Bild, der Graph oszilliert noch kräftiger.

Iterationsverfahren zur Approximation irrationaler Zahlen

Dr. Helmut Heugl

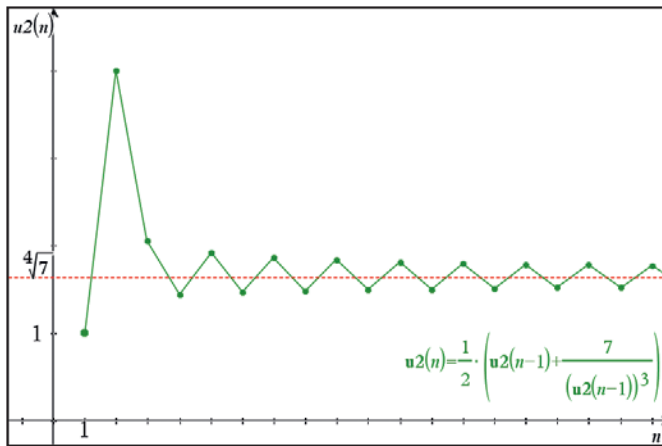


Abb. 6

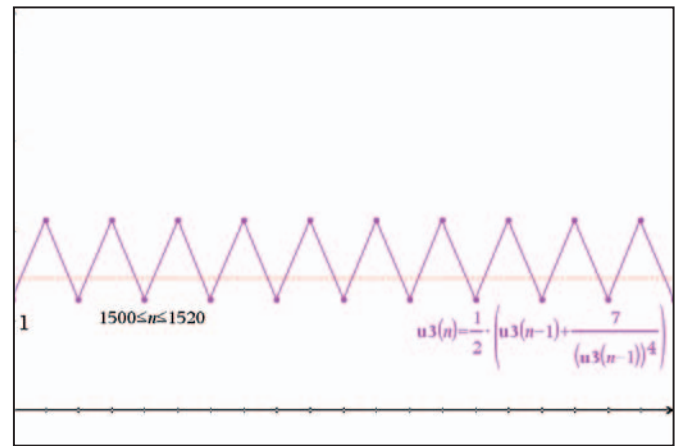


Abb. 9

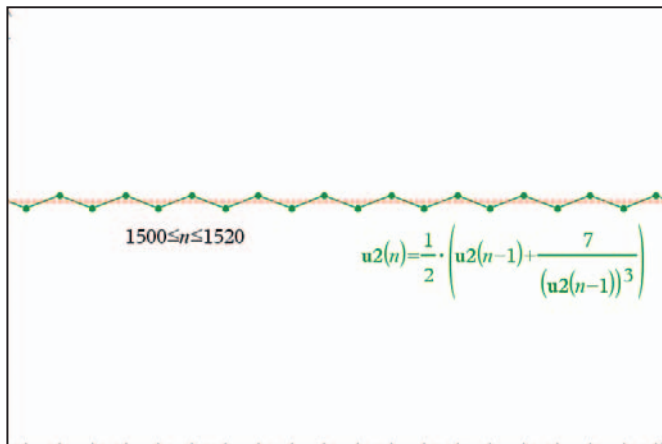


Abb. 7

Bessere Informationen liefert die Darstellung im „Web-Modus“:

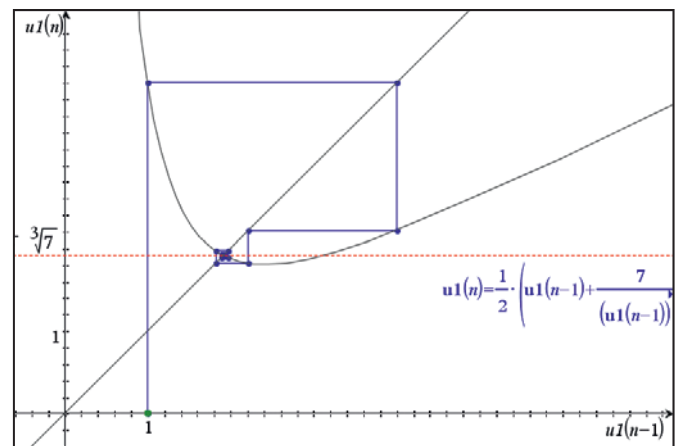


Abb. 10

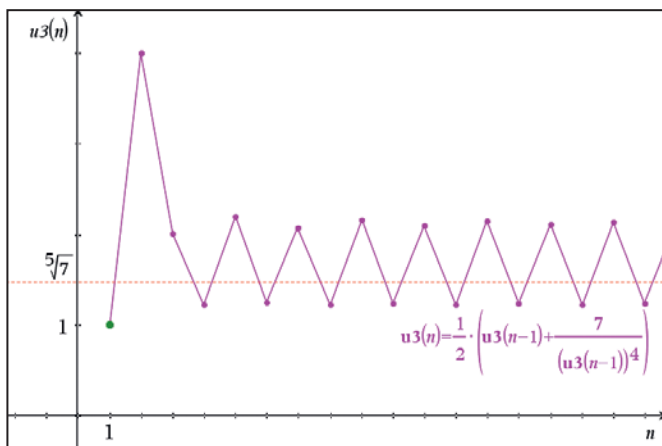


Abb. 8

Untersuchung im „Web-Modus“

Für $k = 3$ lässt sich Konvergenz vermuten. Für $k = 4$ zeigt sich ein ähnliches Bild. Vergrößert man allerdings den Bereich um einen möglichen Grenzwert durch „Zoomen“, wird die Konvergenz unwahrscheinlich.

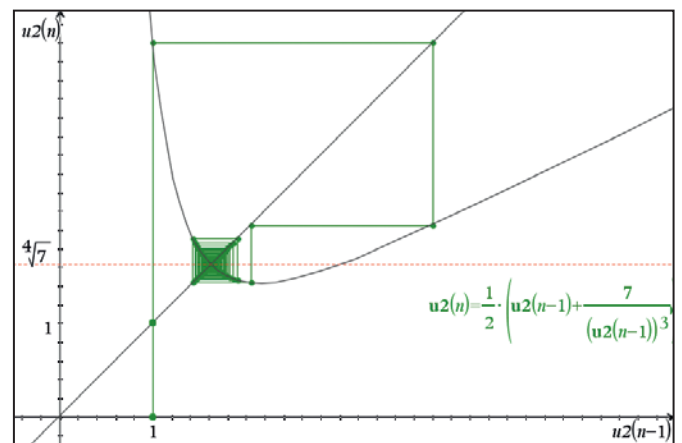


Abb. 11

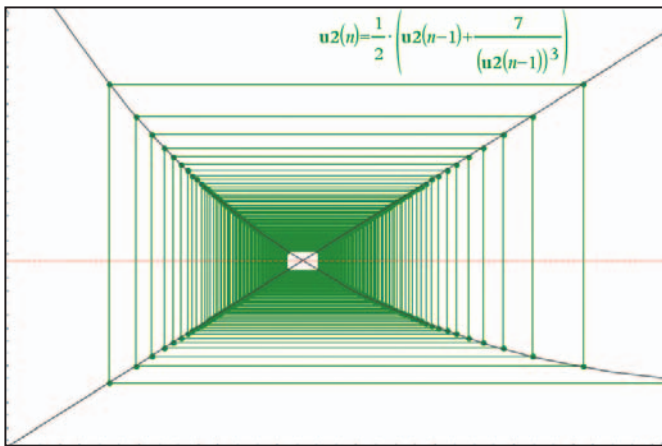


Abb. 12

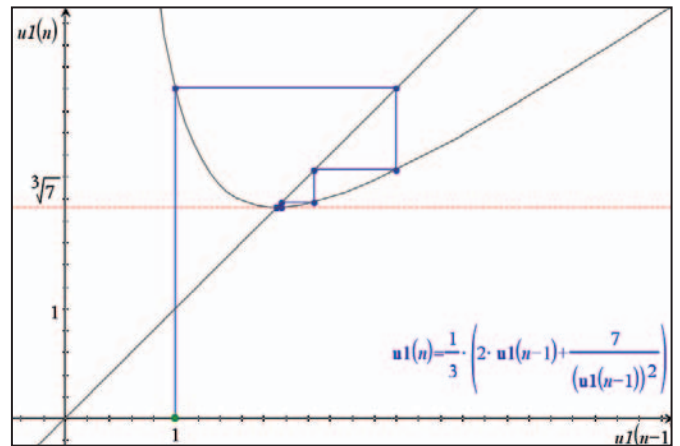


Abb. 15: k = 3 „Web-Modus“

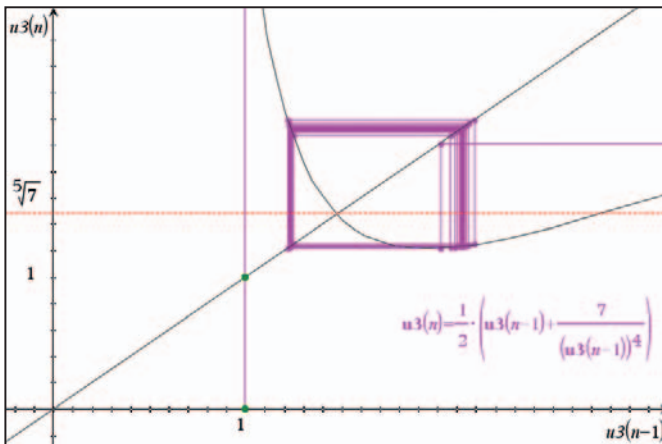


Abb. 13

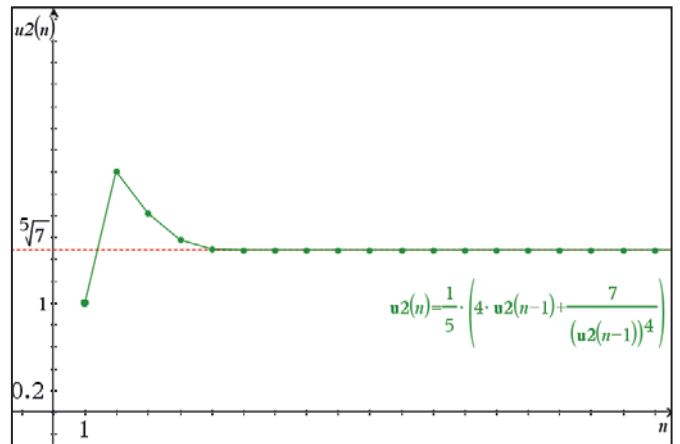


Abb. 16: k = 5 „Time-Modus“

Für k = 5 ist Zoomen gar nicht nötig, Konvergenz ist ausgeschlossen.

Untersuchung von Modell 2

Sowohl für k = 3 als auch für k = 5 lässt sich Konvergenz vermuten.

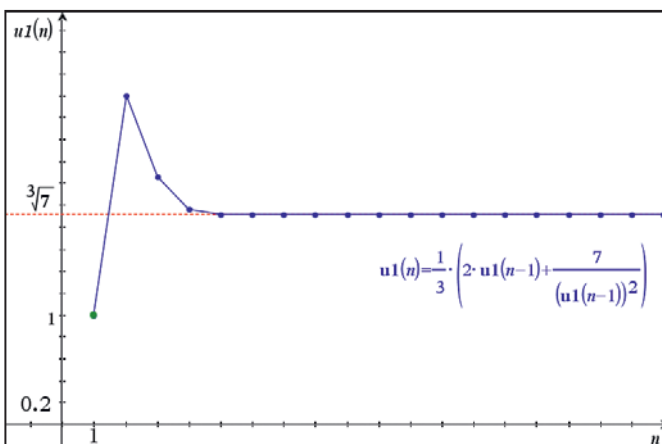


Abb. 14: k = 3 „Time-Modus“

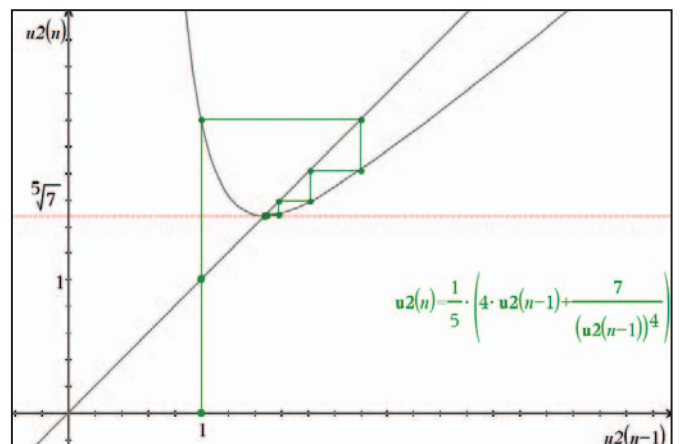


Abb. 17: k = 5 „Web-Modus“

Ergebnis der experimentellen Phase ist die Vermutung, dass Modell 1 nur für k = 3, nicht aber für k = 4, 5 konvergiert, und dass Modell 2 für k = 3, 4, 5 konvergiert.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe zeigt sehr schön die Möglichkeiten der Technologienutzung in der experimentellen Phase, ja man kann sagen, so eine experimentelle Phase wird durch Technologie überhaupt erst möglich. Gefährlich wäre es, sich mit dieser Phase der anschaulichen Vermutungen zu

Iterationsverfahren zur Approximation irrationaler Zahlen

Dr. Helmut Heugl

begnügen. Dann würden wesentliche Aspekte mathematischer Denktechnologie fehlen. Die experimentelle Phase ist eine wirksame Vorbereitung, aber kein Ersatz der exaktifizierenden Phase.

Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, exakter Beweis der Konvergenz

Ein paar theoretische Voraussetzungen:

- Ein **Fixpunkt** x^* einer Funktion f ist ein Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, das heißt $f(x^*) = x^*$.
- Ein Fixpunkt x^* heißt anziehender Fixpunkt einer Folge, die durch eine Differenzengleichung $x_n = f(x_{n-1})$ gegeben ist, wenn die Folge gegen x^* konvergiert. Das heißt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ für $n \rightarrow \infty$.
- **Der Fixpunktsatz:** Ein Fixpunkt x^* einer Differenzengleichung $x_n = f(x_{n-1})$ (f ist kontinuierlich und differenzierbar) ist ein anziehender Fixpunkt, wenn $|f'(x^*)| < 1$. Der Fixpunkt ist abstoßend, wenn $|f'(x^*)| > 1$.

Als ersten Schritt können wir nun im Graphikfenster die Steigung der Tangente an die Funktion $u_n = f(u_{n-1})$ im Fixpunkt u^* ermitteln:

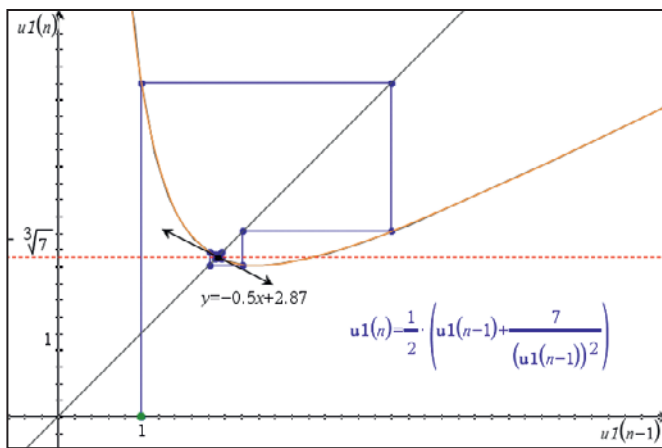


Abb. 18

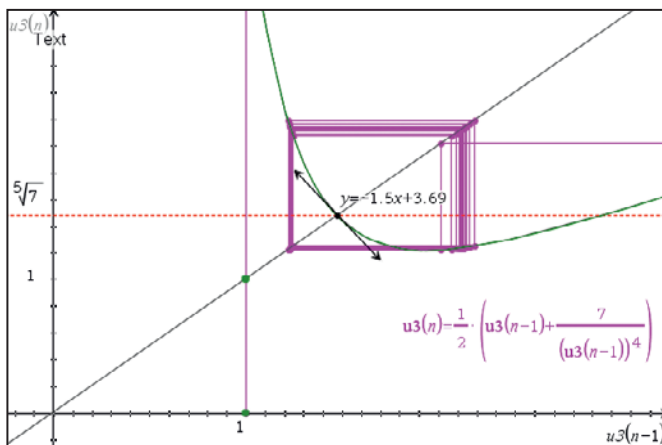


Abb. 19

Ergebnis für das Modell 1:

- Für die 3. Wurzel ist die Steigung -0.5 , nach dem Fixpunktsatz ergibt sich Konvergenz
- Für die 5. Wurzel ist die Steigung -1.5 , nach dem Fixpunktsatz ergibt sich Divergenz

Im zweiten Schritt kann man die Konvergenzuntersuchungen allgemein für $\sqrt[k]{a}$ durchführen.

Wir übersiedeln in das CAS-Fenster:

Modell 1

In Abbildung 20 ist die Berechnung des Fixpunktes als Lösung der Gleichung $x^* = f(x^*)$ dargestellt.

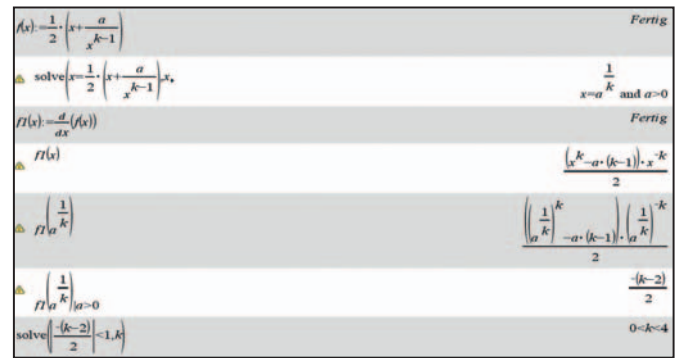


Abb. 20

Betrachtet wird die 1. Ableitung an der Fixpunktstelle. Erst für $a > 0$ erhält man einen brauchbaren Wert, die Betragsungleichung wird vom CAS gelöst.

Ergebnis: Der Betrag der 1. Ableitung an der Stelle des Fixpunktes ist kleiner 1 für $k = 1, 2, 3$. Daher konvergiert die Lösungsfolge des rekursiven Modells 1 nur für $k = 2$ und $k = 3$.

Modell 2

In Abb. 21 zeigt wieder die Berechnung des Fixpunktes als Lösung der Gleichung $x^* = f(x^*)$; erst für $a > 0$ erhält man den Wert 0.

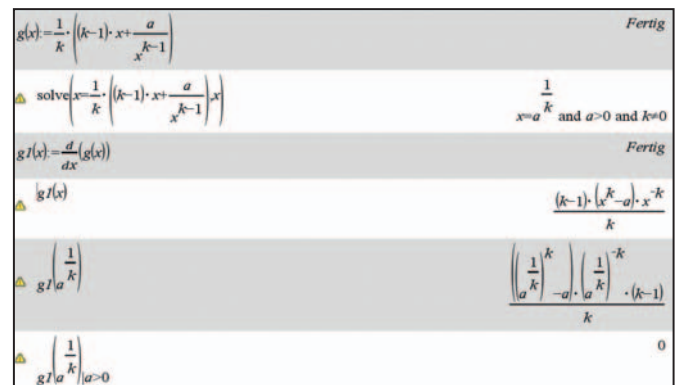


Abb. 21

Ergebnis: Die Steigung der 1. Ableitung im Fixpunkt ist 0 für $a > 0$ und $k \neq 0$. Daher ist die Lösungsfolge des rekursiven Modells 2 konvergent für alle $k \in \mathbb{N}$.

Anmerkung der Redaktion

In der umfangreicheren Online-Version dieses Artikels finden Sie zwei Ergänzungsaufgaben des Autors (siehe Materialdatenbank).

Quelle

(1) Prof. Fritz Schweiger, Mathe-Brief 33 der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (OEMG) [www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/]

» Autor
Dr. Helmut Heugl (A)



In dem vorliegenden Aufsatz soll einmal mehr auf Konfidenzintervalle für Binomialverteilungen eingegangen werden. Konfidenzintervalle können mithilfe des TI-Nspire™ CAS auf verschiedene Art und Weise berechnet werden. Gerade deshalb ist es für die Lehrenden wichtig zu wissen, was Konfidenzintervalle sind – und was nicht. Besonders im Fokus steht hierbei das Zusammenspiel der drei Anwendungen Calculator, Notes und Data & Statistics. Der Mehrwert eines CAS-Systems wird hoffentlich deutlich: Durch die Erstellung von Makros/Funktionen gelangen einfache Realisierungen für verschiedenartige Problemstellungen. Es bleibt Zeit zum Nachdenken, Fragenstellen, Ausprobieren und zum Tiefbohren.

Zur Theorie

Ausgangspunkt ist gewöhnlich die Approximation der Binomialverteilung mit dem Parameter p durch die Normalverteilung. Damit liegen die zu messenden relativen Häufigkeiten h mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit γ im so genannten Prognoseintervall mit den Grenzen $p \pm z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$. Hierbei sind γ und z durch $\gamma = \int_{-z}^z \phi(t) dt$ miteinander verknüpft (ϕ bezeichnet die Dichte der Standard-Normalverteilung).

Prognoseintervalle kommen also dann ins Spiel, wenn ein bekannter Parameter p einer Grundgesamtheit gegeben ist und man wissen will, wie sich Stichprobenergebnisse h um den Parameter p verteilen. Es geht also um die Richtung „von der Grundgesamtheit zur Stichprobe“ und Aussagen wie diese: h liegt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit in dem um p symmetrischen Intervall $[p-a; p+a]$, mit $a = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

Ist umgekehrt das Stichprobenergebnis h gegeben und p gesucht, so muss $h = p \pm z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ jeweils nach p aufgelöst werden. Hier geht es um die Sichtweise „von der Stichprobe zur Grundgesamtheit.“ Die beiden Lösungen liefern die Grenzen des so entstehenden Konfidenzintervalls. An dieser Stelle sollte nicht das Lösen quadratischer Gleichungen im Vordergrund stehen. Das kann sehr gut der Rechner übernehmen.

Wichtiger ist die erste Interpretation für das, was damit erreicht worden ist: Ein Konfidenzintervall besteht aus allen Werten für p , deren Prognoseintervall das Stichprobenergebnis h enthält. Damit ist noch nicht die Bedeutung der Vertrauenswahrscheinlichkeit geklärt. Hier helfen in einem zweiten Schritt Simulationen. Soweit die einfache Theorie. Das so erhaltene Konfidenzintervall mit den exakt berechneten Grenzen heißt WILSON-Intervall. Es ist aber deshalb noch lange kein exaktes Konfidenzintervall, da wir ja die Approximation der Normalverteilung vorher eingesteckt haben. Wird noch einmal approximiert, dazu später mehr, ergibt sich das WALD-Intervall. Insgesamt sind die Berechnungen einfach, die Interpretationen leider nicht. Warum kann man nicht sagen, dass p mit der Vertrauenswahrscheinlichkeit γ im Konfidenzintervall liegt? Wieso darf man eigentlich nicht von dem Konfidenzintervall reden, sondern nur von der Realisation einer Zufallsgröße H ? Die Zufallsgröße H (Punktschätzer) ist etwas anderes als die Realisation h (Punktschätzung). Ich erwähne das zwar in meinem Unterricht, verzichte aber im weiteren Verlauf auf eine Unterscheidung – wie auch gelegentlich in den weiteren Ausführungen.

Umsetzung im Unterricht – Teil 1: Prognoseintervalle und Stichprobenverteilungen

Um die Methode „Konfidenzintervall“ zu verstehen, ist es sinnvoll, sich mit dem Begriff des Prognoseintervalls in verschiedenen Kontexten zu beschäftigen. Es reicht nicht aus, für verschiedene Binomialverteilungen Sigma-Umgebungen zu berechnen. Der Fokus sollte auch eher auf Prognoseintervalle liegen, die aus den Sigma-Umgebungen durch Division von n entstehen. Hier geht es also um relative Anteile. Prognoseintervalle sind für das Verständnis von Konfidenzintervallen wichtig. Neben der Berechnung solcher Intervalle spielen Realexperimente und Simulationen für ein wirkliches Verstehen eine große Rolle. Einerseits rückt die Variabilität ins Zentrum der Betrachtungen, andererseits erhält die Realisation h die notwendige Verknüpfung zu einem Stichprobenergebnis. Simulationen lassen sich mit dem TI-Nspire™ CAS einfach und effektiv umsetzen. Hierbei ist besonders das Zusammenspiel der drei Anwendungen Calculator, Notes- und Data & Statistics hervorzuheben. Das im Folgenden dargelegte Vorgehen ist typisch für die Arbeit mit dem TI-Nspire™ CAS und beschränkt sich nicht nur auf die Arbeit mit Prognose- und Konfidenzintervallen. Man kann hier von einem Dreischritt sprechen:

- 1) Definition der benötigten Funktionen in einer Calculator-Anwendung
- 2) Einführung von Variablen in einer Data & Statistics-Anwendung durch Definition von Schieberegler
- 3) Aufruf bestimmter Funktionen in einer Notes- oder Data & Statistics-Anwendung

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen eine mögliche Umsetzung zur Untersuchung von Prognoseintervallen und Stichprobenverteilungen. Die Werte für den Stichprobenumfang n , die Wahrscheinlichkeit p , die Sicherheitswahrscheinlichkeit a sowie die Anzahl der Simulationen w können über Schieberegler variiert werden. Der mehrmalige Aufruf des zentralen Befehls $sim(n,p,w)$ in der Notes-Anwendung (\rightarrow Math-Box) durch $h:=approx(sim(n,p,w))$ erzeugt jeweils eine neue Stichprobenverteilung. Da in der Grafik auch die Grenzen des jeweiligen Prognoseintervalls (\rightarrow Wert zeichnen) dargestellt werden können, kann der Zusammenhang zwischen der Sicherheitswahrscheinlichkeit a und dem Anteil der Stichproben innerhalb bzw. außerhalb des Prognoseintervalls entdeckt werden. Lernende können mit dieser kleinen Lernumgebung zentrale Eigenschaften von Prognoseintervallen selbständig entdecken. Dieses Vorgehen soll exemplarisch die „didaktische Power“ von Simulationen aufzeigen. Der Weg über Simulationen löst den didaktischen Anspruch der Sinnstiftung besonders anschaulich ein.

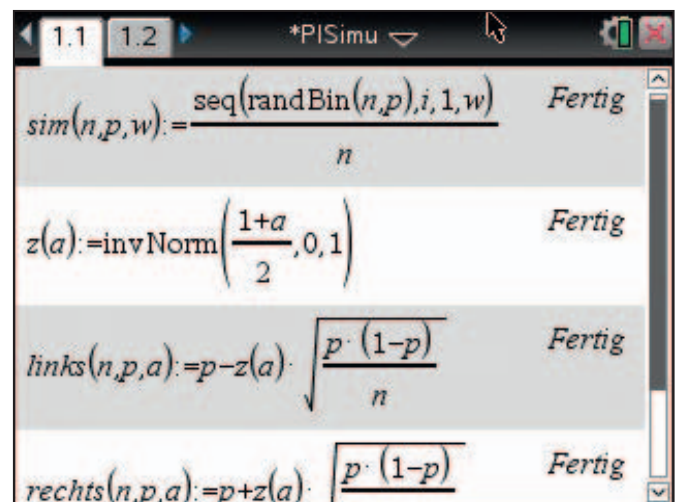


Abb. 1: Funktionsdefinitionen

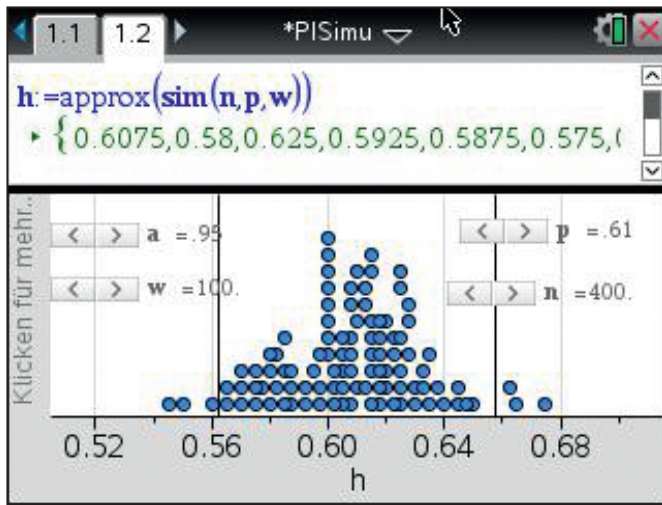


Abb. 2: Stichprobenverteilung

Die Ermittlung der z-Werte mithilfe der Standardnormalverteilung (s. Abb. 1; 2. Zeile) fällt hier vom Himmel. Man kann darauf auch verzichten und nur mit den drei wichtigsten z-Werten zu 90%, 95% und 99% arbeiten. Man kann aber auch zuerst mit der „BlackBox“ $z(\gamma)$ arbeiten und sie bei der Behandlung der Normalverteilung zu einer „WhiteBox“ machen. Wird in der Notes-Anwendung die Simulation durch $h := \text{approx}(\text{sim}(n,p,w))$ in einer Math-Box aufgerufen, wird eine Liste h mit den Stichprobenergebnissen erzeugt, deren Werte dann im Grafik-Fenster dargestellt werden können. Das ist schon alles. Eine neue Simulation ergibt sich dadurch, dass der Cursor in die betreffende Befehlszeile platziert und danach Enter bzw. Return gedrückt wird. Die automatische Neuberechnung in sämtlichen Formeln bei Änderung eines Wertes ist übrigens ein großer Vorteil der Notes-Anwendung. Damit in einer Notes-Anwendung dieser Vorteil ausgenutzt werden kann, müssen die Eingaben in einer Math-Box (ctrl-M bzw. cmd M) erfolgen. Hiermit erscheinen die Ein- und Ausgaben in der mathematischen Notation. Zusammen mit der Möglichkeit, erläuternde Texte und sogar Grafiken einzubinden, können Berechnungen und Dokumentationen sehr übersichtlich umgesetzt werden. Die Trennung von Definition, Aufruf und Ausgabe schafft eine zusätzliche Klarheit und stellt besonders bei der notwendigen Dokumentation im Heft eine Hilfe dar. Es genügen wenige Befehle (auf $\text{approx}()$ kann auch verzichtet werden), um die wesentlichen Eigenschaften von Prognoseintervallen hiermit zu entdecken. Der zentrale Befehl $\frac{\text{seq}(\text{randBin}(n,p),i,1,w)}{n}$ sollte interpretiert werden.

Mit $\text{randBin}(n,p)$ wird das zufällige Trefferanzahl-Ergebnis einer Zufallsstichprobe vom Umfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p realisiert. Mithilfe des Folgebefehls $\text{seq}()$ wird diese Ziehung w -mal wiederholt. Um Anteile zu erhalten, wird noch durch n dividiert. Das Ergebnis wird als Liste dargestellt und kann in einem Data & Statistics-Fenster sofort als Punktdiagramm dargestellt werden. Die Darstellung ist an dieser Stelle einem Histogramm überlegen, da jede einzelne Stichprobe in der Grafik verifiziert werden kann.

Die Grenzen des simulierten Prognoseintervalls werden durch die beiden Funktionen links und rechts (s. Abb. 3) realisiert. Funktionsdefinitionen bzw. die Erstellung von Makros sind ein Mehrerfolg gegenüber dem Einsatz eines GTR. So lässt sich z.B. mit diesen beiden Funktionen das wichtige $1/\sqrt{n}$ -Gesetz veranschaulichen (s. Abb. 3), bevor eine algebraische Bestätigung erfolgt. Gerade die Erkenntnis, dass sich die Intervalllänge leider erst bei einer Vervielfachung des Stichprobenumfangs halbiert, muss für Lernende erfahrbar gemacht werden. In der dritten Zeile wird die allgemeine Berechnung durchgeführt. Übrigens wird der

Parameter nn für die Größe des Stichprobenumfangs benutzt, da die Variable n einen bestimmten Wert besitzt (hier 400, s. Abb. 2). Dieses Vorgehen ist nötig, um nicht „unliebsame Überraschungen“ zu erhalten. In Zeile 4 (s. Abb. 3) werden 1000 Stichprobenziehungen für einen Stichprobenumfang $n=400$ simuliert und jeweils mithilfe der Populations- und Stichproben-Standardabweichung die Intervalllängen der zugehörigen Prognoseintervalle approximiert. Die Stichproben-Standardabweichung (Division durch $n-1$) ist bekanntlich ein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung der zugrundeliegenden Verteilung. Schon hiermit kann der Fokus auf die Beurteilende Statistik gelegt werden, wo eine unbekannte Standardabweichung durch den Standardfehler einer Stichprobe approximiert wird.

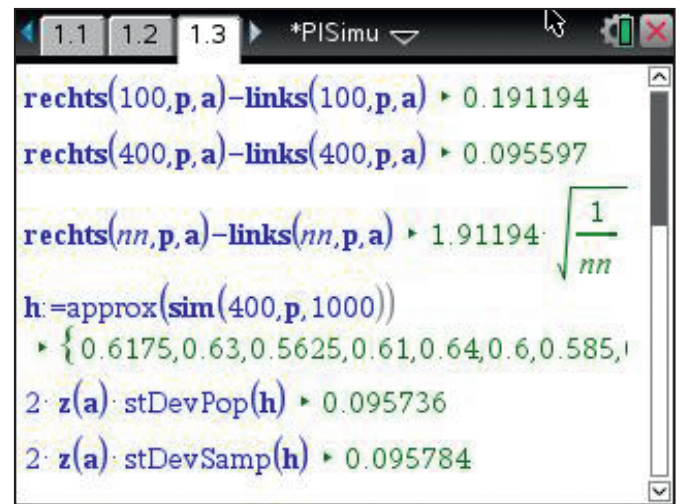


Abb. 3: $1/\sqrt{n}$ -Gesetz und σ -Schätzung

Insgesamt kann dieses Vorgehen dazu führen, Prognoseintervalle besser zu verstehen, ohne die Berechnung einzelner Intervalle in den Vordergrund zu stellen. Ich habe übrigens an dieser Stelle immer mit einer Personalisierung gute Erfahrungen gemacht: Das p wird durch einen Lernenden symbolisiert, das zugehörige Prognoseintervall durch einen Zollstock, der (symmetrisch) hochgehalten wird. Andere Lernende symbolisieren mögliche Stichprobenergebnisse h und platzieren sich um das personalisierte p . Auch lassen sich hiermit alle Vereinfachungen dieser „Simulation“ ansprechen (Abhängigkeit der Länge des Zollstocks von p , n und γ). Die einseitige Betrachtung von Sigma-Umgebungen führt m.E. an dieser Stelle nicht zu einem wirklichen Verstehen von Konfidenzintervallen, die jetzt genauer betrachtet werden sollen.

Umsetzung im Unterricht – Teil 2: Konfidenzintervalle nach WILSON

Ein Konfidenzintervall besteht aus allen Werten für p , deren Prognoseintervall das Stichprobenergebnis h enthält. Die Umsetzung dieser Definition kann mit dem TI-Nspire™ CAS im Wesentlichen auf zwei Arten erfolgen:

- Methode 1: Grafisch-numerische Lösung durch Schnittpunktbestimmung der zugehörigen Graphen von f_u und f_o mit der Geraden zu $y=h$ (s. Abb. 4 und 5)
- Methode 2: Auflösen der beiden Gleichungen

$$h = p_o - z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot (1 - p_o)}{n}} \quad \text{und}$$

$$h = p_u - z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{p_u \cdot (1 - p_u)}{n}} \quad \text{mit dem solve-Befehl (s. Abb. 5)}$$

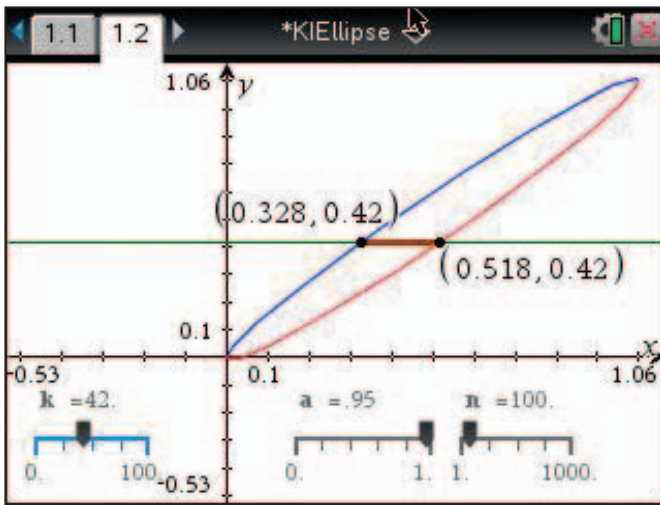


Abb. 4: Grafisch-numerische Lösung

```

z(y):=invNorm( $\frac{1+y}{2}$ ,0,1) Fertig
f_u(n,y):=x+z(y) $\cdot\sqrt{\frac{x\cdot(1-x)}{n}}$  Fertig
f_o(n,y):=x-z(y) $\cdot\sqrt{\frac{x\cdot(1-x)}{n}}$  Fertig
wilson_u(k,n,y):=solve( $\frac{k}{n}=f_u(n,y),x$ ) Fertig
  
```

Abb. 5: Lösung mithilfe des solve-Befehls

Abb. 4 zeigt, wie mithilfe von Schieberegler für jedes k und n sowie für jede Vertrauenswahrscheinlichkeit (hier a) die zugehörige Realisation eines Konfidenzintervalls grafisch-numerisch ermittelt werden kann. Durch diese Grafik lassen sich die jeweiligen Abhängigkeiten eindrucksvoll darstellen. Dieser Weg führt auch zu einer klaren Abgrenzung von Prognoseintervallen (senkrechte Strecken) und Konfidenzintervallen (horizontale Strecken). Auch der Einfluss der einzelnen Parameter auf die Grenzen des zugehörigen Konfidenzintervalls wird deutlich. Um die „Konfidenzellipse“ handlungsorientiert entstehen zu lassen, wird oft das „Kleben“ von Prognoseintervallen (habe ich in früheren Fortbildungen auch vorgeschlagen) als sinnvolle Möglichkeit aufgeführt (s. [1]). Der Zeitfaktor darf aber nicht unterschätzt werden. Auch wird durch diesen Weg der Schwerpunkt eher auf das Berechnen einzelner Prognoseintervalle gelegt. An dieser Stelle sollte aber mehr das Argumentieren und Verstehen der Zusammenhänge im Vordergrund stehen. Der grafisch-numerische Ansatz (Schnittpunktberechnung) ist den Lernenden aus vielen Problemsituationen vertraut.

Auch hier setze ich immer ein Rollenspiel ein. Die Punktschätzung h wird durch einen Lernenden (A) symbolisiert. Zwei weitere Lernende (B und C) bewegen sich mit einem Zollstock (symmetrisch gehalten) von links und rechts auf die Punktschätzung zu, bis jeweils der Zollstock gerade die Person A berührt. Die Personen B und C symbolisieren dann die Gren-

zen des Konfidenzintervalls. Auch hier sollte in einem zweiten Schritt auf die Vereinfachungen eingegangen werden (Prognoseintervalle haben für unterschiedliche p -Werte unterschiedliche Längen).

Abbildung 5 zeigt einmal mehr die Mächtigkeit des solve-Befehls auf. Durch Benutzung der Betragsfunktion können die beiden Grenzen auch mit einer einzigen Funktion ermittelt werden. Ich halte es an dieser Stelle aber für ertragreicher, mit dem in Abb. 5 (Zeile 4) angedeuteten Vorgehen die grafisch-numerische Lösung abzubilden. Auch lassen sich hiermit die Intervalllängen sowie die Bedeutung der Vertrauenswahrscheinlichkeit bei Konfidenzintervallen durch Simulationen einfacher untersuchen. Dazu später mehr.

Insgesamt können beide Wege mit dem TI-Nspire™ CAS überzeugend umgesetzt werden. Beide Methoden liefern problemlos die Grenzen eines Konfidenzintervalls. Mehr noch: Bei vielen Aufgaben zu Konfidenzintervallen muss der Lernende nur noch die drei Parameter k , n und γ identifizieren. Bei einem Rechereinsatz können viele Aufgaben zu Konfidenzintervallen dadurch gelöst werden, dass die Lernenden nur noch die entsprechenden Werte aus dem Text herausfiltern und für die Variablen richtig einsetzen, schon ist die Aufgabe gelöst. Über den Sinn solcher Aufgaben könnte man an dieser Stelle auch diskutieren.

Die Interpretation der Vertrauenswahrscheinlichkeit sollte in beiden Fällen in einem zweiten Schritt erfolgen. Hierfür eignen sich Simulationen, die prägnant mit dem TI-Nspire™ CAS durchgeführt werden können. Mit diesem CAS-System kann man durch die Möglichkeit der Erstellung von Funktionen/Makros zu einer effektiven Problemlösung gelangen. Es geht um die folgende Interpretation der Vertrauenswahrscheinlichkeit (hier $\gamma = 95\%$): Wenn 100 unabhängige Realisationen eines Konfidenzintervalls (γ , n konstant) ermittelt werden, erwartet man in ca. 95% aller Fälle, dass der unbekannte Parameter p von den Intervallen überdeckt wird.

Für die Umsetzung muss der Wert des eigentlich unbekannten Parameters p kurzfristig als bekannt vorausgesetzt werden. Dazu wird wie bei Prognoseintervallen eine Liste von Zufallsstichproben erzeugt (Abb. 1 und 2). Das Zählen der Überdeckungen kann händisch erfolgen. Wenn jeder Lernende z.B. 50 Simulationen betrachtet und mit den Funktionen $wilson_u$ und $wilson_o$ die Intervallgrenzen ermittelt, kommen schon in einem Kurs schnell 1000 Realisationen zusammen. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht zum einen darin, dass nur zusammen als Gruppe ein Ergebnis erzielt wird. Zum anderen wird wieder die Variabilität zum Vorschein kommen, da der Anteil an Überdeckungen sicherlich Schwankungen aufweisen wird. Beim Zählen kann aber auch der Rechner eine Hilfe sein. Der wesentliche Gedanke wird in Abb. 6 dargestellt. Genau dann wird der (unbekannte) Parameter p nicht von einer Realisation eines Konfidenzintervalls überdeckt, wenn die linke Intervallgrenze oberhalb oder die rechte Intervallgrenze unterhalb von p liegt. Der Abb. 6 liegt die Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95% zugrunde. Es wurden 100 Realisationen simuliert ($n=400$, $p=0,63$). Jeweils vier Intervalle überdecken p nicht. Somit führt diese Simulation zu einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 92%. Eine mehrmalige Durchführung dieser Simulation wird als ein Kursexperiment insgesamt zu einem Mittelwert nahe bei 95% führen. An dieser Stelle sollte auch mit anderen Vertrauenswahrscheinlichkeiten experimentiert werden.

Die technische Umsetzung dieser Idee erfordert schon ein tieferes Verständnis im Hinblick auf die Möglichkeiten des Rechners. Die Datei sollte den Lernenden zum Simulieren gegeben werden. Für die Intervallgrenzen werden zwei Listen ($li1$, $re1$) definiert, deren Werte als Punktdiagramm dargestellt werden. Der „right()“-Befehl wird benötigt, um nur die Zahl und nicht z.B. $x=0,687\dots$ zu erhalten.

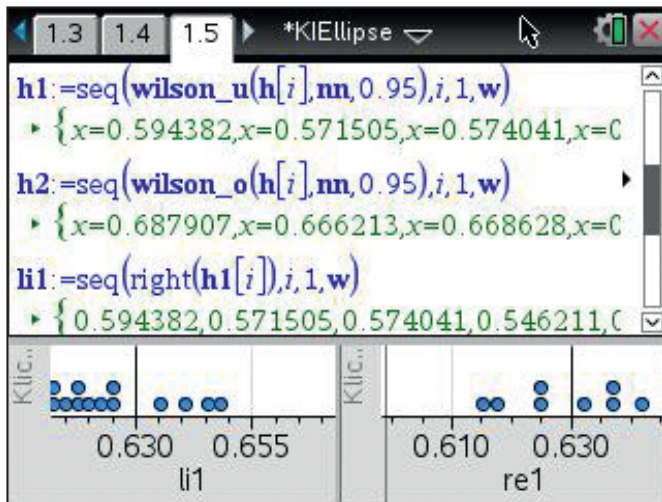


Abb. 6: Interpretation von γ

Die Definition der beiden Funktionen $li1$ und $re1$ zeigt wieder einmal eindrucksvoll, wie effektiv die Arbeit mit Funktionen sein kann. Um die Intervallgrenzen zu bestimmen, werden die vorher definierten Funktionen $wilson_u$ und $wilson_o$ benutzt. Auch die Untersuchung der Abhängigkeit der Intervalllänge vom Stichprobenumfang n gelingt überzeugend. Es wird nur noch zusätzlich der $mean$ -Befehl für den Mittelwert benötigt. Die Listenoperationen sind sehr effektiv. So genügen die beiden Befehle $laenge:=re1-li1$ sowie $mean(re1-li1)$, um diese Abhängigkeit zu untersuchen. Auch die Darstellung der Längen als Histogramm ist sinnvoll und stellt die Arbeit mit Daten in den Vordergrund. Durch dieses Vorgehen werden die einzelnen Bereiche der Stochastik vernetzt, die Modellbildung wird in den Vordergrund gerückt. Daten werden erhoben und können grafisch dargestellt werden, es lassen sich Kenngrößen extrahieren. Damit können die Daten (besser) interpretiert werden. Um Prognosen zu erstellen, wird ein Wahrscheinlichkeitsmodell benötigt. Schon ist man bei der Normalverteilung mit seinen beiden Kenngrößen.

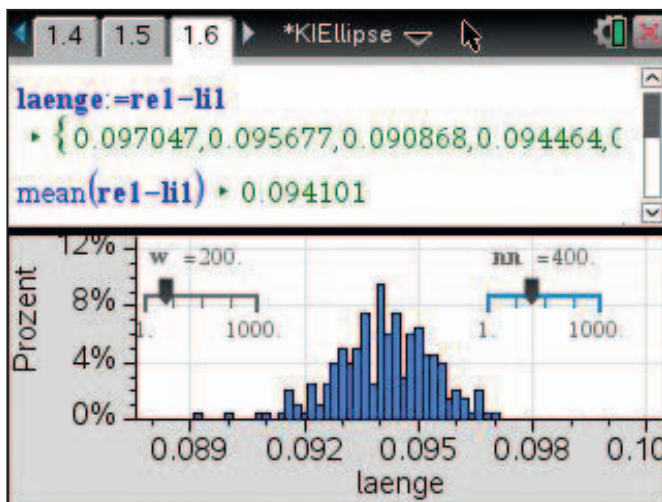


Abb. 7: Länge eines Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von n

Umsetzung im Unterricht – Teil 3: Konfidenzintervalle nach WALD

Man kann auch sofort mit Simulationen beginnen, sich also darauf konzentrieren, was Konfidenzintervalle eigentlich im Kern sind. Bei diesem Weg wird mehr vom Stichprobenergebnis h aus argumentiert. Erst im zweiten Schritt werden dann die verschiedenen Berechnungen eingeführt. Dieser Weg wird übrigens vom Autor favorisiert. Ausgangspunkt ist genau ein Stichprobenergebnis h (Abb. 8). Damit soll der unbekannte Anteil p geschätzt werden (hier gilt übrigens $p=0,63$ – ganz schön weit weg vom realisierten h).

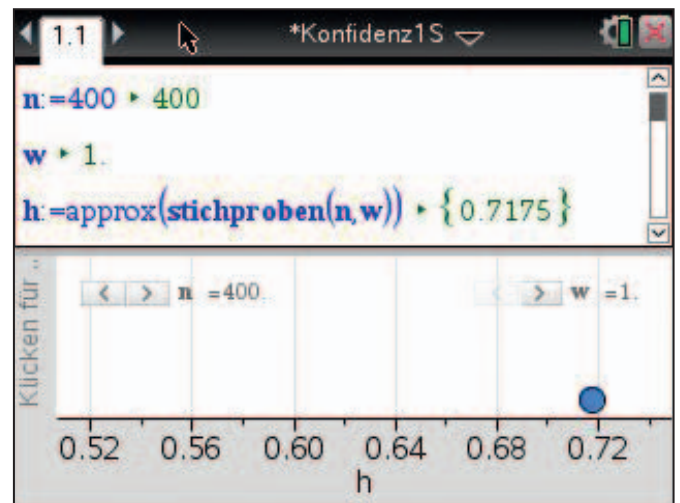


Abb. 8: Eine Stichprobe – p gesucht

Die Erkenntnis, dass eine andere Stichprobe i. A. ein anderes Ergebnis liefert, kann durch Neuberechnung veranschaulicht werden. Die Variabilität als zentrale Eigenschaft der Stochastik kommt wieder zum Vorschein. Aber auch die Tatsache, dass wir uns dieser Variabilität nicht beugen müssen, sondern Wege gefunden haben, mit diesen Unsicherheiten umzugehen.

Um hier weiter zu kommen, ist es wichtig zu wissen, wie sich Stichprobenergebnisse um einen Parameter p verteilen. Die entscheidende Idee ist hierbei die Erkenntnis, dass nicht weitere Zufallsstichproben ermittelt werden. Wir stellen es uns nur vor. Die Theorie liefert, dass diese Stichprobenverteilung

- näherungsweise normalverteilt ist, wenn n hinreichend groß ist,
- den (leider uns unbekannt) Erwartungswert p und die Standardabweichung $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ hat.

Der Einsatz von Simulationen ist an dieser Stelle hilfreich, um die mathematischen Zusammenhänge einzusehen, ohne vorher die schwierige Theorie aufzubauen. Die Normalverteilung muss auch nicht explizit angesprochen werden. Es genügt der Bezug zu den Sigma-Regeln oder den Regeln für Prognoseintervalle. Die Umsetzung einer Simulation gelingt mit dem TI-Nspire™ CAS erstaunlich einfach und übersichtlich, da der Wechsel der Darstellungen und der Skalierungen anwenderfreundlich gelöst wurde. So sind nur zwei Klicks zu tätigen – und schon wird aus einem Punktdiagramm ein (relatives) Histogramm, das die oben erwähnten Eigenschaften verdeutlicht (Abb. 9).

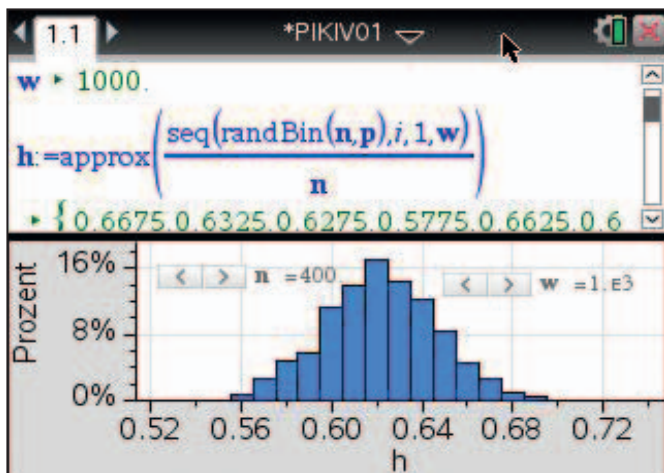


Abb. 9: Stichprobensimulation

Es ist sogar möglich, die entstehende Stichprobenverteilung mithilfe des Normal-Wahrscheinlichkeits-Diagramms auf Normalverteilung zu testen. Durch die Tatsache, dass die Stichprobenverteilung sich näherungsweise wie eine Normalverteilung verhält, kann man z.B. für $\gamma = 0,95$ nun sagen, dass etwa 95% aller Stichprobenergebnisse Werte haben, die 1,96-Standardabweichungen vom unbekanntem Parameter p entfernt sind.

Zurück zur einzigen Stichprobe und dem Bild im Kopf von der Stichprobenverteilung. Wo ist das unbekannte p in der Verteilung?

Es ist wichtig, dass die Lernenden an dieser Stelle erfahren, dass wir es leider nicht wissen – und es auch niemals erfahren. Wir können nur Folgendes sagen: Wenn wir den Blickwinkel umdrehen und alles von unserem bekannten h aus sehen, kann man so argumentieren: Falls ich das h bin, dann gibt es eine 95%-ige Chance, dass p nicht mehr als 1,96-Standardabweichungen von mir entfernt ist. Dann habe ich den Wert p eingefangen – vielleicht. Sicher kann ich mir aber nicht sein. Das Beste, was ich machen kann ist es, ein Intervall anzugeben. Und auch dann kann ich mir nicht sicher sein, ob ich p damit eingefangen habe. Ich kann aber sagen, dass diese Methode in 95% aller Fälle dazu führt, dass p vom Intervall eingefangen/überdeckt wird. Es gibt ein entscheidendes Problem, dass die Lernenden nicht sofort entdecken: Da wir p nicht kennen, kennen wir auch den genauen Wert der Standardabweichung nicht. Bei hinreichend großen Werten für n kann aber der Term $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ durch $\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$, dem Standardfehler, abgeschätzt werden. Diese Größe spielt in der Beurteilenden Statistik eine wichtige Rolle. Diese Abschätzung sollte an einigen Beispielen erfahren werden.

Eigentlich ist das Vorgehen nach WILSON ein Spezialfall, der nur bei der Binomialverteilung auftritt. Sonst (z.B. bei Erwartungswerten) muss die unbekannte Standardabweichung durch den Standardfehler abgeschätzt werden – wie beim WALD-Intervall.

Auch hier eignet sich der Einsatz eines kleinen Rollenspiels. Während

beim Prognoseintervall der Zollstock $2 \cdot z(\gamma) \cdot \frac{\sigma_p}{n}$ dem bekannten p zugeordnet wurde und die Länge des Zollstocks symbolisiert, wird der Zollstock beim Konfidenzintervall nun der Punktschätzung h zugeordnet.

Der Länge des Zollstocks entspricht in diesem Fall $2 \cdot z(\gamma) \cdot \frac{\sigma_p}{n}$, dem doppelten Standardfehler. Hier handelt es sich um das WALD-Konfidenzintervall, das einfach durch $\left[h - z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + z(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right]$ berechnet wird.

Die Unterschiede müssen deutlich herausgearbeitet werden, damit Lernende durch den gleichen Aufbau der Formel nicht ein Konfidenzintervall mit einem Prognoseintervall verwechseln. Man kann auch mit der allgemeinen Lösung der quadratischen Gleichung beim WILSON-Konfidenzintervall argumentieren. Dort gilt für die Grenzen des Konfidenzintervalls:

$$p_{u,o} = \frac{h + \frac{z^2}{2n} \pm z \cdot \sqrt{\frac{h(1-p)}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z^2}{n}}$$

Für große Werte von n kann für die Grenzen des WALD-Intervalls

$p_{u,o} = h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$ approximiert werden. Diese Formel wird übrigens beim TI-Nspire™ CAS mit dem Befehl *1-Prop z-Intervall* zur Verfügung gestellt. Die 1 im Funktionsnamen soll darauf hindeuten, dass es sich um einen 1-Stichproben-Test handelt, *Prop* soll auf Proportion (Anteil) hinweisen und z auf das zur Vertrauenswahrscheinlichkeit gehörige Quantil.

Dieser Weg zeigt deutlicher als der erste Weg, warum hier nur von Überdeckungen gesprochen werden darf. Nicht p ist hier eine Zufallsgröße, sondern H und somit auch die beiden Intervallgrenzen. Der Unterschied zwischen der Zufallsgröße H und einer Realisation h wird deutlich. Die beiden Berechnungen des WILSON-Konfidenzintervalls sollten auch bei diesem Vorgehen angesprochen werden.

In [1] wird eine handlungsorientierte Möglichkeit beschrieben, sich der Vertrauenswahrscheinlichkeit bei Konfidenzintervallen anzunähern. Dazu werden aus einer Gummibärentüte nacheinander eine Anzahl Gummibären herausgenommen und als Stichprobe interpretiert. Damit kann man leider nicht die Vertrauenswahrscheinlichkeit veranschaulichen, da zum einen die Stichproben voneinander abhängig sind (die letzte „Ziehung“ ist vollkommen deterministisch), zum anderen der Stichprobenumfang variiert. Es handelt sich also um verschiedene, abhängige Zufallsgrößen H . Ganz davon abgesehen sind die auftretenden Stichprobengrößen zu klein, um die Näherungsmethoden anzuwenden. Werden die Berechnungen zu sehr in den Vordergrund gestellt, wird dies nicht so einfach auffallen.

Zusatz – nur für Interessierte

Wir haben gesehen, dass die Berechnung der Realisation eines Konfidenzintervalls mit dem Rechner auf unterschiedliche Art und Weise geschehen kann. Da mit dem TI-Nspire™ CAS auch die Fisherverteilung F mit den Freiheitsgraden a und b sowie deren Quantile (*invF*) zur Verfügung steht, können die Grenzen sogar exakt berechnet werden. Das ist aber nur etwas für interessierte Lehrende. Trotzdem soll an dieser Stelle kurz darauf eingegangen werden. Man kann z.B. damit testen, wie groß die Abweichungen der beiden Näherungsmethoden sind, wenn kleine Stichprobengrößen n bzw. kleine h -Werte genommen werden. Außerdem kann man erkennen, dass WALD-Intervalle für hinreichend große Werte n völlig ausreichend sind.

Wird nicht mit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung gerechnet, wird beim symmetrischen Ansatz der größte bzw. kleinste p -Wert gesucht mit

$$P_{p_u}(X \geq k) = \frac{\alpha}{2} \text{ bzw. } P_{p_o}(X \leq k) = \frac{\alpha}{2}, \alpha = 1 - \gamma.$$

Zwischen der Binomialverteilung und dem Quantil der F -Verteilung bei a und b Freiheitsgraden bestehen die folgenden Zusammenhänge:

$$P_{p_u}(X \geq k) = \frac{\alpha}{2} \quad \frac{k \cdot (1 - p_u)}{(n - k + 1) \cdot p_u} = F_{1 - \frac{\alpha}{2}, 2(n - k + 1), 2k}$$

$$P_{p_o}(X \leq k) = \frac{\alpha}{2} \quad \frac{(n - k) \cdot p_o}{(k + 1)(1 - p_o)} = F_{\frac{\alpha}{2}, 2(k + 1), 2(n - k)}$$



Diese beiden Beziehungen können jeweils nach p_u bzw. p_o aufgelöst werden. Dann ergeben sich für die folgenden Grenzen der Realisation eines Konfidenzintervalls die beiden Grenzen:

$$p_u = \frac{k}{k + (n-k+1) \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(n-k+1), 2k}}$$

$$p_o = \frac{(k+1) \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(k+1), 2(n-k)}}{(n-k) + (k+1) \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(k+1), 2(n-k)}}$$

Die Umsetzung mit dem TI-Nspire™ CAS zeigt Abb. 10.

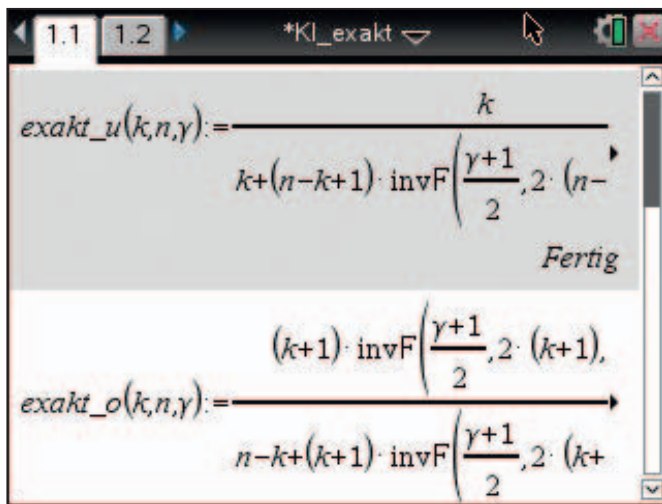


Abb. 10: Definition der Grenzen von exakten Konfidenzintervallen

Damit stehen drei Verfahren zur Verfügung, Konfidenzintervalle zu berechnen (Abb. 11). Für kleine Werte von n und h wird man erkennen, dass die beiden Näherungsverfahren schlechte Ergebnisse liefern. Dies kann zu Überdeckungswahrscheinlichkeiten führen, die deutlich kleiner sind als die Vorgabe. Das exakte Konfidenzintervall wird auch CLOPPER-PEARSON-Intervall genannt. Hier wird die geforderte Zuverlässigkeit von $1-\alpha$ garantiert. Eine Untersuchung, welche der beiden Näherungen besser ist, erscheint mir nur von theoretischem Interesse zu sein. Wer dazu Informationen haben möchte, kann dazu vom Autor etwas erhalten.



Abb. 11: Drei Verfahren zu Konfidenzintervallen

Fazit

In der Beurteilenden Statistik kann der Einsatz des TI-Nspire™ CAS gewinnbringend sein. Hervorzuheben sind die überzeugenden Möglichkeiten bei der Durchführung von Simulationen sowie die einfach zu realisierenden grafischen Ausgaben. Weiterhin können durch den Einsatz von Funktionsdefinitionen mit mehreren Variablen viele Problemstellungen erstaunlich übersichtlich gelöst werden. Unnötige und langwierige Berechnungen in der Stochastik entfallen. Die Arbeit mit Daten sowie Interpretationen können dadurch mehr in den Vordergrund rücken. Vielleicht wird dadurch der Unterricht anspruchsvoller – aber auch ehrlicher! Vielleicht kommt man dann dazu, mehr über Konfidenzintervalle nachzudenken. Ansatzpunkte/Fragen gibt es viele. Hier nur einige Beispiele:

- Welche Methoden benutzen eigentlich die großen Meinungsforschungsinstitute?
- Warum sollte man bei Ergebnissen von Umfragen im Internet vorsichtig sein?
- Reale Stichproben sind prinzipiell keine Zufallsstichproben. Welche Auswirkungen hat das und wie kann man vorgehen, möglichst gute Stichproben zu erhalten?
- Viele Aufgabenstellungen (auch im Zentralabitur) erfordern eigentlich einseitige Konfidenzintervalle. Welche Änderungen ergeben sich dadurch?
- Kann man aus der Überdeckung zweier Konfidenzintervalle immer folgern, dass die beiden zugehörigen (unbekannten) Größen nicht statistisch signifikant verschieden sind? Das kann übrigens i. A. nicht behauptet werden. Antworten liefert auch hier der Rechner mit dem Befehl *2-Prop z-Intervall*, oder man denkt selbst einmal darüber nach.

Literatur:

- [1] Weiß, S. (2011): TI-Nachrichten 1/11; S. 19ff



Autor

Reimund Vehling, Hannover (D)

Eine App.
Die ganze Mathematik.



Ideal für Schule und Hochschule, zu Hause und unterwegs: TI-Nspire™ App für iPad® und TI-Nspire™ CAS App für iPad®.

Texas Instruments Serviceangebot

Informieren & Ausprobieren

Rückantwort an:

Texas Instruments Education Technology GmbH,
Fax: +49(0) 81 61-80 49 07
E-Mail: ti-nachrichten@ti.com

Ich interessiere mich für

Bitte Zutreffendes ankreuzen – und künftig gezielte Informationen erhalten:

Numerische Graphikrechner (GTR):



TI-82 STATS



TI-84 Plus



TI-Nspire™ CX
Handheld



TI-84 Plus CE-T

Computeralgebrasystem (CAS):



TI-Nspire™ CX CAS
Handheld

Software/Apps:



TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS Software

TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS App für iPad



Sonstige TI-Software
(z.B. TI-SmartView™, Emulator Software)

TI-Nspire™ Navigator System:



Verbindet TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS
Handhelds zu einer drahtlosen
Lernumgebung im Klassenzimmer

Weitere TI-Produkte:

(wie z.B. TI-30X Pro MultiView™ Schulrechner)



Ich habe Interesse an einer **kostenlosen Rechnerausleihe mit Zubehör** für maximal 4 Wochen (für GTR und CAS möglich):

Gewünschtes Produkt: _____

Gewünschter Termin: _____

Ich bin an einer **Produktpräsentation/Lehrerfortbildung** interessiert, die von TI oder dem Lehrernetzwerk T³ durchgeführt wird. Bitte kontaktieren Sie mich.

Ich bin an Informationen zu **Messwerterfassungssystemen** interessiert.

Ich möchte auch zukünftig regelmäßig über **TI-Produkte und Serviceleistungen** informiert werden:

Ich bevorzuge E-Mails.

Ich bevorzuge Postsendungen.

Ich möchte auch zukünftig **Aufgabenbeispiele** sowie **Tips & Tricks** zum Einsatz der TI-Technologie erhalten:

TI-Nachrichten Lehrer-Magazin (Print)

TI-Materialien E-Newsletter/E-Magazin

Kontaktdaten (Bitte vollständig und in Druckschrift ausfüllen.)

Privatadresse Schuladresse

Schule _____

Name/Vorname _____

Straße _____

PLZ/Ort _____

Land _____

Telefon: _____

E-Mail _____

Ort/Datum _____

Unterschrift _____

Weitere Infos & Serviceangebote finden Sie hier:

education.ti.com/deutschland

education.ti.com/oesterreich

education.ti.com/schweiz

Oder rufen Sie uns an! TI-Customer Service Center:

Tel: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Die oben genannten Daten werden elektronisch gespeichert und dienen dazu, Sie zukünftig über Angebote und Serviceleistungen von Texas Instruments zu informieren.

Wenn Sie keine weiteren Informationen wünschen, kreuzen Sie bitte an:

Sie haben jederzeit Anspruch auf Zugang zu den Sie betreffenden Daten. TI behält sich das Recht vor, alle Preise, Produktspezifikationen und Serviceprogramme ohne vorherige Ankündigung zu ändern.

Wir sind für Sie da

Innovative Technologie

Die Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-84 Plus CE-T, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und die TI-Nspire™ CX Modelle lassen sich durch zusätzliche Applikationen und/oder Upgrades erweitern. Neben kompatibler Software (Win/Mac®) gibt es nun auch die TI-Nspire™ App für iPad® und die TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac®.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel Exemplare oder Klassenätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich:

ti-loan@ti.com

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte. Zudem wird TI-Technologie in führenden Lehrwerken eingesetzt.

- Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net
- Viele Handreichungen von TI und T³ können Sie auch über den TI-Unterrichtsmaterialien Webshop beziehen: www.ti-activities-shop.net
- Das kostenlose Abonnement der TI-Nachrichten erhalten Sie unter: ti-nachrichten@ti.com

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:



Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS

Tel.: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Fax: +49 (0)8161 80 3185

ti-cares@ti.com

education.ti.com/deutschland

education.ti.com/oesterreich

education.ti.com/schweiz

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

Texas Instruments und seine Vertreter sind bemüht, die Richtigkeit der Kommentare und Darstellungen in dieser Publikation zu gewährleisten. Dennoch wird keine Haftung für inhaltliche Ungenauigkeiten, für Artikel oder Behauptungen von Autoren übernommen. Die hier abgedruckten Meinungen sind nicht unbedingt die Meinungen von Texas Instruments. Alle Angaben ohne Gewähr. Texas Instruments behält sich das Recht vor, Produkte, Spezifikationen, Dienstleistungen und Programme ohne vorherige Ankündigung zu ändern. Alle erwähnten Firmen-, Marken- und Produktnamen sind Warenzeichen bzw. Marken der jeweiligen Rechtsinhaber.