Annäherung an begrenztes Wachstum

Stefan Luislampe

Vorbemerkung

Der nachfolgende Artikel gibt Einblicke in den Unterricht eines Kurses auf grundlegendem Anforderungsniveau (Grundkurs) an einem niedersächsischen Gymnasium, der den Schülerinnen und Schülern einen Zugang zum begrenzten Wachstum eröffnet. Die Behandlung von exponentiellem Wachstum ist in Niedersachsen bereits in der Mittelstufe vorgesehen: in einer Wiederholungsphase wurden entsprechende Inhalte wiederholend aufgegriffen und unter neuer Perspektive (Änderungsrate) vertieft. In diesem Zusammenhang hat sich die Lerngruppe auch die e-Funktion erarbeitet. Das Modell des begrenzten Wachstums ist curricular zwar ebenfalls in der Mittelstufe vorgeschrieben (rekursiv im Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff), allerdings nicht dessen funktionale Beschreibung.

Interpretation einer graphischen Darstellung

In [1] findet sich folgender Aufgabenkontext:

> *Beim schonenden und langsamen Trocknen von Beeren verlieren diese nach und nach das in ihnen enthaltene Wasser.*

Dargestellt ist zudem eine Graphik mit neun Messpunkten und einer zusätzlich eingezeichneten passenden Abnahmekurve; Abbildung 1 und 2 zeigen die aus der Graphik abgelesenen Werte – sieben Datenpunkte lassen sich einigermaßen genau ablesen:

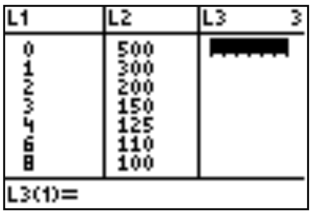

Abb.1

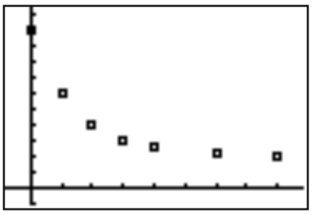
Abb.2

Es ist im Mathematik-Unterricht durchaus sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler teilhaben zu lassen am Spannungsverhältnis zwischen didaktischem und realitätsbezogenem Gehalt von Aufgaben:

Was stellt die Graphik und die gezeichnete Ausgleichskurve dar? Ein Hineinfinden in den Aufgabenkontext ist mit einer Interpretation und kritischen Einordnung der graphischen Darstellung verknüpft (z.B.: Warum trocknet jemand [500g?] Beeren? Ist der Wassergehalt von Beeren tatsächlich etwa ein Fünftel?). Klar ist: Mit der Zeit verlieren die Beeren Wasser und damit reduziert sich ihr Gewicht (die Masse). Die passenden „glatten" Werte verwundern, der grundsätzliche Verlauf weniger.

Überlegungen zur mathematischen Perspektive

Welche mathematische Auseinandersetzung und Annäherung wäre hier und mit unseren Mittel sinnvoll? Den Schülerinnen und Schülern ist - schon aus dem Unterrichtszusammenhang heraus - klar: Mathematiker versuchen funktionale Beschreibungen zu finden – wenn auch nicht immer unmittelbar einsichtig werden kann, wozu eine solche Beschreibung dienen sollte. In Abbildung 2 fehlt die Abnahmekurve, die in der Buchgraphik gegeben ist; es drängt sich immerhin die Frage auf: Wie ist diese Kurve (ggf. „nur" eine Ausgleichskurve?) zustande gekommen?

Vorschläge einer funktionalen Anpassung

Zu dem Impuls, geeignete Ansätze vorzuschlagen, kommen aus der Lerngruppe im wesentlichen zwei Vorschläge: Eine Schülerin schlägt eine Interpolation mit Geraden vor - dies löst bei den Mitschülern z.T. ein Raunen aus; dieser, sicher auch aus dem Unterrichtszusammenhang erklärliche Vorschlag (Spline-Interpolation) wird dennoch notiert (und mit Lehrerhilfe) verteidigt. Der andere Vorschlag bezieht sich auf eine exponentielle Abnahme und erklärt sich gleichermaßen aus dem Unterrichtszusammenhang (s.o.). Zur exponentiellen Abnahme stehen die beiden Ansätze

$$y = a \cdot b^{x} \qquad (1)$$
$$y = a \cdot e^{k\,x} \qquad (2)$$

im Raum. Welche Möglichkeiten gibt es noch? Ausgehend vom Beitrag eines eher leistungsstarken Schülers (Alexander) wird deutlich: Wenn die Punkte auf einer Parabel liegen, dürften wir nur den linken Parabel-Ast betrachten, aber es sieht *„irgendwie"* schon nach einem *„Scheitelpunkt"* aus.

Die Szene mag illustrieren: Die Schülerinnen und Schüler blicken letztlich in ihren „mathematischen Werkzeugkasten", sie wurden dazu auch aufgefordert. Eine Diskussion darüber, welche Anliegen und Annahmen kontextbezogen für oder gegen die einzelnen Vorschläge sprechen ist dabei leider schon etwas aus dem Blick geraten (hinsichtlich der Prognosesicherheit / Extrapolation hat das quadratische Modell offensichtliche Schwächen). Dies könnte mit Lehrerhilfe natürlich geschehen und für eine Eingrenzung und Abwägung sorgen. Im Folgenden wurde die Lerngruppe allerdings arbeitsteilig mit der Umsetzung der verschiedenen Ansätze beauftragt, eine diesbezügliche Diskussion also bis zum Vorliegen entsprechender Ergebnisse nicht weiter vertieft.

Modellierung durch Exponentialfunktion

Der schnellste Weg ist zweifellos die exponentielle Regression, allerdings (natürlich) mit ernüchterndem Ergebnis, wie Abbildung 3 zeigt.

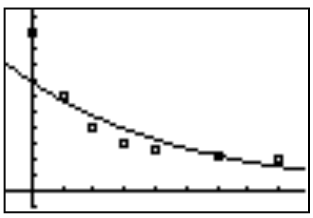
Abb. 3

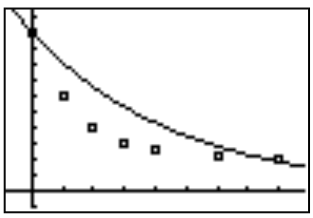
Abb.4

Eine Umsetzung des Ansatzes über die Interpolation zweier Datenpunkte (hier z.B. 1. u. 7. Datenpunkt) führt auf ein Ergebnis nach Abbildung 4. Es wird im Unterricht und dem Vergleich der Ergebnisse noch einmal deutlich: die Ansätze (1) und (2) unterscheiden sich lediglich in der mathematischen Darstellung, liefern aber beide kein zufriedenstellendes Ergebnis: Einerseits passt die Krümmung nicht zu den vorgegebenen Datenpunkten oder – ach: das war ja eigentlich auch klar! - der Graph nähert sich der x- bzw. Zeitachse, dabei müssten wir aber irgendwie auf eine Trockenmasse von ca. 100g kommen.

Aus dem Unterrichtszusammenhang sei hier angemerkt: Den Schülerinnen und Schülern bot sich hier eine neuerliche Lerngelegenheit hinsichtlich des asymptotischen Verhaltes der Exponentialfunktion und hinsichtlich der Anpassung des Ansatzes an vorgegebene Daten (implizite Übung).

Lineare Interpolation

Diese Schwierigkeiten ergeben sich bei der linearen Interpolation nicht (vgl. Abb.5), allerdings müssen 6 Teilfunktionen bestimmt werden.

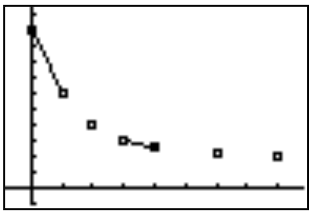

Abb.5

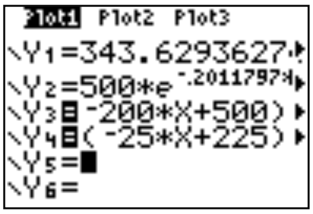

Abb.6

Dennoch werden Zweifel geäußert: warum sollte ausgerechnet eine lineare Abnahme zwischen den (irgendwie ja eher zufällig ausgewählten) Zeitpunkten vorliegen? Immerhin: Wollen wir genaueres über die Zwischenwerte erfahren, müssten wir wegen der Schwierigkeiten mit der exponentiellen Regression wohl mit der linearen Interpolation vorlieb nehmen. In der Diskussion wird klar: Die so gewonnenen Werte lägen dann immer „etwas" höher als die tatsächlich zu messenden (Krümmungsverhalten).

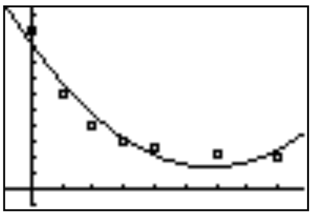

Abb. 7

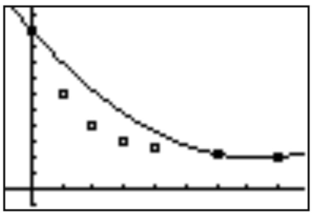

Abb.8

Nur der Vollständigkeit halber geben die Abbildungen 7 und 8 die Ergebnisse einer quadratischen Regression und einer auf die Datenpunkte zu t = 0, 6 und 8 bezogenen Interpolation mit einer Parabel wieder.

Modellkritik und Modellanpassung

Keiner der Ansätze passt wirklich zu unseren Daten. Die lineare Interpolation liefert „angemessene" Anhaltspunkte für die fehlenden Zwischenwerte – aber daraus ergibt sich kein geeignetes Modell für den Vorgang „Trocknen von Beeren". Der exponentielle Ansatz eignet sich nicht aufgrund des asymptotischen Verhaltens. Wir müssten ein Modell wählen, dass zumindest die offensichtliche Voraussetzung (Trockenmasse 100g) berücksichtig.

Alexander hat eine Idee: Wenn wir den Graphen der Exponentialfunktion „*nach oben verschieben*", dann hätten wir ja auch „*eine andere Grenze*".

Gute Idee! Im Unterrichtsgespräch wird schließlich der damit verbundene, veränderte Ansatz

$$y = a \cdot e^{kx} + 100 \qquad (3)$$

entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler bekommen den Auftrag, die Parameter a und k zu bestimmen (Gleichungssystem), je nach Wahl der betrachteten Datenpunkte ergeben sich unterschiedliche Parameter und Schwierigkeiten, der Aufwand unterscheidet sich, allerdings „ähneln" sich die Ergebnisse (Abb.9 / 10):

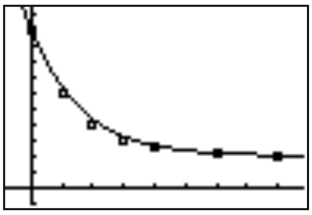

Abb.9: zu t=0 und t=6, c=100

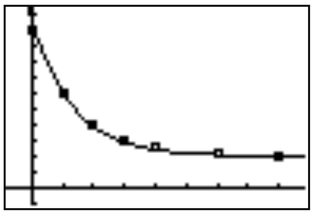

Abb.10: zu t=1 u. t=8, c=99

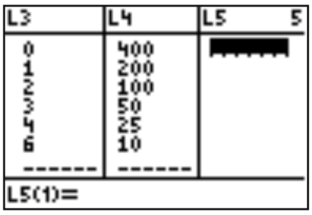

Abb. 11

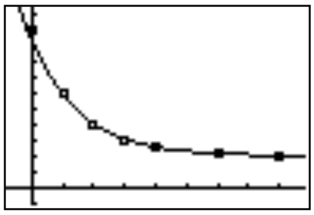

Abb.12

Es stellt sich heraus: Wenn wir eine Grenze von y = 100 annehmen, kann der Datenpunkt (8|100) in diesem Ansatz nicht verwendet werden (Widerspruch im Gleichungssystem). Eine Schülergruppe „behilft" sich z.B. mit der Anpassung der angenommenen Grenze (c = 99).

Die Abbildungen 11 und 12 zeigen das Ergebnis einer exponentiellen Regression für die Gleichung $y - 100 = a \cdot e^{kx}$ (Hier ist der Datenpunkt zu t = 8 zu löschen, da gemäß Ansatz die linke Seite der Gleichung nicht Null werden kann). Dieses Vorgehen wurde allerdings in diesem Kurs erst zu einem späteren Zeitpunkt (im Rahmen der abiturnahen Vertiefung) herausgearbeitet.

Zwischenfazit

Die vorgegebenen (ggf. nicht ganz realistischen) Daten lassen sich z.B. mit der Funktion

$$f(x) = 400 \cdot e^{-0{,}6148 \cdot x} + 100$$

angemessen beschreiben (Abb.9). Es hat den Anschein, das tatsächlich eine exponentielle Abnahme der Masse beim Trocknen von Beeren zu beobachten ist. Im Unterschied zu unserem Modell des exponentiellen Wachstums müssen wir aber die Grenze (im Kontext vorgegeben durch die Trockenmasse) als additive Konstante mit berücksichtigen. Zur Unterscheidung vom rein exponentiellen Modell könnten wir vielleicht von „exponentielle Abnahme mit vorgegebener Grenze" sprechen.

Rückschauend kann hier auch deutlich werden: Welches Modell und welcher Ansatz geeignet ist, hängt auch von der Fragestellung ab. Schon die im Buch gegebene Abnahmekurve erlaubt uns, Zwischenwerte abzulesen. Wenn diese gefehlt hätte, könnte eine lineare Interpolation Anhaltspunkte für Zwischenwerte liefern. Über die „Natur des Gewichtsverlustes" bei Trocknen sagt uns aber weder eine z.B. von Hand gezeichnete Ausgleichskurve noch diese lineare Interpolation etwas. Weil unsere gewonnene „exponentielle Abnahme bis auf vorgegebene Grenze" so gut passt (was heißt eigentlich passen?), könnten wir annehmen, eine gutes Modell für ähnliche Vorgänge des Austrocknens gefunden zu haben. Natürlich ist der Wirkzusammenhang nicht bewiesen! Aus dem Kontext heraus könnte man vermuten: Beim Trocknen wird ja immer von der (feuchten) Masse ein gewisser Prozentsatz trocknen, dies spricht schon für das exponentielle Modell mit Grenze (allein wegen des asymptotischen Verhaltens käme ja ggf. auch eine gebrochen-rationale Funktion in Frage).

Fortgang

Das behandelte Beispiel „Trocknen von Beeren" legt eine Prägung des mathematischen Begriffs „begrenztes Wachstum" oder „begrenzte Abnahme" noch nicht unmittelbar nahe. Weitere (klassische) Beispiele (Erwärmung von Kühlschrankmilch auf Raumtemperatur u.ä.) führen dann aber letztlich zu der Erkenntnis: Bei den betrachteten Beispielen kommen wir bei der Beschreibung immer wieder zu einer ähnlichen Termstruktur:

$$y = a \cdot e^{k\,x} + c \qquad (4)$$

Die Brauchbarkeit dieser Beschreibung, dieses Modells, gibt Anlass zu einer innermathematischen Betrachtung: Eine Untersuchung des Einflusses der Parameter auf die entsprechenden Graphen und z.B. die Bedeutung des Parameters k in Bezug auf das Steigungsverhalten lassen sich nun motivieren. Im Wechselspiel mit der kontextualen Interpretation ergeben sich dann auch neue Perspektiven der Parameterbestimmung und Deutung (innermathematische Konsequenzen).

Fazit

Es gibt weitere Möglichkeiten, den Schülerinnen und Schülern einen Zugang zur funktionalen Beschreibung des Modells des begrenzten Wachstums zu eröffnen. In der beschriebenen Unterrichtssequenz war es insbesondere ein Anliegen, die Schülerinnen und Schüler die Eingeschränktheit ihres „mathematischen Werkzeugkastens" erfahren zu lassen und damit eine Einsicht in die Notwendig. Das gewählte Beispiel ist dazu geeignet, weil nach meiner Erfahrung die zielgerichtete Anpassung des exponentiellen Ansatzes den Schülerinnen und Schüler dabei auch recht selbstständig gelingt. Über die hier beschriebene Auseinandersetzung hinaus bietet sich eine gute Gelegenheit, den Schülerinnen und Schülern Teil-Aspekte der Modellierung in einer prozessbezogenen Dimension des Unterrichts stärker bewusst zu machen (Reflexion des Erkenntnisprozesses, Anliegen der Modellierung, Ansatz vs. Wirkzusammenhang, Modellierungskreislauf u.ä. -- abhängig von der Schwerpunktsetzung und natürlich der Progression im Lernprozess der Lerngruppe).

Im Unterricht ist damit auch unverkennbar ein zeitlicher Aufwand verbunden; zudem ist die beschriebene Unterrichtssituation unter der Perspektive der Besonderheiten der Lerngruppe und des Unterrichtszusammenhangs zu sehen! An geeigneten Stellen im Lernprozess und insbesondere wenn es um die Erweiterung von Modellen geht, scheint mir dieses Vorgehen (das Erproben, Prüfen, Innehalten und Anpassen und Verbessern) gerechtfertigt und auch lernwirksam zu sein.

Quelle:

[1] Gundlach A., Suhr F. u.a. (Hrsg.): *Elemente der Mathematik 11/12, Niedersachsen*, Bildungshaus Schulbuchverlage / Schroedel, Brauschweig [1]2009

Autor:

Stefan Luislampe, Hannover (D)
Gymnasium Herschelschule Hannover
stefan.luislampe@gmail.com