Das m&m – Experiment

Henning Körner

Spielregeln

Wir spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:

(1) Vier m&m werden auf den Tisch 'gewürfelt'.

(2) Zu jedem m&m mit obenliegendem m wird ein m&m dazugelegt.

(3) Alle m&m zusammen werden wieder auf den Tisch 'gewürfelt'.

(4) Siehe (2)

Wir spielen in 5 Gruppen; hier die Ergebnisse:

Wurf	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gr. 1	4	5	8	10	15	26	34	49	65	92
Gr. 2	4	7	12	19	33	46	74	107	157	227
Gr. 3	4	7	13	22	29	42	60	87	130	194
Gr. 4	4	7	12	18	26	40	58	86	130	201
Gr. 5	4	5	7	9	13	18	29	45	67	103

Fragen:

(A) Wie viele m&m braucht man, wenn man 30- mal spielen ("würfeln") will?

(B) Wie lange kann man mit 5000 m&m spielen?

Eine Möglichkeit wäre, sich genügend m&m zu besorgen und einfach spielen. Aber wenn man 100-mal spielen will? Das dauert! Und das Zählen wird immer öder! Aber warum sollte das wichtig sein?

Nehmen wir an, jedes Mal würfeln ist ein Jahr, und die Anzahl der m&m sind (gemessene) Anzahlen von BSE-infizierten Rindern oder AIDS-Infizierten Menschen oder erwirtschaftete EURO oder Wattwürmer im Schlick oder, oder, ... Dann ist wohl schon interessant, wie viele es z.B. in 30 Jahren sind oder wie lange es dauert bis es 5000 sind, und wenn man immer erst warten muss, bis die 30 Jahre vergangen sind... Nein, wenn man es vorher "ausrechnen" könnte, wäre das schöner. Dazu braucht man aber eine "Formel". Mathematik muss her!

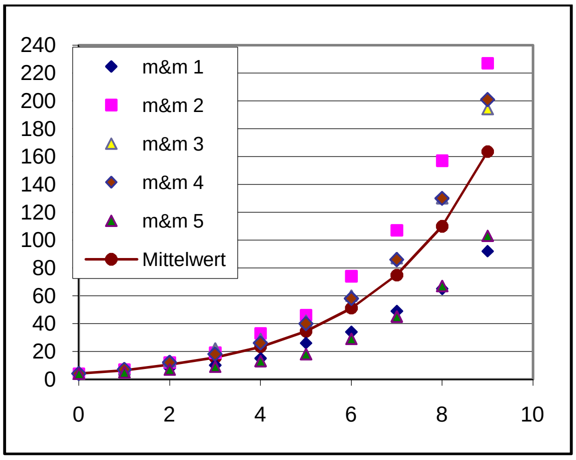

Abb. 1

Zurück zum Experiment: Die Ergebnisse der einzelnen Gruppen sind sehr unterschiedlich, der qualitative Verlauf der Messwerte ist aber immer gleich: Es werden zunehmend mehr m&m. Wenn wir nicht weiter werfen und zählen wollen, müssen wir uns überlegen, wie es weitergehen könnte. Es gibt zwei Ideen:

(1) Inga: Die Messpunkte sehen so aus, als ob sie auf einer Parabel liegen.

(2) Steffen: Bei jedem Wurf kommen ungefähr die Hälfte der auf dem Tisch liegenden m&m dazu.

Modell *Parabel*

Wir fangen mit Ingas Idee (1) an. Warum ist diese Idee gut? Wenn wir eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ haben, die zu den Messwerten passt, können wir die beiden Fragen rechnerisch beantworten; wir müssen dann nicht warten, bis 5000 m&m verbraucht sind oder 30-mal spielen, sondern können das Ergebnis voraussagen, wir machen eine Prognose.

(A) Wir brauchen nur f(30) zu berechnen, „Welcher Funktionswert (y-Wert) gehört zum x-Wert 30?“.

(B) Wir lösen die Gleichung $f(x)=5000$, „Welcher x-Wert gehört zum Funktionswert (y-Wert) 5000?“.

Weil die Messreihen verschieden sind, wird auch jede Gruppe eine andere Parabelgleichung erhalten. Wenn wir eine Art „mittlere“ Messreihe benutzen, passt diese wohl einigermaßen zu allen Messreihen.

Wurf	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mittelwert	4	6	10	16	23	34	51	75	110	163

Wie finden wir eine geeignete Parabel? Wir überlegen zuerst: Da es ja immer mehr m&m werden, muss der Scheitelpunkt auf der y-Achse oder links von der y-Achse liegen (der negative Bereich interessiert uns hier nicht, er macht bei unserem Problem keinen Sinn). Am einfachsten ist es, wenn wir die sinnvolle Annahme machen, dass der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. Da der erste Messwert (0|4) ist, setzen wir mit folgender Gleichung an: $f(x) = a \cdot x^2 + 4$.

Wie bekommen wir jetzt einen sinnvollen Wert für a? Wir können natürlich einfach probieren, wir können aber auch wieder überlegen. Wenn wir noch zusätzlich fordern, dass die Parabel durch einen weiteren Messpunkt z.B. (1|6) verläuft, können wir a ausrechnen, nämlich so: $6 = a \cdot 1 + 4 \Rightarrow a = 2$, also $f_1(x) = 2x^2 + 4$. Für die anderen Messpunkte erhält man:

Messpunkt	(2|10)	(3|16)	(4|23)	(5|34)
a	1,5	≈1,33	≈1,19	1,2

Messpunkt	(6|51)	(7|75)	(8|110)	(9|163)
a	≈1,31	≈1,45	≈1,66	≈1,96

Alle Parabeln verlaufen (natürlich) durch 2 Messpunkte, aber durch keine anderen exakt. Alle Parabeln passen ganz gut zu der Messreihe, wobei augenscheinlich die Parabeln besser passen, die die letzten Messpunkte benutzen. Exakt müssen unsere gesuchten Funktionen auch gar nicht durch die Messpunkte verlaufen, Messwerte sind ja auch immer ungenau.

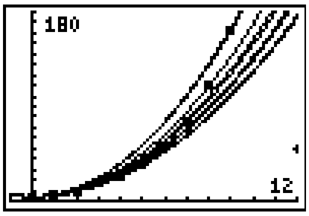

Abb. 2

Wir merken: Immer wenn die Realität mit im Spiel ist, gibt es nicht mehr genau ein richtiges Ergebnis, sondern oft mehrere mehr oder weniger gut passende Ergebnisse.

Wie sieht es denn nun mit den Fragen (A) und (B) aus? Die Prognosen zu (A) schwanken ziemlich stark zwischen ca. 1000 und 1800 m&m für 30 Würfe.

	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
28	1572	1180	1047	937	944	1023	1141	1305	1541
29	1686	1266	1123	1005	1013	1097	1223	1400	1652
30	1804	1354	1201	1075	1084	1174	1309	1498	1768
31	1926	1446	1282	1148	1157	1253	1397	1599	1888
32	2052	1540	1366	1223	1233	1335	1489	1704	2011

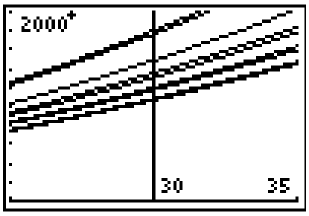

Abb. 3

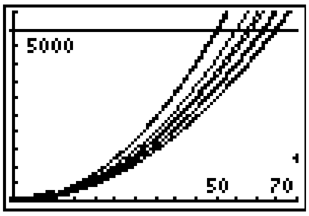

Abb. 4

Auch zu (B) schwanken die Prognosen stark. Sie liegen zwischen 50 und 65 Würfen. Wir haben hier die ‚mittlere Messreihe' benutzt, wenn wir die Messreihe mit den höchsten Anzahlen m&m und die mit der niedrigsten Anzahl m&m vergleichen, schwanken die Prognosen noch wesentlich stärker!

	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
49	4806	3606	3197	2861	2885	3125	3485	3990	4710
50	5004	3754	3329	2979	3004	3254	3629	4154	4904
51	5206	3906	3463	3099	3125	3385	3775	4322	5102
52	5412	4060	3600	3222	3249	3519	3925	4493	5304
53	5622	4218	3740	3347	3375	3656	4077	4667	5510
54	5836	4378	3882	3474	3503	3795	4232	4845	5719
55	6054	4542	4027	3604	3634	3937	4390	5026	5933
56	6276	4708	4175	3736	3767	4081	4551	5210	6151
57	6502	4878	4325	3870	3903	4228	4715	5397	6372
58	6732	5050	4478	4007	4041	4377	4882	5588	6597
59	6966	5226	4634	4146	4181	4529	5051	5783	6827
60	7204	5404	4792	4288	4324	4684	5224	5980	7060
61	7446	5586	4953	4432	4469	4841	5399	6181	7297
62	7692	5770	5117	4578	4617	5001	5578	6385	7538
63	7942	5958	5283	4727	4767	5164	5759	6593	7783
64	8196	6148	5452	4878	4919	5329	5943	6803	8032
65	8454	6342	5623	5032	5074	5497	6130	7018	8285
66	8716	6538	5797	5188	5231	5667	6320	7235	8542

Mit den Grafiken bekommen wir einen guten Überblick, mit den entsprechenden Tabellen erhalten wir schnell konkrete Ergebnisse, wir können die Werte aber natürlich auch ‚zu Fuß' berechnen. Für f_4 erhält man z.B.

$$f_4(30) = \frac{19}{16} \cdot 30^2 + 4 = \frac{4291}{4} = 1072{,}5$$

$$5000 = \frac{19}{16} \cdot x^2 + 4 \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{79936}{19}} \approx 64{,}863$$

Wenn wir uns für eine Parabel entscheiden müssen, nehmen wir wieder den Mittelwert der Streckfaktoren $a \approx 1{,}5077$. Damit ist $f_p(x) = 1{,}5 \cdot x^2 + 4$, also in diesem Fall f_2 eine sinnvolle Parabel.

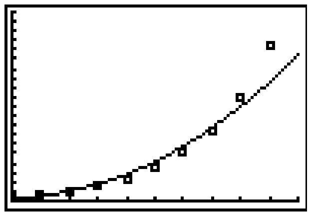
Abb. 5

Wir erhalten: (A) Für 30 Würfe benötigt man ca. 1350 m&m. (B) Mit 5000 m&m kann man knapp 60-mal werfen. Wir wissen aber auch, dass die Ergebnisse von Fall zu Fall stark schwanken können.

Modell *Zuwachs um die Hälfte*

(2) Wir beschäftigen uns nun mit Steffens Idee „Es kommt immer ungefähr die Hälfte an m&m dazu." Als Begründung gibt er an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Zeichen m&m oben liegt, 0,5 ist, dass man also durchschnittlich bei einem Wurf die Hälfte mit oben liegendem Zeichen erhält. Es ist klar, dass dies in den allermeisten Fällen natürlich nicht exakt stimmt, aber wohl ungefähr. Ingas Lösungen waren ja auch nicht exakt! Eine erste Auswertung ‚zu Fuß' liefert:

0	1	2	3	4
4	6	9	13,5	20,25

Steffen und seine Gruppe (eine andere Gruppe hat dasselbe gemacht), hat mit dem GTR ausgewertet. Es wiederholt sich ja immer das Gleiche, es wird iteriert, also:

$x_0 = 4$ und $x_{neu} = x_{alt} + 0{,}5 \cdot x_{alt}$

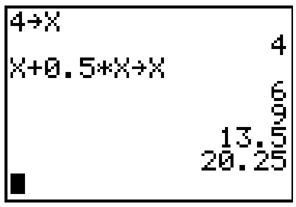

Abb. 6

Die „Kommazahlen" machen natürlich keinen Sinn. Wir lassen den GTR ganzzahlig rechnen ([MODE][FLOAT][0]) Durch wiederholtes Betätigen von [ENTER] können wir die Fragen (A) und (B) schnell beantworten.

	(A) Wie viele m&m für 30 Würfe?	(B) Wie viele Würfe mit 5000 m&m?
Inga	1000-1800	50-65
Steffen	ca. 760000	17

Das Ergebnis überrascht total! Für 30-mal Werfen benötigen wir 767000 m&m und mit 5000 m&m können wir nur 17-mal spielen. Kann das stimmen? Mit einer Tüte (ca. 250 m&m) konnten wir ca. 10-mal spielen. Wenn wir nur dreimal so lange spielen wollen, brauchen wir nach Steffens Modell ca. 3000 Tüten. Einigen erscheint dies zu extrem, da scheinen die Werte des Modells von Inga doch plausibler. Anderseits ist die Argumentation von Steffen auch plausibel. Hanno bemerkt, dass die Werte, die sich aus Steffens Ansatz ergeben, gut zu der ‚mittleren Messreihe' (S. 2) passen. Was nun?

Vergleichen wir einmal die beiden Ideen. Inga hat sich die Grafik zu den Messwerten angeschaut und sofort an eine Parabel gedacht. Steffen braucht eigentlich gar keine Messwerte, er hat seine Idee durch eine theoretische Überlegung gewonnen. Dass diese theoretische Überlegung auch zu den Messwerten passt, hatte Hanno zuerst bemerkt. Wir schauen noch einmal genauer auf die Messreihen der einzelnen Gruppen. Es muss ja immer nur ungefähr die Hälfte dazukommen. Und tatsächlich, die Gruppen 2,3 und 4 liegen etwas unterhalb der berechneten Werte, die beiden anderen Gruppen etwas oberhalb. Steffens Idee ist somit theoretisch einsichtig und praktisch (im Experiment) bewährt. Wie sieht das bei Ingas Idee aus? Sie kann als einziges Argument für die Parabel das Aussehen der Messreihe benutzen, aber warum es gerade eine Parabel sein soll, kann nicht weiter begründet werden. Andere Gruppen hatten ja auch schon vorgeschlagen, dass eine Funktion mit x^4 gut passt.

Schaut man sich die ‚mittlere Parabel' (Abb. 5) an, dann fällt auf, dass diese am Anfang gut passt, die letzten Messwerte aber schon zunehmend oberhalb der Parabel liegen, eine etwas ‚steilere' Funktion könnte sinnvoll sein. Wir erhöhen mit den Ansätzen $f(x) = a \cdot x^3 + 4$ bzw. $f(x) = a \cdot x^4 + 4$ den Exponenten. Mit dem Messpunkt (8|110) erhalten wir:

$$f(x) = \tfrac{106}{512}x^3 + 4\text{; (A): 5594 m\&m, (B): 29-mal}$$

$$f(x) = \tfrac{106}{4096}x^4 + 4\text{; (A): 20966 m\&m, (B): 21-mal}$$

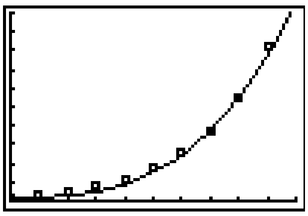

Abb. 7

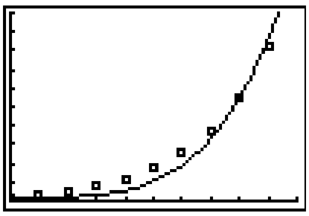

Abb. 8

Wir erhalten wieder ganz andere Werte und damit Prognosen, irgendwo zwischen Ingas und Steffens. Es gibt eben ganz viele Funktionen, deren Aussehen in dem Bereich zwischen $x = 0$ und $x = 10$ zu den Messwerten passt. Steffens Idee zeigt dagegen einen inneren Zusammenhang zwischen den Messwerten und ist deswegen überzeugend. Aber sie hat einen Nachteil. Wir können die Werte immer nur schrittweise bestimmen, wir müssen immer wieder [ENTER] drücken, und wenn wir 100-mal spielen wollen, nervt das ganz schön.

Eine direkte Zuordnungsvorschrift, eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ wäre schön. Wir konnten durch Nachdenken eine Iterationsformel finden, aber keine Funktionsgleichung zur direkten Bestimmung der gesuchten Werte (30-mal spielen/5000 m&m). Wir müssen wohl noch einmal nachdenken, um vielleicht auch eine Funktionsgleichung zu finden. Vorher nutzen wir aber noch einmal die Fähigkeiten des GTR aus, er kann nämlich auch die Iterationsformel direkt auswerten, er drückt quasi automatisch ganz schnell hintereinander [ENTER].

Wir erzeugen eine Folge („sequence") von Zahlen [MODE][SEQ].

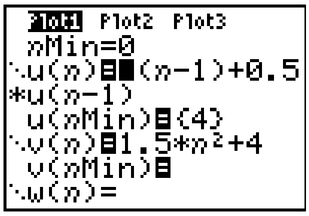

Abb. 9

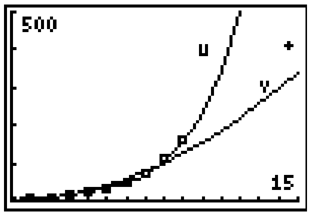

Abb. 10

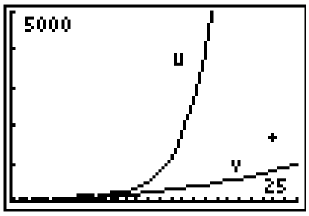

Abb. 11

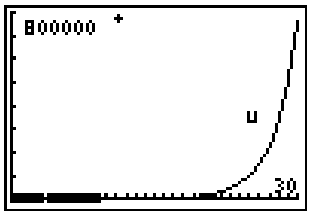

Abb. 12

In der Grafik sind eigentlich nur Punkte („dot") sinnvoll, für eine bessere Anschaulichkeit kann man aber auch verbinden („connected"). Im Bereich der Messreihe ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen, unmittelbar außerhalb der Messreihe eine starkes Auseinandergehen.

Die Ergebnisse zeigen, dass eine viel ‚steilere' Funktion als eine Parabel gesucht ist. Wir wissen, dass mit wachsendem Exponent n die Potenzfunktionen immer steiler anwachsen, also versuchen wir es einmal mit $f(x) = a \cdot x^{16} + 4$. Mit (8|110) erhält man dann

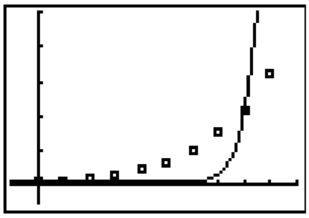

Abb. 13

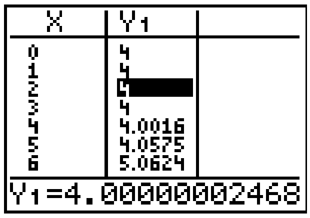

Abb. 14

Schon die Grafik zeigt, dass diese Funktion schlecht passt, aber auch an der Tabelle sieht man, dass nicht immer „die Hälfte dazu kommt". Eine Potenzfunktion kommt damit wohl nicht in Frage, denn mit wachsendem Exponent werden die zwar immer steiler, aber zu Beginn wachsen sie dafür auch umso langsamer.

Wir müssen wieder überlegen. Vorher fassen wir aber noch einmal zusammen:

	Bestand (Anzahl der m&m)	Änderung (Zunahme der m&m)
Ingas Modell	$f(x) = 1{,}5 \cdot x^2 + 4$	? (2) ?
Steffens Modell	? (1) ?	$f(x) = f(x-1) + 0{,}5 \cdot f(x-1)$ Startwert: $f(0) = 4$

Einmal kennen wir eine direkte Formel zur Bestimmung des *Bestandes*, also der Menge m&m, das andere Mal kennen wir eine Formel zur Bestimmung der *Änderung*, also für die Zunahme der m&m. Wie bestimmt man die Änderung? Wie hat sich die Anzahl der Schlickwürmer im Watt im letzten Jahr

verändert? Man zieht die Menge Wattwürmer des letzten Jahres $x_{alt} = f(x-1)$ von der Menge dieses Jahres $x_{neu} = f(x)$ ab, also hier: $f(x) – f(x-1) = 0{,}5 \cdot f(x)$. „*Die Änderung ist die Hälfte des Bestandes.*“
Man kann die Formel auch so schreiben: $f(x) = 1{,}5 \cdot f(x-1)$. „*Der neue Bestand ist das 1,5-fache des alten Bestandes*“.

Zwei Fragen drängen sich auf:
(1) Für welche Funktionen gilt die Iterationsformel für die Änderung?
(2) Was gilt für das Änderungsverhalten einer Parabel?

Exponentialfunktion

Bevor wir uns Frage (1) zuwenden, überlegen wir uns, ob wir vielleicht schon eine Funktion kennen, bei der wir auch eine Formel für die Änderung kennen. Die Änderung ist einfach, wenn sie immer konstant ist, und dies ist bei Geraden der Fall, also:

Bestand	Änderung
$f(x) = m \cdot x + b$	$f(x) – f(x-1)$ $= mx + b – (m\cdot(x-1) +b) = m$

Nun zu Frage (1): Wir rechnen noch einmal ganz langsam, mit allen Rechenschritten:
$f(0) = 4$
$f(1) = 1{,}5 \cdot f(0) = 1{,}5 \cdot 4$
$f(2) = 1{,}5 \cdot f(1) = 1{,}5 \cdot [1{,}5 \cdot f(0)] = 1{,}5^2 \cdot 4$
$f(3) = 1{,}5 \cdot f(2) = 1{,}5 \cdot [1{,}5^2 \cdot f(0)] = 1{,}5^3 \cdot 4$
Schnell gibt es ein Ergebnis: $f(x) = 4 \cdot 1{,}5^x$. Wir überprüfen das Ergebnis natürlich sofort. Es passt!

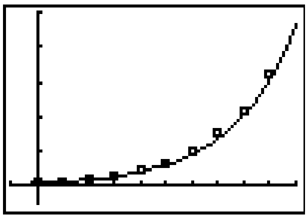
Abb. 15

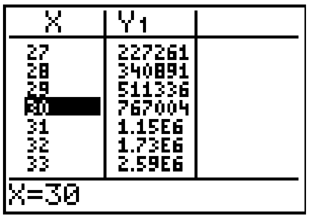

Abb. 16

Damit ist Frage (1) beantwortet. Mit dieser Funktion und ihrer Herleitung können wir sofort auch einige Variationen zu unserem Experiment beantworten:
Wir werfen zuerst 6 m&m auf den Tisch: $f(x) = 6 \cdot 1{,}5^x$
Es wird jedes Mal nur die Hälfte der m&m mit oben liegendem Zeichen dazugelegt: $f(x) = 4 \cdot 1{,}25^x$

Wir haben eine Funktion für den Bestand an m&m gefunden, so dass wir nun direkt ausrechnen können, wie viele m&m man z.B. für 30 Würfe benötigt. Aber es ist eine neuartige Funktion. Bisher haben wir nur Funktionen untersucht, bei denen x die Basis ist, also Funktionsterme der Art $x^{\text{irgendwas}}$. Jetzt ist es aber genau umgekehrt, wir haben eine Funktion der Art irgendwas^x, x ist also Exponent. Eine neue Funktion ist damit nicht einfach vom Himmel gefallen (oder von Herrn Körner an die Tafel geschrieben worden), sondern hat sich aus einem Problem und seiner Lösung ergeben. Wenn eine solche Funktion nur beim Werfen von m&m auftreten würde, wäre sie recht uninteressant. Aber dem ist natürlich nicht so, wie wir bald sehen werden. Wir haben also einen neuen Funktionstyp kennen gelernt mit der allgemeinen Gleichung $f(x) = a \cdot b^x$. Diese Funktionen heißen *Exponentialfunktionen*. Für weitere Untersuchungen muss jetzt unser Funktionenlabor wieder tätig werden:

Welches Aussehen und welches Verhalten können Exponentialfunktionen haben?

Die ‚ideale' Funktion von Steffen passt sehr gut. Wir können aber natürlich jetzt auch, wie bei der Auswertung von Ingas Idee, passende Exponentialfunktionen durch Benutzung von Messwerten berechnen: Der Ansatz $f(x) = 4 \cdot b^x$ führt mit (8|110) auf

$$110 = 4 \cdot b^8 \quad \Rightarrow b = \sqrt[8]{27{,}5} \approx 1{,}5133 .$$

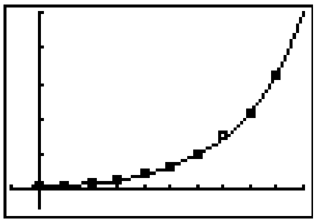
Abb. 17

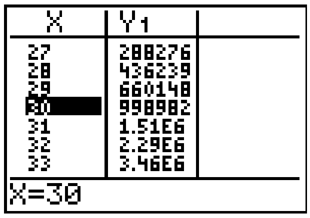

Abb. 18

Interessant ist, dass die Funktion $f(x) = 4\cdot 1{,}5133^x$ genauso gut passt wie $f(x) = 4\cdot 1{,}5^x$, aber trotzdem schwankt die Prognose für die Anzahl der m&m bei 30 Würfen stark! Mit den anderen Messpunkten erhalten wir:

Messpunkt	(1|6)	(2|10)	(3|16)	(4|23)
b	1,5	1,5811	1,5874	1,5485
x=30	767004	3722546	4194220	1992490
Messpunkt	(5|34)	(6|51)	(7|75)	(9|163)
b	1,5342	1,5284	1,5200	1,5097
x=30	1508409	1346389	1141215	930636

Die Modelle passen alle gut zu den Daten, aber die Prognosen schwanken auch hier sehr stark, zwischen 770000 und 4,2 Millionen!

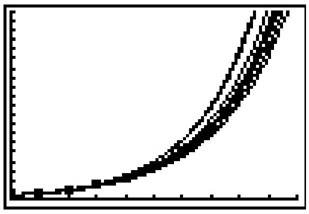
Abb. 19

Obwohl das Modell den Zusammenhang zwischen Wurfzahl und Anzahl der m&m angemessen beschreibt, können Anpassungen an die konkreten Daten zu sehr unterschiedlichen Prognosen führen. Unsere „mittlere Messreihe“ wächst durchweg etwas stärker als die ideale Reihe, die man ohne Einfluss von Zufall erhält. Können wir dies dem Wirken des Zufalls zuschreiben, oder ist das Modell doch nicht angemessen?

Nun zu Frage (2): Bei linearen Funktionen sind die *Differenzen* aufeinander folgender Werte konstant, $f(x+1)-f(x)=m$, die Änderung ist konstant.
Bei Exponentialfunktionen sind die *Quotienten* aufeinander folgender Werte konstant. Der nächste Wert ist ein Vielfaches des jetzigen Wertes. Die Änderung ist proportional zum Bestand.

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{4 \cdot 1{,}5^{x+1}}{4 \cdot 1{,}5^{x}} = 1{,}5 \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= 1{,}5 \cdot f(x) \quad \Rightarrow \\ f(x+1) - f(x) &= 0{,}5 \cdot f(x) \end{aligned}$$

Was gilt nun für Parabeln, also z.B. unsere m&m – Parabel $f(x) = 1{,}5 \cdot x^2 + 4$? Weder die *Differenzen* sind konstant noch die *Quotienten*, wie man leicht nachrechnen wird. Das Wachstum ist wirklich von anderer Qualität. Die Differenzen werden größer, also wachsen Parabeln stärker als Geraden (naja, das wussten wir schon lange, wir sehen es aber jetzt auf eine andere Weise). Die Quotienten werden kleiner, also wächst eine Parabel schwächer als eine Exponentialfunktion. Naja, dies haben wir auch schon beim Vergleich von Ingas und Steffens Modell stark vermutet. Können wir nichts Neues entdecken? Doch! Wenn man die *Differenzen der Differenzen* betrachtet, fällt auf, dass dies eine konstante Folge von Werten ergibt, nämlich 3, 3, 3, ... Die Differenzen wachsen also wie eine Gerade, nämlich konstant.

Bei quadratischen Funktionen ist die Änderung der Änderung konstant, die Differenzen (Änderungen) erzeugen eine lineare Funktion.

Anmerkungen

Der Bericht ist die Darstellung einer konkreten Unterrichtssequenz, wie sie in genau der Form sicher nicht oder nur abgewandelt realisiert werden kann (und sollte). Ein etwas anders verlaufender Unterrichtsgang beim selben Lehrer ist in [1] veröffentlicht, wo die Unterrichtssequenz auch in einen weiteren Kontext eingebettet ist. Das Experiment (Spiel) sollte zur Einführung in den Themenbereich „Wachstum“, noch vor der expliziten Thematisierung von Exponentialfunktionen, behandelt werden. Wenn das Charakteristische des exponentiellen Wachstums schon bekannt ist, wird die produktive Spannung zwischen deskriptiver Modellierung mit einer, den Schüler vertrauten, Parabel einerseits und dem zugrunde liegenden Wirkzusammenhang vermutlich nicht entstehen, das Experiment wird dann vermutlich zu einer ‚reinen’ Anwendung, weil das Wachstumsprinzip der m&m wohl unmittelbar erkannt wird.

Literatur:

[1] H. Körner: *Modellbildung mit Exponentialfunktionen*, in: Henn/Maaß (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (ISTRON), Bd.8, S.155-177

Autor:

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar Oldenburg
hen.koerner@t-online.de