Mathematischer Aufsatz: „The rule of the three – drei Wege, ein Problem zu lösen“

Vera Kleene

In der Regel gibt es in der Mathematik drei Wege, ein Problem zu lösen:

- graphisch
- tabellarisch – gezieltes Probieren
- algebraisch bzw. rechnerisch.

Man mag sich vielleicht wundern, warum es nicht einfach ein universelles Verfahren gibt. Nun, jedes Verfahren hat seine Vor- und Nachteile, nicht jeder hält jedes Verfahren für logisch oder zu seinen Absichten passend, doch dazu später noch einmal. Mit diesen drei Verfahren kann man auch jeden linearen Vorgang beschreiben und damit zusammenhängende Aufgaben berechnen, zum Beispiel die Schnittpunkte zweier Geraden berechnen.

Die drei unterschiedlichen Verfahren möchte ich anhand einer Schnittpunktberechnung zweier Geraden beschreiben und erläutern.

Aufgabenstellung:
Familie Müller wandert einen 12 km langen Rundweg. Sie starten um 14 Uhr und planen 4 Stunden ein. Eine Stunde später folgt Herr Kopflos ihnen mit 5 km/h. Wann holt Herr Kopflos die Müllers ein?

Tabellarisch – gezieltes Probieren:

Um das Problem tabellarisch zu lösen, benötigt man, logischerweise, zuerst eine Tabelle.

1. Schritt: Tabelle erstellen und Spalten und Zeilenüberschriften finden

Uhrzeit	Weg – „Müller“	Weg – „Kopflos“
15 Uhr	3 km	0 km
16 Uhr	6 km	5 km
17 Uhr	9 km	10 km
18 Uhr	12 km	15 km

2. Schritt: Grund- und neu errechnete Werte eintragen

Da Herr Kopflos um 15 Uhr (also eine Stunde später als die Müllers) losgeht, hat er zu diesem Zeitpunkt erst 0 km zurückgelegt, während die Müllers schon eine Stunde mit ihren 3 km/h (12:4=3) wandern. Wie aus der Tabelle deutlich zu erkennen ist, hat Herr Kopflos die Müllers um 17 Uhr bereits überholt, was bedeutet, dass er ihnen bereits begegnet sein müsste (also zwischen 16 Uhr und 17 Uhr). Um die genaue Uhrzeit herauszufinden, muss man die Schrittweite verkleinern.

3. Schritt: Wenn nötig die Schrittweite zwischen den Uhrzeiten verkleinern – Tabelle verdichten

.Uhrzeit	Weg – „Müller“	Weg – „Kopflos“
16.15 Uhr	6,75 km	6,25 km

.Uhrzeit	Weg – „Müller“	Weg – „Kopflos“
16.30 Uhr	7,5 km	7,5 km
16.45 Uhr	8,25 km	8,75 km

Die Schrittweite kann man immer wieder verkleinern, was bei komplizierten Aufgaben mit großen oder mit ungünstigen Dezimalzahlen viel Zeit und Platz brauchen könnte. Dennoch ist das Verfahren für viele Schüler das Beste, da eine Tabelle am einfachsten zu erstellen ist.

Graphisch:

Um das Problem in einem Koordinatensystem zu veranschaulichen oder zu lösen, benötigt man entweder eine Geradengleichung (Darstellen auf dem TI-83), zwei Punkte oder einen Punkt und die Steigung (Handzeichnung).

1. Schritt: Erstellung eines Koordinatensystems, Festlegung der Einheiten an x- und y- Achse

2. Schritt: Einzeichnen der Geraden (in diesem Fall für Familie Müller und Herrn Kopflos)

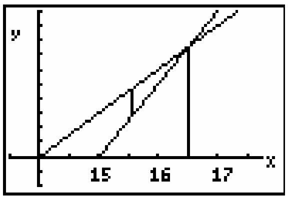

Abb. 1

Wie man in der Graphik leicht erkennen kann, treffen sich Familie Müller und Herr Kopflos um 16.30 Uhr. Zudem kann man aus der Graphik auch leicht entnehmen, wie weit die beiden Parteien zu einem beliebigen Zeitpunkt von einander entfernt sind.

Durch die optische Präsentation der Aufgabe ist die Lösung leicht nachzuvollziehen und sind die Zusammenhänge leicht zu erkennen. Bei der Erstellung der Zeichnung und beim Ablesen können sich jedoch leicht Ungenauigkeiten und Fehler einschleichen.

Algebraisch:

Beim algebraischen Lösungsansatz versucht man zuerst die wichtigsten Informationen aus dem Text in Formeln umzuwandeln.

1. Schritt: Informationen aus dem Text in Formeln umwandeln

Zeit (H. Kopflos) bis zum Einholpunkt:	x
Weg, den F. Müller zurückgelegt hat:	$x \cdot 3+3$
oder	$(x+1) \cdot 3$
Weg, den H. Kopflos zurückgelegt hat:	$x \cdot 5$

Der Term der Müllers besitzt das „+3“, da sie ja eine Stunde (also 3 km) mehr gelaufen sind. Weil die Müllers und Herr

Kopflos die gleiche Strecke gelaufen sind, darf/muss man die Terme gleichstellen.

2. Schritt: Terme gleichsetzen und Lösung der Gleichung bestimmen

$$\begin{aligned} 3\cdot x+3 &= 5x \\ 3\cdot x &= 5x-3 \\ -2\cdot x &= -3 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

3. Schritt: Lösung $x = 1{,}5$ in einen der „Weg-Terme“ einsetzen: $x = 1{,}5:\ 1{,}5\cdot 5 = 7{,}5$

Zusätzlich zu der Information, dass sie sich treffen, wenn Herr Kopflos 1,5 h und Müllers 2,5 h gelaufen sind, erhält man die Information, dass sie sich bei Kilometer 7,5 begegnen.

Das algebraische Verfahren wird von den Mathematikern häufig als „Königsweg“ angesehen, weil es am exaktesten ist. Allerdings benötigt man gewisse „Vorkenntnisse“. Wenn in den Gleichungen hohe Potenzzahlen wie z.B. x^5 vorkommen, wird es für Nicht-Mathematiker oder uns Schüler der unteren Klassen zu schwierig:

$$x^5-2\cdot x^2-12\cdot x = x^4-2\cdot x^3$$

Gezieltes Probieren mit ganzen Zahlen führt auf x=0 bzw. x=2 als zwei Lösungselemente. Das graphische Verfahren ergibt zwei merkwürdige Kurven, die sich bei $x = 0$ und $x = 2$ schneiden. Man sieht aber auch, dass es noch einen 3. Schnittpunkt bei $x = -1{,}344389$ gibt, den man durch gezieltes Probieren nicht erhält.

Frage: Die beiden anderen Schnittpunkte liegen auf der x-Achse (!), kann man sie deshalb gezielt Erraten?

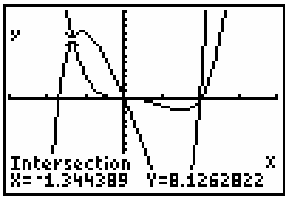

Abb. 2

Algebraisch kann ich das nicht lösen, aber vielleicht lerne ich das ja später?!

Insgesamt hat also jedes Verfahren seine Vor- und Nachteile:

Die exaktesten Ergebnisse bietet das recht komplizierte algebraische Verfahren. Für Schüler unterer Jahrgangstufen sind Terme mit hohen Potenzen aber nicht besonders gut zu handhaben.

Zum Darstellen und Verstehen ist das graphische Verfahren am besten. Die abgelesenen Ergebnisse können aber Ungenauigkeiten enthalten.

Das übersichtliche, gut strukturierte und leicht zu erstellende tabellarische Verfahren wird auch bei Fahrplänen verwendet. Es kann jedoch bei großen oder komplizierten Zahlen sehr lange dauern. Das graphische Verfahren kann sehr gut mit dem GTR TI-83 durchgeführt, das tabellarische durch den Computer (z.B. Excel) unterstützt werden.

Letzten Endes muss man bei jeder Aufgabe neu entscheiden, welches Verfahren jeweils am besten geeignet ist. Solange es mir möglich und verständlich ist, bevorzuge ich den algebraischen Ansatz. Als zweite Wahl würde ich das graphische Verfahren benutzen (besonders, wenn die Terme schon gegeben sind!). Mir erscheint das tabellarische Verfahren zu unübersichtlich, es wird aber von vielen Mitschülern gerne benutzt.

Autorin:
Vera Kleene, Stadthagen (D)
Schülerin am Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen

Anmerkung des bereuenden Fachlehrers

Das Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen ist ein Ganztagsgymnasium, das an zwei Tagen verbindlich Nachmittagsunterricht durchführt. Eines der pädagogischen Prinzipien der Schule ist, dass Hausaufgaben überwiegend als Wochenplan erteilt werden. Im Rahmen des Mathematikunterrichts der Klasse 8 wurde zum Thema "Gleichungen" ein mathematischer Aufsatz als Wochenaufgabe verlangt, der sich mit unterschiedlichen Ansätzen und Aspekten von "Problemlösen" beschäftigt. Alle Schülerinnen und Schüler arbeiten im Unterricht ab Klasse 7 mit dem Graphikrechner TI-83 Plus bzw. TI-84. Der vorliegende Aufsatz wurde von einer Schülerin der Klasse 8e angefertigt.

Heiko Knechtel, Bückeburg (D)
Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen
Hknechtel@aol.de