TI-nspire™

Kapitalwachstum

Von: René Hugelshofer

Schulstufe: Sekundarstufe II (9-10 Jahre)
Fach: Mathematik
Benötigte Zeit: 90 minutes

Ziele

- Die Grenzen des exponentiellen Wachstums erfahren und Gewinnerwartungen (Börse, Wirtschaft, Rohstoffverbrauch usw.) besser abschätzen können.
- Anhand von einfachen Beispielen mit Funktionsbausteinen umgehen können.
- Rekursives Wachstum als Tabelle und Funktion darstellen können.

Voraussetzungen

Schülerinnen und Schüler
- kennen die Zinseszinsformel
- haben Formeln als Funktionsbausteine definiert (z.B. Formeln aus der Physik)

Aufgabe 1

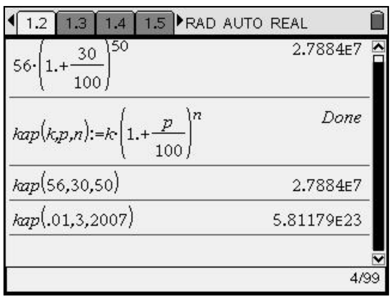
Bill Gates steigerte sein Vermögen in guten Jahren mindestens um 30%. Im Jahr 2007 erreichte sein Vermögen 56 Mia $.

a) Wie gross wäre sein Vermögen in 50 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 30%. Vergleiche mit dem Bruttosozialprodukt der Welt (Internetsuche).
b) Erstelle eine Formel kap(k,p,n) für das Wachstum eines beliebigen Kapitals k in n Jahren bei einem Zinsfuss p. Wende die Formel auf Aufgabe a) an.
c) Nehme an, Josef hätte für Jesus im Jahre 1 einen Cent angelegt bei einem durchschnittlichen Zinsfuss von 3%. Wie gross wäre sein Vermögen heute? Vergleiche mit dem Vermögen von Gates in a).
d) Zeichne das Wachstum des Vermögens von Gates während den 50 Jahren auf. Warum ist ein stetig gleich bleibendes hohes Wachstum auf die Dauer nicht möglich?

Aufgabe 2

Herr Spar legt ein Kapital von k = 1000 € auf ein Alterssparkonto mit p = 5% Zins an. Am Anfang jedes folgenden Jahres wird jeweils ein Betrag a = 500 € einbezahlt.
Wie gross ist sein Vermögen nach 20 Jahren, nach 50 Jahren?
Löse die Aufgabe mit Hilfe der Tabellenkalkulation und mit einer Rekursionsformel.

Lösung zu Aufgabe 1



a) Das Vermögen von Gates würde sich in 50 Jahren auf sagenhafte $2.8*10^7$ Mia $ vergrössern. Dies wäre weit mehr als das Welt-Bruttosozialprodukt von ca. $6*10^4$ Mia $ (2006).
b) Die Zinseszinsformel wird zur Vereinfachung als Funktion kap(k,p,n) der 3 Variablen k, p und n definiert (auch Funktionsbausteine oder Funktionsmodule genannt).
Durch Einsetzen von konkreten Werten erhält man das gewünschte Kapital, z.B. für Aufgabe a): kap(56,30,50).
In der Formel wurde ein Wert numerisch eingegeben, damit wird eine symbolische Ausgabe vermieden (alternativ: Ctrl+enter).

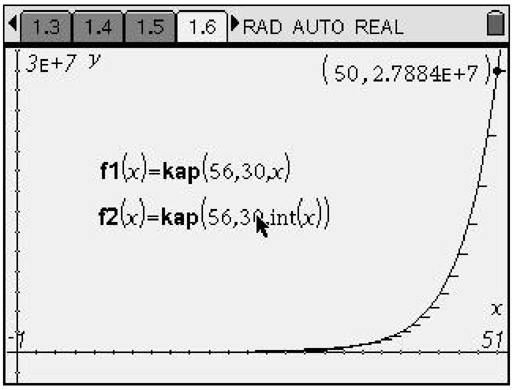
c) Verglichen mit dem Kapital kap(.01,3,2006), welches heute Jesus mit einem weit kleineren Startkapital besitzen würde, wäre das Kapital von Gates in 50 Jahren äusserst bescheiden. Allerdings müsste man auch die Teuerung berücksichtigen.

d) Im Bild wurde die stetige Wachstumsfunktion kap(56,30,x) aufgezeichnet. Exakt wäre die diskrete Funktion kap(56,30,int(x)), da die Verzinsung erst am Ende des Jahres erfolgt.
Exponentielles Wachstum stösst schnell an Grenzen. Dies sieht man an Hand der Verdoppelungszeit. Die Anzahl Jahre, in denen sich das Kapital verdoppelt hängt nicht vom Anfangskapital ab und berechnet sich durch Auflösen der Gleichung

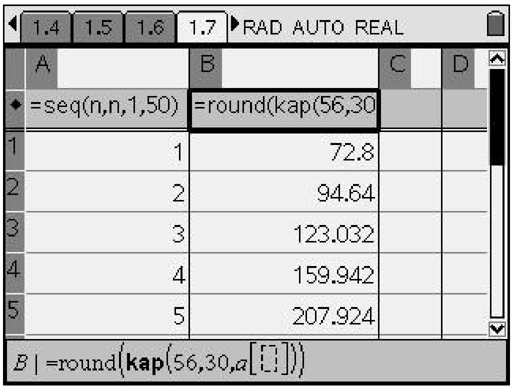
$$k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 2 \cdot k\ .$$

nach n.

Resultat: $n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(\frac{p+100}{100})}$. Für p =30% beträgt die Verdoppelungszeit z.B. 2.6 Jahre, bei 3% sind es 24 Jahre. Das Weltbruttosozialprodukt wächst aber um weniger als 5% und würde deshalb von Gates in kurzer Zeit übertroffen.



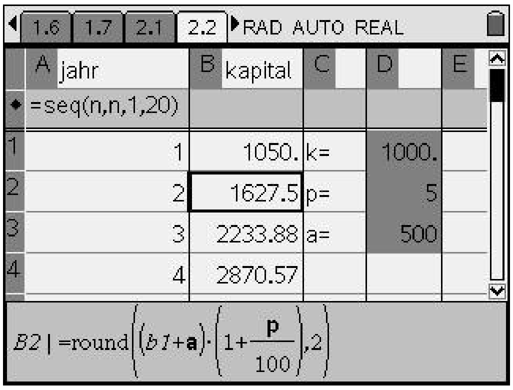
Die Verdoppelungszeit kann auch in einer Tabelle leicht abgeschätzt werden. Das Wachstum wird mit Hilfe der Formel kap(56.,30,a[]) in einer Tabelle dargestellt, wobei a[] sich auf die Elemente der Kolonne A bezieht (Gross- und Kleinschreibung wird nicht berücksichtigt). Hier kann die Verdoppelungszeit leicht abgeschätzt werden. Mit round(….,2) wird der Wert auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet.



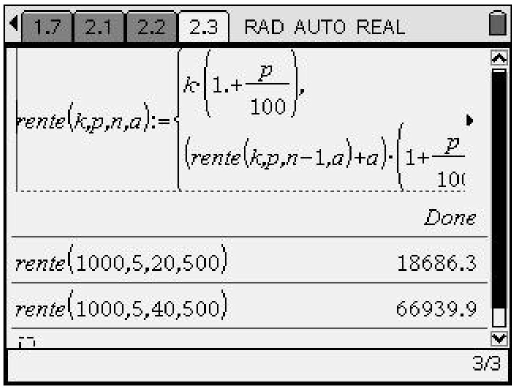
Bemerkung und Erweiterung der Aufgabe

In der Informatik gehört die Definition von Programmteilen als Funktionen oder Prozeduren und deren Verwendung als Blackbox zum täglichen Brot. Ohne diese sog. Abstraktion würden Programme zu unübersichtlich.
Auch in der Mathematik lassen sich anspruchsvolle Aufgaben durch Funktionsbausteine kürzer und übersichtlicher darstellen, z.B. kann der Ausdruck (bei TI-nspire CAS auch mit solve)
nsolve(kap(kap(kap(kap(1,12,9)+kap(2,5,9),12,3)-30,3),x,3)=3,x)
als folgende Aufgabe interpretiert werden:
Ein Anleger hat in den goldenen 90er Jahren 1 Mio in Aktien (12% Gewinn jährlich) und 2 Mio in Obligationen (5%) während 9 Jahren angelegt. Um vom Börsenboom besser profitieren zu können, legt er auch die 2 Millionen in Aktien an. Er hat während 3 Jahren tatsächlich einen Gewinn von durchschnittlich 12%. Aber im Börsencrash verliert er während 3 Jahren durchschnittlich 30%. Was müsste der durchschnittliche Gewinn in den nächsten 3 Jahren sein, damit der Anleger keinen Verlust erleidet?
Beachte auch, dass der obige Ausdruck leicht moduliert werden kann: Was wäre z.B., wenn nach den ersten 9 Jahren alles Geld in Obligationen angelegt worden wäre und dafür erst nach dem Börsencrash wieder voll in Aktien investiert worden wäre? Diese Zusatzaufgabe erfordert nur die Änderung von 2 Zinssätzen.

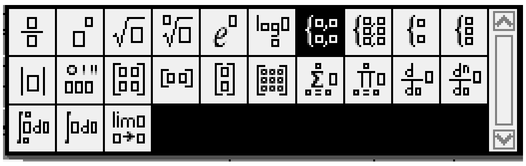
Lösung zu Aufgabe 2



Vorgaben: Anfangskapital 1000, Zins 5%, Anzahl Jahre 20, Betrag 500, jeweils ab anfangs zweitem Jahr.
Wir speichern die gegebenen Werte in den Feldern D1 bis D3 und speichern diese in den Variablen k, p und n (Feld auswählen und Taste var drücken).
Im ersten Jahr wird nur das Anfangskapital verzinst, wir tragen im ersten Feld die Formel $k \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$ ein (oder mit Verwendung von Funktionsbausteinen kap(k,p,1)). Dann kommt jeweils anfangs Jahr der Betrag von 500 € dazu, der zum Betrag des vorhergehenden Feldes addiert und wiederum ein Jahr verzinst wird, also im Feld A2 die Formel $(b1+a)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$ (oder kap(b1+a,p,1). Diese Formel kopieren wir nach unten.



Die rekursive Formel kann in TI-nspire sehr einfach mit der entsprechenden Formatvorlage für stückweise definierte Funktionen (unten) erstellt werden (Rekursionsformel siehe Bild rechts). Diese Formel speichern wir in rente(k,p,n,a) ab. Die Lösung von Aufgabe 2 erhält man nun durch Einsetzen der Werte für k, p, n und a (siehe rechts).



Achtung: *Bei rekursiven Aufrufen stösst der TI-nspire (besonders der Handheld) sehr schnell an die Kapazitätsgrenzen.*

Bemerkung: *Wenn man für Aufgabe 2 eine neue Aufgabe einfügt, bleibt die Funktion kap nicht erhalten. Fügt man nur eine neue Seite ein, kann die Funktion kap für die Definition der Funktion „rente“ verwendet werden: kap(k,p,1), bzw. kap(rente(k,p,n-1,a)+a),p,1), was aber die Aufgabe etwas abstrakter macht.*