

Oldtimerrennen

Der 7. Schaulauf zur Norddeutschen Oldtimer-Parade findet auf dem Flugplatz-Rundkurs in Wunstorf statt. Die Rennleitung erstellt bei den Qualifikationsläufen Streckenprotokolle der Teilnehmer. Es werden zwei Runden zu je 5,05 km gefahren.

Die Tabelle gibt einen Auszug aus dem Streckenprotokoll der Startnummer 17:

Fahrzeit in min	0	0,33	0,82	1,78	2,51	3,32	4,2	4,78	5,04	5,97
Fahrweg in km	0	0,1	0,35	1	2	2,35	2,9	3,6	3,75	3,9
Fahrzeit in min	6,45	9,44	9,84	10,0	10,44	11,21	11,9	13,03	13,98	14,51
Fahrweg in km	4,3	4,35	5,05	5,15	5,4	6,05	7,05	7,4	7,95	8,65
Fahrzeit in min	14,75	15,43	15,89	16,2	16,63					
Fahrweg in km	8,8	8,95	9,35	9,4	10,1					

Problemfelder:

- 1) Fertige eine graphische Darstellung an, die den Qualifikationslauf als realistische Kurve wiedergibt. Wie könnte eine Radio-Reportage des Qualifikations-Laufes ausfallen?
- 2) Die Rennleitung disqualifiziert die Startnummer 17 wegen Überschreitung der zulässigen Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h . Prüfe, ob ein Protest Aussicht auf Erfolg hat und zeichne den zugehörigen "Geschwindigkeitsgraphen".
- 3) Im Streckenprotokoll ist nicht verzeichnet, dass die Startnummer 17 in der Rennkurve zwischen Kilometer 4,3 und 4,35 den Rückwärtsgang einlegen musste, um die verlorene Rennbrille aufzulesen. Ergänze im Streckenprotokoll entsprechende Zeiten und Wege, die diesen Vorgang sinnvoll beschreiben könnten. Wie wirken sich die Ergänzungen im Zeit-Weg-Diagramm bzw. im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm aus?
- 4) Anhand der gegebenen Datenreihe lässt sich vermuten, dass die Rennbahn nicht kreisförmig verläuft. Welchen Kurvenverlauf könnte der Rennkurs haben? Skizziere eine stilisierte Darstellung eines vermutlichen, möglichen Streckenverlaufs und begründe.

Analyse:

Im Zeit-Weg-Diagramm nach Bild 4 repräsentiert die Datenreihe eine Funktion, die jedem Zeitpunkt des Laufes den jeweiligen Ort des Rennwagens zuordnet. Bei linearer Interpolation der Datenpunkte liefert die Steigung der jeweiligen Gradenabschnitte die durchschnittliche Geschwindigkeit im betreffenden Zeitraum. Am Kurvenverlauf werden Bereiche hoher sowie geringer Geschwindigkeit sichtbar.

Eine Momentangeschwindigkeit kann aus den Daten nicht abgeleitet werden, die Durchschnittsgeschwindigkeiten gelten für das gesamte Zeitintervall und müssten eigentlich als waagerechte Linien im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm auftauchen. Die aus den Daten ermittelten Änderungsraten liefern Näherungswerte für einen "Geschwindigkeitsgraphen" wie in Bild 6. Am Kurvenverlauf können Bereiche hoher und geringer Beschleunigung abgelesen werden.

Der Zusammenhang zwischen beiden Kurven wird in Bild 5 trotzdem deutlich. Negative Geschwindigkeiten aus Bild 8 können als Rückwärtsfahren gedeutet werden, negative Beschleunigungen als Bremsen. Ein waagerechter Kurven-Verlauf im Zeit-Weg-Diagramm ergibt sich, wenn der Wagen steht.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

OLD	A	B	C
1	MIN	KM	D MIN
2	0	0	
3	.33	.1	.33
4	.82	.35	.49
5	1.78	1	.96
6	2.51	2	.73
C5: =A5-A4			[Menu]

Bild 1

OLD	D	E	F
1	DKM	AERAT	KM/H
2			
3	.1	.30303	18.182
4	.25	.5102	30.612
5	.65	.67708	40.625
6	1	1.3699	82.192
E5: =D5/C5			[Menu]

Bild 2

OLD	D	E	F
12	.4	.83333	50
13	.05	.01672	1.0033
14	.7	1.75	105
15	.1	.625	37.5
16	.25	.56818	34.091
17	.65	.84416	50.649
F14: =E14*60			[Menu]

Bild 3

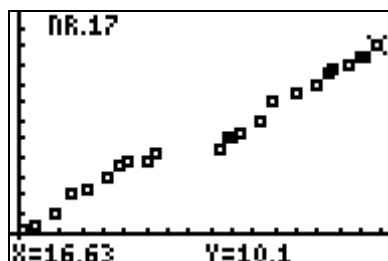


Bild 4

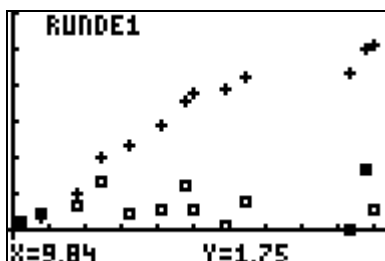


Bild 5

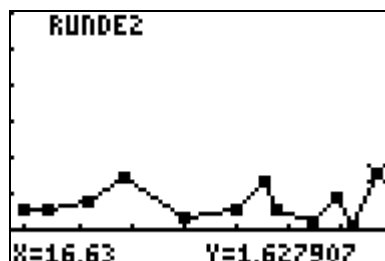


Bild 6

Hinweise:

- Mit CellSheet™ können die Änderungsraten rasch ermittelt werden, indem die Zellbezüge nach Bild 1 und Bild 2 in die entsprechenden Zellbereiche kopiert werden. In Spalte F stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten in km/h .
- Wenn die Ausgangsdaten im Tabellenblatt ergänzt oder verändert werden, sind die Auswirkungen auf die berechneten Werte wegen der verwendeten Formeln direkt zugänglich. Bild 7 und Bild 8 zeigen eine Realisierung des 3. Teils mit dem Voyage 200. Die ergänzten Werte können durch sinnvolles Probieren verändert und angepasst werden.

Zum Einfügen neuer Zeilen in ein CellSheet™ -Tabellenblatt markiert man eine komplette Zeile. Mit [2nd] [INS] wird eine darüber liegende Leerzeile erzeugt.

old	A	B	C	D	E	F
10	5.04	3.75	.26	.15	.57692	34.
11	5.97	3.9	.93	.15	.16129	9.6
12	6.45	4.3	.48	.4	.83333	
13	7.	4.35	.55	.05	.09091	5.4
14	7.6	4.31	.6	-.04	-.0667	
15	9.	4.34	1.4	.03	.02143	1.2
16	9.44	4.35	2.99	.05	.01672	1.0
A13:B15						

Bild 7

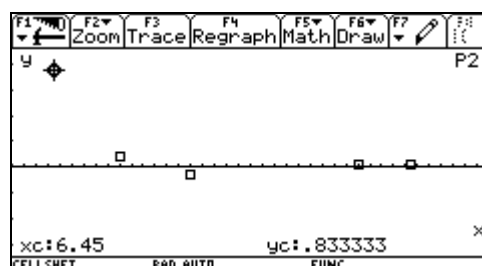


Bild 8

- Das Thema ermöglicht eine vom Unterrichts-Ansatz heitere, aber gleichzeitig inhaltlich-ernsthafte Auseinandersetzung mit dem Begriff der lokalen Änderungsrate. Damit werden die zentralen Fragestellungen und Anliegen bei der Einführung in die Differenzialrechnung angestoßen.

Die aufgezeigten Problemfelder sind in wesentlichen Teilen an eine Aufgabe aus *mathe open end* angelehnt (vgl. Literaturliste).

Wasserverbrauch

Ein Wasserwerk muss genaue Kenntnisse über den Wasserverbrauch haben, um seine Anlagen optimal auszunutzen und um eine durchgehende Wasserversorgung gewährleisten zu können.

Mit Hilfe von Messfühlern wird der aktuelle Verbrauchswasserstrom der Bevölkerung gemessen. Damit immer ein genügend großer Wasservorrat vorhanden ist, wird Wasser gewonnen, aufbereitet und einem Wasserspeicher zugeführt. Dieser Zustrom wird ebenfalls mit entsprechenden Messfühlern ermittelt.

Für den Verlauf eines Tages gibt die Tabelle im stündlichen Abstand festgehaltene Werte für den momentanen Wasserstrom am Speicher wieder. Die Stadtwerke nutzen solche Tageskurven, um Planungen hinsichtlich einer bedarfsgerechten Wassergewinnung zu gestalten.

Uhrzeit (in Std.)	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
Wasserstrom (in m ³ / h)	1800	1900	2100	1400	1800	1765	3236	4219	1989	2549
Uhrzeit (in Std.)	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00	24:00	1:00
Wasserstrom (in m ³ / h)	1888	2119	5129	5988	4322	430	- 543	- 3450	- 4229	- 3998
Uhrzeit (in Std.)	2:00	3:00	4:00	5:00	6:00					
Wasserstrom (in m ³ / h)	- 3887	- 3456	- 2987	- 327	23					

Problemfelder:

- 1) Erstellen Sie mit den Daten eine graphische Darstellung, die den Tages-Verlauf des Wasserstroms deutlich macht. Interpretieren Sie den Kurven-Verlauf und leiten Sie begründete Aussagen über den Verbrauchswasser- bzw. Zulauf-Strom ab.
- 2) Welche Wassermenge wurde näherungsweise aus dem Wasserspeicher zwischen 6:00 Uhr und 9:00 Uhr entnommen? Erarbeiten Sie geeignete Modelle und Verfahren, die auf andere Zeiträume übertragen werden können.
- 3) Wie groß – in m³ Wasser – muss der Wasserspeicher mindestens sein? Untersuchen Sie die zeitliche Entwicklung der Wassermenge, die dem Speicher entnommen bzw. zugeführt wird.
- 4) Nehmen Sie an, dass der Zulauf aus der Wassergewinnung im Tagesverlauf in etwa konstant bleibt. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Wert. Wie hoch ist der Wasserverbrauch im Verlauf des Tages? Variieren Sie den Wert für den Zulauf-Strom, so dass eine durchgehende Wasserversorgung gewährleistet ist.

Analyse:

Die gegebenen Daten können nach unterschiedlichen Gesichtspunkten interpretiert werden. Bezogen auf den Wasserspeicher zeigt Bild 1 nicht den zeitlichen Verlauf des Wasserstandes im Speicher, sondern den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderung. Argumentiert man über den Wasserverbrauch, so ist nicht die Entnahmemenge der Bevölkerung dargestellt, sondern der zeitliche Verlauf der Änderung gegeben, wenn Zulauf und Entnahmemenge zusammen genommen werden.

Bereiche mit negativer Änderungsrate können als Wassergewinn am Speicher gesehen werden, was ein Ansteigen des Wasserstandes zur Folge haben wird: Dann ist der Zulauf aus der Wassergewinnung größer als der Ablauf in die Haushalte.

Flächenstücke, welche die durch die Datenreihe repräsentierte Kurve mit der Zeitachse einschließt, können als tatsächlichen Wassermengen interpretiert werden, die dem Speicher insgesamt zugeführt bzw. entnommen werden. Für die Flächenmaßzahlen können aus den Daten Näherungswerte bestimmt werden. Mit der Mittelwertbildung ist geometrisch die Annäherung durch Rechtecke mittlerer Höhe verknüpft. Zum gleichen Ergebnis führt der Ansatz über Trapeze bei linearer Interpolation der Datenpunkte.

Ordnet man den Flächen unterhalb der Zeit-Achse negativen Maßzahlen zu, wird die zeitliche Entwicklung der zugeführten bzw. entnommenen Wassermenge durch Addition orientierter Flächeninhalte beschrieben. Die kumulierte Summe der Näherungswerte zum jeweiligen Messpunkt stellt die Entnahmemenge bezogen auf die seit Beginn der Messung verstrichenen Zeit dar. Innerhalb der ersten 15 Stunden wurde z. B. näherungsweise 41519 m^3 Wasser aus dem Speicher entnommen.

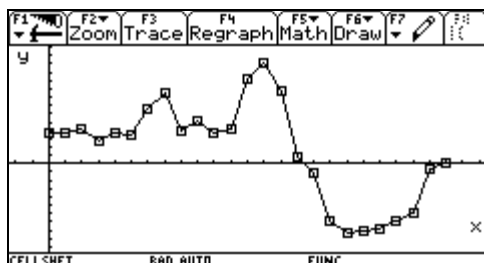


Bild 1

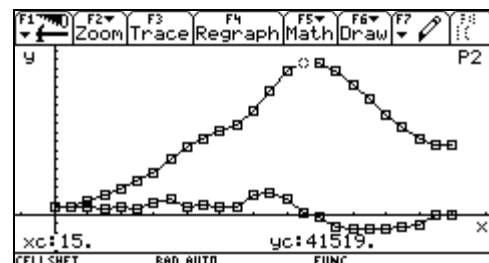


Bild 2

In Bild 2 repräsentiert die obere Datenreihe eine gedachte, näherungsweise bekannte Flächeninhaltsfunktion bzw. Wassermengenfunktion. Die untere Datenreihe dient dem Vergleich mit der durch die Ausgangsdaten repräsentierten Ausgangsfunktion.

Die Ausgangsfunktion zeigt Eigenschaften, die sie als Ableitung der Flächenfunktion erscheinen lassen: Die Nullstelle der Ausgangsfunktion stimmt mit der Extremstelle der Flächenfunktion überein. Die Flächenfunktion steigt bzw. sinkt, wenn die Ausgangsfunktion oberhalb bzw. unterhalb der Zeit-Achse verläuft. Die Extremstellen der Ausgangsfunktion scheinen mit den vermuteten Wendestellen der Flächenfunktion überein zu stimmen.

Um das notwendige Fassungsvermögen des Speichers abzuschätzen, orientiert man sich an den Extremwerten der Wassermengenfunktion. Im Verlauf des betrachteten Tages wird mehr Wasser aus dem Speicher entnommen, als ihm durch die Wassergewinnung zugeführt werden kann. Der Wasserstand im Speicher wird sinken.

Ein höherer, als konstant angenommener Zulauf aus der Wassergewinnung kann dadurch realisiert werden, dass zu den gegebenen Wasserstrom-Werten ein negativer Wert addiert wird. Durch sinnvolles Probieren lässt sich ein Wert ermitteln, bei dem die Wassermengen- bzw. Flächeninhalts-Funktion zum Ende der Messung wieder bei Null anlangt. Dabei wird die Ausgangsfunktion so verschoben, dass die mit der Zeit-Achse eingeschlossenen Flächen oberhalb und unterhalb der Zeitachse gleich groß sind.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-89/92/Voyage 200)

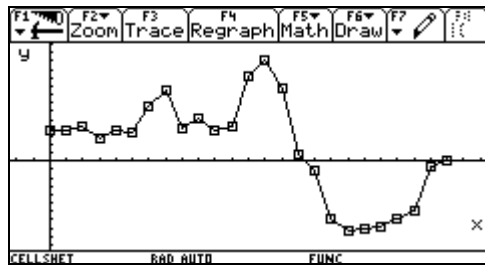


Bild 1

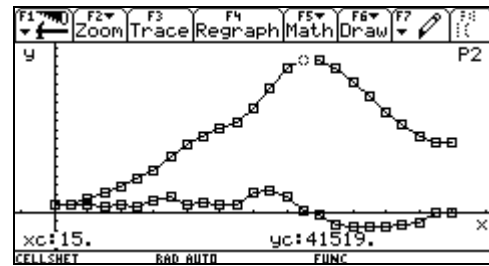


Bild 2

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
was	A	B	C	D	E		
1	h	qm/h	MittelWert	kum.Summe			
2	0	1800					
3	1	1900	1850	1850			
4	2	2100	2000	3850			
5	3	1400	1750	5600			
6	4	1800	1600	7200			
7	5	1765	3565/2	8982.5			
C5: =(B4+B5)/2							
CELLSHEET RAD AUTO FUNC							

Bild 3

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
was	A	B	C	D	E		
1	h	qm/h	MittelWert	kum.Summe			
2	0	1800					
3	1	1900	1850	1850			
4	2	2100	2000	3850			
5	3	1400	1750	5600			
6	4	1800	1600	7200			
7	5	1765	3565/2	8982.5			
D5: =D4+C5							
CELLSHEET RAD AUTO FUNC							

Bild 4

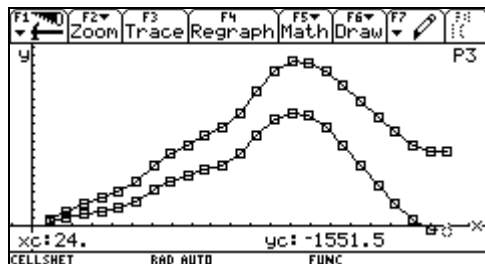


Bild 5

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
was	E	F	G	H	I		
1	Zulauf+	=	-850				
2	950		MittelWert	kum.Summe			
3	1050		1000	1000			
4	1250		1150	2150			
5	550		900	3050			
6	950		750	3800			
7	915		1865/2	9465/2			
E2: =b2+5G51							
CELLSHEET RAD AUTO FUNC							

Bild 6

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
was	E	F	G	H	I		
1	Zulauf+	=	-850				
2	950		MittelWert	kum.Summe			
3	1050		1000	1000			
4	1250		1150	2150			
5	550		900	3050			
6	950		750	3800			
7	915		1865/2	9465/2			
G5: =(E4+E5)/2							
CELLSHEET RAD AUTO FUNC							

Bild 7

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
was	E	F	G	H	I		
1	Zulauf+	=	-850				
2	950		MittelWert	kum.Summe			
3	1050		1000	1000			
4	1250		1150	2150			
5	550		900	3050			
6	950		750	3800			
7	915		1865/2	9465/2			
H5: =H4+G5							
CELLSHEET RAD AUTO FUNC							

Bild 8

Hinweise

- Zur Berechnung der Mittelwerte genügt es, die Formel zur Verknüpfung der betreffenden Zellen wie in Bild 3 einmal einzugeben. Diese lässt sich dann in die betreffenden Zellbereiche kopieren. Gleiches gilt für die kumulierte Summe in Spalte D, für die sich der Bezug auf die voranstehende Summen-Zelle anbietet. Dies zeigt Bild 4.
- CellSheet™ bietet beim Voyage200 die Möglichkeit, das Format der Spalten geeignet anzupassen. Mit F3 öffnet man das Menü "Edit..." und wählt die Option "8: Column Format". Im Bild wurde als "Col Width" der Wert "10" gewählt.
- Entsprechende Berechnungen können auch im Data/Matrix-Editor des TI-89/92 und des Voyage 200 sowie auf dem TI-83 realisiert werden. Die Arbeit mit CellSheet™ ist aber nicht nur bequemer: Die schrittweise Erstellung der Datenblätter hält alle durchgeführten Rechnungen transparent. Veränderungen und Ergänzungen in der Tabelle werden bei Neuberechnung des Arbeitsblattes direkt sichtbar.

Für umfangreiche Tabellenblätter ergeben sich nach jeder Eingabe u.U. längere Rechenzeiten bei der Neuberechnung von Bezügen und Werten. Hier empfiehlt es sich, im Formatdialog "♦F" die Option "AutoCalc" auf "NO" zu setzen und die Neuberechnung nur manuell auszuführen (F8).
- Für Spalte E aus Bild 6 wurde zu den Ausgangsdaten (Spalte B) der Wert -850 addiert. Das \$-Zeichen stellt einen absoluten Bezug zur Zelle G1 her, der beim kopieren der Zellbezüge nicht verändert wird. G1 enthält den gewählten Wert für die Erhöhung des Zulaufs aus der Wassergewinnung nach Teil 4 der Aufgabenstellung.

Mit dem gewählten Wert ergibt sich eine Tagesbilanz von -1551,5 m³ Wasser am Speicher, was einem Zugewinn entspricht, also das Ansteigen des Wasserstandes im Speicher zur Folge hat. Der zugehörige Verlauf der Wassermengen-Funktion ist in Bild 5 dargestellt.
- Im Unterricht sollte der Interpretation der Datenreihen genügend Raum gegeben werden. Gleiches gilt für die Diskussion verschiedener Ansätze zur Berechnung der Flächen-Näherungswerte und der Bedeutung der entsprechenden Maßzahlen im Kontext der Problemstellung.
- Der Problemkontext eignet sich zur Einführung in die Grundgedanken der Integralrechnung. Die Verwendung von CellSheet™ unterstützt die Arbeit mit Realdaten und verringert den zeitlichen Rechenaufwand.

Der Grundgedanke der Flächeninhaltsfunktion und die Problematik der orientierten Flächeninhalte lassen sich an diesem Beispiel anwendungsorientiert problematisieren. Es ist hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler mit dem Begriff der lokalen Änderungsrate vertraut sind.
- Die Schülerinnen und Schüler können auf verschiedenen Ebenen des Problemkontextes selbstständig arbeiten. Die vielfältigen Interpretationsmöglichkeiten sind mit der Notwendigkeit einer geeigneten Begriffsbildung und einer geeigneten mathematischen Modellierung verknüpft.
- Diese Aufgabe ist von Stephan Hußmann u.a. im ZKL-Text Nr.19 beschrieben worden (vgl. Literaturliste). Sie steht dort in einem anderen didaktischen und methodischen Zusammenhang.