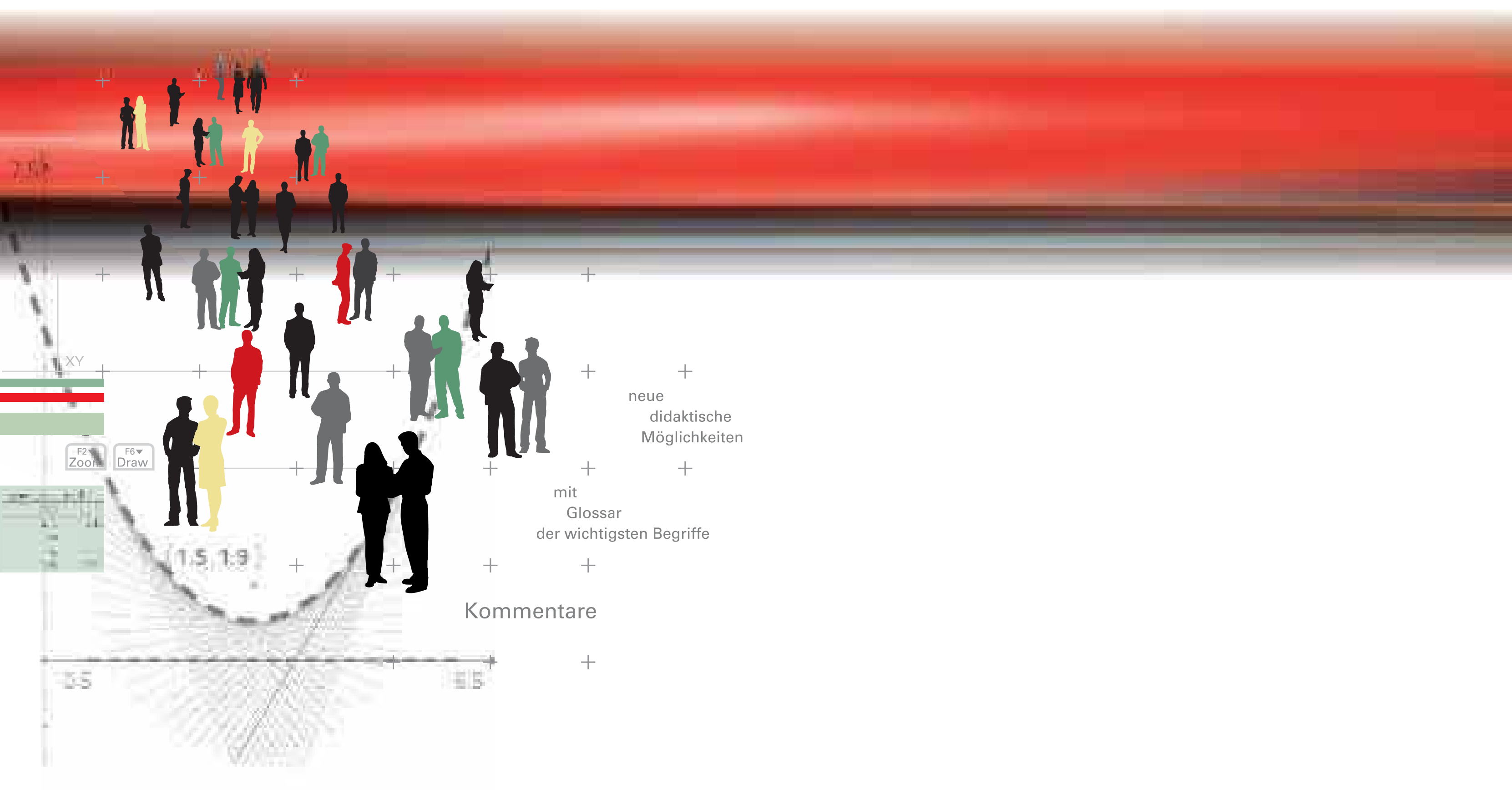
T³ DEUTSCHLAND
T³ ÖSTERREICH
T³ SCHWEIZ

T³-AKZENTE

Aufgaben mit TI-Nspire™ CAS

Andreas Pallack, Bärbel Barzel (Hrsg.)



Texas Instruments

T³-AKZENTE

Aufgaben mit TI-Nspire™ CAS

Andreas Pallack, Bärbel Barzel (Hrsg.)

Redaktion:
Karl-Heinz Keunecke, Hubert Langlotz, Dieter Stirn

Autorinnen und Autoren:
T³ Deutschland:
Bärbel Barzel, Dieter Eichhorn, Benno Grabinger, Rainer Heinrich, Horst Hüllen, Karl-Heinz Keunecke, Eberhard Lehmann, Hubert Langlotz, Andreas Pallack, Angelika Reiß, Kathrin Richter, Ursula Schmidt, Hans-Dieter Stenten-Langenbach, Carsten Willms, Sabine Wüllner

T³ Österreich:
Hildegard Urban-Woldron

T³ Schweiz:
Michael Roser

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

Inhaltsverzeichnis

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

die Anforderungen an Schule haben sich in den letzten Jahren verändert. Zentral ist dabei die Schwerpunktverlagerung von einer bloßen Stoffvermittlung zum Kompetenzerwerb. Das zeigt sich nicht zuletzt darin, dass Standards und Lernstandstests sowie zentrale Prüfungen mittlerweile in fast jedem Bundesland etabliert wurden.

Doch wie muss Unterricht gestaltet werden, um Kompetenzen effizient und nachhaltig zu fördern? Zeitgemäßer Unterricht muss sich – um sich nicht dem Vorwurf der Weltfremdheit auszusetzen – stetig weiterentwickeln und neue Erkenntnisse sowie Entwicklungen berücksichtigen. Dazu liefern die neuen Technologien einen erheblichen Beitrag, da sie das Lernen von Mathematik auf ein neues Fundament stellen: Weg vom Beherrschen von Kalkülen, hin zum verständnisorientierten Umgang mit Mathematik.

Viele Lehrerinnen und Lehrer haben in den vergangenen Jahren positive Erfahrungen beim Einsatz neuer Technologien im Unterricht gemacht. Diese Erfahrungen sind inzwischen durch nationale wie internationale Studien zahlreich bestätigt worden.

Schülerinnen und Schüler haben eine bessere Graphen- und Termerkennung, können souverän zwischen verschiedenen Darstellungsweisen wechseln und schließen in vergleichenden Test bei Standardaufgaben besser ab. Dabei wird vielfach betont, dass offene Aufgabenstellungen und kooperative Lernformen den positiven Nutzen des Rechnereinsatzes deutlich erhöhen. (z. B.: Keller/ Russell/Thompson 1999, Tall 1997).[1]

Doch nicht nur Unterricht, auch Technologien entwickeln sich weiter. Die Erfahrungen der letzten Jahre wurden zu Konzepten verdichtet, die sich in **Technologien wie TI-Nspire™ CAS** wieder finden. So ist es z. B. nun möglich, Probleme mit Hilfe der Technologie auf die verschiedensten Arten zu erkunden und Darstellungsformen miteinander zu vernetzen, um jedem Lerner den für ihn geeigneten Zugang zu ermöglichen. Mathematik kann so verständnisorientierter gelernt und gelehrt werden. Wo man vorher für verschiedene Zugänge verschiedene Programme nutzen musste, sind nun Tabellenkalkulation, Computer-Algebra, Textverarbeitung und Geometriesoftware in **TI-Nspire™ CAS** zusammengefasst und vernetzt. **TI-Nspire™ CAS** wird als Handheld und als zu 100% kompatible Software verfügbar sein und ermöglicht so einen parallen Einsatz im Unterricht.

Die Herausforderung, Unterricht mit neuen Technologien zu entwickeln und zu gestalten muss nicht alleine bewältigt werden: Weltweit gibt es ein großes Netzwerk von Moderatorinnen und Moderatoren, die im Rahmen von Workshops in Ihrer Nähe über Erfahrungen berichten und ihr Wissen mit Ihnen teilen. Alle Autorinnen und Autoren dieses Heftes sind Moderatoren der Fortbildungsinitiative T³ aus Deutschland, Österreich und der Schweiz.

Dieses Heft will Sie beim Unterrichtsalltag mit **TI-Nspire™ CAS** unterstützen. Es enthält nicht nur schöne Aufgabenideen und Lösungshinweise, sondern auch Empfehlungen, wie diese Aufgaben in Ihren Unterricht integriert werden können, welche Ziele und Kompetenzen mit der Aufgabe verfolgt werden können. Diese wichtigen Informationen finden Sie übersichtlich auf der Eingangsseite eines jeden Beitrags zusammengestellt.

Um die Lösungshinweise von Tipps zur Bedienung des Geräts zu entlasten, finden Sie im Anhang ein sogenanntes „Glossar“. Dies ist ein Nachschlagewerk für Bedienungshinweise. Bei den Lösungen der einzelnen Aufgaben stehen Verweise zu diesem Glossar. Diese sind grau unterlegt hervorgehoben. Auch zukünftige T³-Materialien werden dieses Glossar verwenden, Unter www.t3deutschland.de, www.t3oesterreich.at und www.t3schweiz.ch werden zeitnah weitere Aufgaben bereitgestellt, die sich zu einer umfangreichen Materialsammlung ergänzen. Rückmeldungen können uns helfen, die Unterrichtsideen weiter zu entwickeln. Dafür schon jetzt ein herzliches Dankeschön.

Wir hoffen, dass Sie dieses Heft bei Ihrem Unterrichtsalltag unterstützt.

Münster, im September 2006
Bärbel Barzel und Andreas Pallack (Herausgeber)

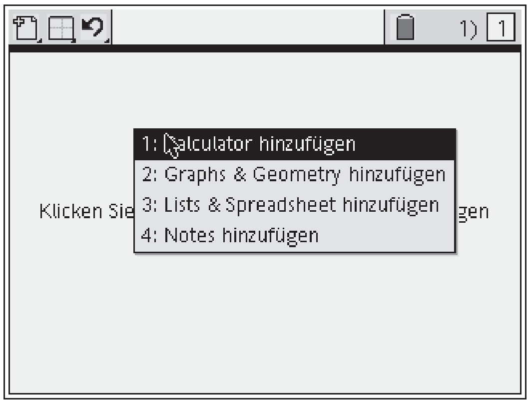
[1] Keller, Brian; Russell, Chris; Thompson, Heather (1999). A Large-scale Study Clarifying the Roles of the TI-92 and Instructional Format on Student Success in Calculus. - In: The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 6(3). S. 191-207
Tall, David (1997). Functions and Calculus. In: Bishop. A. J. et al (Eds.). International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer. S. 289-325

Ein erster Überblick

Wir möchten Ihnen mit diesem Material eine kleine Starthilfe zum Umgang mit TI-Nspire™ CAS geben. Natürlich ersetzt diese Einführung nicht das Studium des Handbuchs oder das Spielen mit der Software. Jedoch bekommen Sie einen Eindruck von der Philosophie von TI-Nspire™ CAS. Wenn Sie die Beispiele rekonstruieren wollen, empfehlen wir Ihnen vorab die Einführungskapitel des Handbuchs zu lesen. Zu grau unterlegten Begriffen – wie zum Beispiel Zufallszahlen – finden Sie im Glossar eine Bedienhilfe.

Jede TI-Nspire™ CAS Session beginnt mit einem leeren Dokument. Diesem Dokument können weitere *Seiten* hinzugefügt werden. Auf den Seiten werden unterschiedliche *Applikationen* geöffnet; bis zu vier passen auf eine Seite. Mögliche *Applikationen* sind:

- **Calculator**
- **Graphs & Geometry**
- **Lists & Spreadsheet**
- **Notes**



Startbildschirm

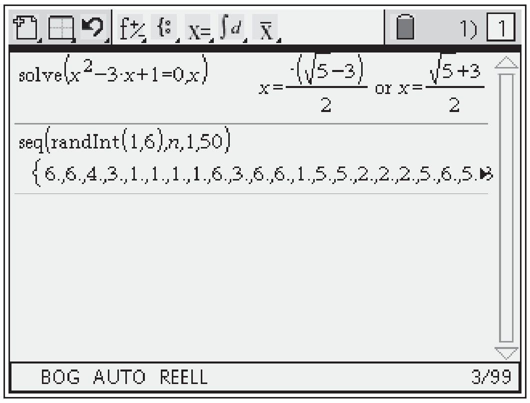
In jeder *Applikation* stehen Menüs zur Verfügung, aus denen mithilfe eines Zeigers Befehle oder Anwendungen ausgewählt werden können. Im Folgenden stellen wir die *Applikationen* kurz vor.

Calculator

Wie auch vom TI-89 Titanium oder dem Voyage ™ 200 gewohnt, können hier Befehle direkt eingeben werden.

Der Screenshot zeigt wie man

- eine Gleichung löst,
- eine Folge von Zufallszahlen (Hier mit den Würfelzahlen von 1 bis 6, insgesamt 50 Würfe) erzeugt.



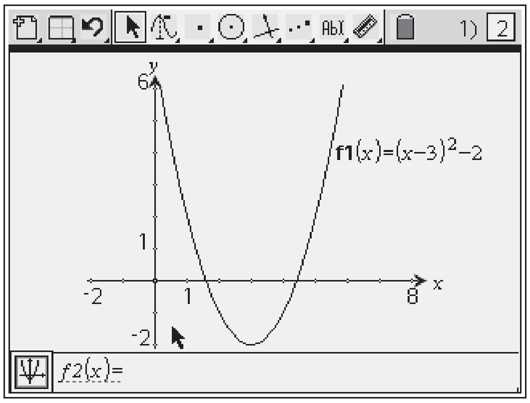
Calculator

Bei der Eingabe von Termen mit komplizierteren Strukturen helfen Masken, die man aus den Menüs auswählen kann (in jeder *Applikation* über den menu-Button zu erreichen!).

Graphs & Geometry

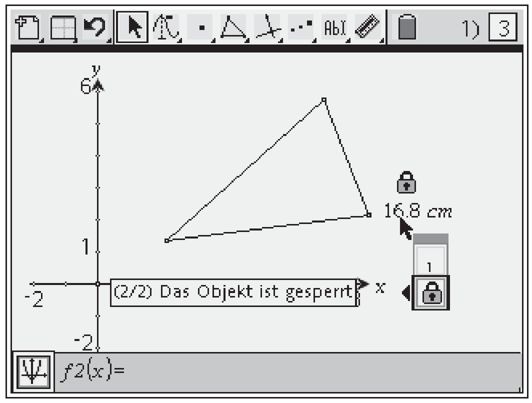
Mit **Graphs & Geometry** stehen Ihnen sowohl ein sehr leistungsfähiger Funktionenplotter wie auch eine dynamische Geometriesoftware zur Verfügung.

Geben Sie in der unteren Zeile schlicht eine Funktion ein und bestätigen Sie die Eingabe mit enter. Wenn Sie eine Parabel oder eine Gerade gezeichnet haben, steht Ihnen sofort ein interessantes interaktives Tool zur Verfügung. Der Graph kann durch Ziehen mit der Maus verändert werden. Auch die Koordinatenachsen können so angepasst werden. Durch vorheriges Drücken von ⇧ lassen sich die Achsen einzeln anpassen. (Graph zeichnen, Koordinatenachsen verändern)



Graphs & Geometry: Funktionenplotter

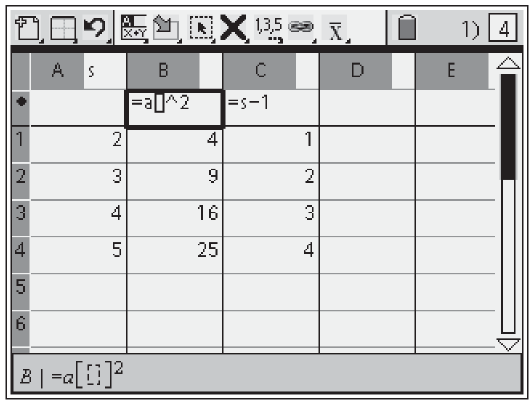
Das Geometrietool findet sich in derselben *Applikation*. Es stehen die meisten der üblichen Features von dynamischer Geometriesoftware zur Verfügung. Probieren Sie folgendes Beispiel: Zeichnen Sie ein Dreieck (Linien, besondere) und messen Sie anschließend seinen Umfang. Durch Klick mit der rechten Maustaste auf die Maßzahl erhalten sie die veränderbaren Attribute. Wenn Sie das angezeigte Schloss schließen (Navigation erfolgt über die Cursortasten) wird der Umfang konstant gehalten. Versuchen Sie nun das Dreieck zu verändern. Die Punkte bewegen sich nur entlang des Randes einer Ellipse.



Graphs & Geometry: DGS

Lists & Spreadsheet

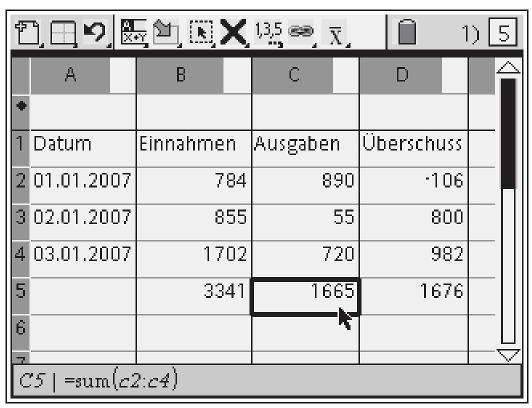
Diese *Applikation* kann wie ein Listeneditor oder wie eine übliche Tabellenkalkulation mit einzelnen Zellen verwendet werden.



Lists & Spreadsheet: Spaltenformeln

Es können z.B. Spaltenformeln eingegeben werden. Einer Spalte wird ein Listenname zugeordnet, indem man diesen in die oberste Zeile einträgt. Man kann die Spalten aber auch direkt ansprechen, indem man hinter der Spaltenbezeichnung [ ] setzt. So können z.B. Wertetabellen erstellt oder einfache Rechnungen durchgeführt werden.

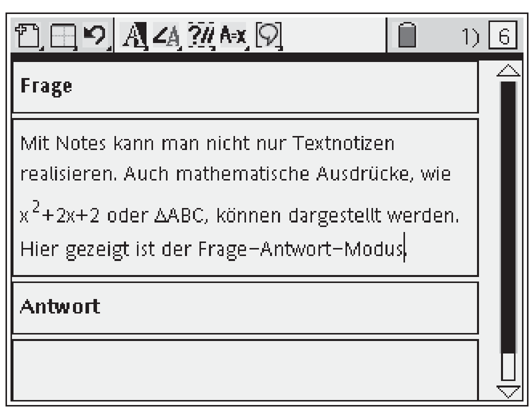
Durch das Setzen von Anführungszeichen werden Texte eingegeben. Zellen können durch Formeln (z.B. in d2 steht =b2–c2) direkt miteinander verknüpft werden. Es gibt Funktionen, wie zum Beispiel die sum-Funktion (Formeln eingeben), welche die Arbeit erleichtern.



Lists & Spreadsheet: Zellenformeln

Notes

Mit **Notes** bekommt man eine kleine Textverarbeitung, die neben normalen Text auch mathematische Ausdrücke erfassen kann. Darüber hinaus kann man auch auf alle Variablen oder Funktionen aus den anderen *Applikationen* zugreifen. Man erhält also ein interaktives Texttool.



Notes: Frage und Antwort

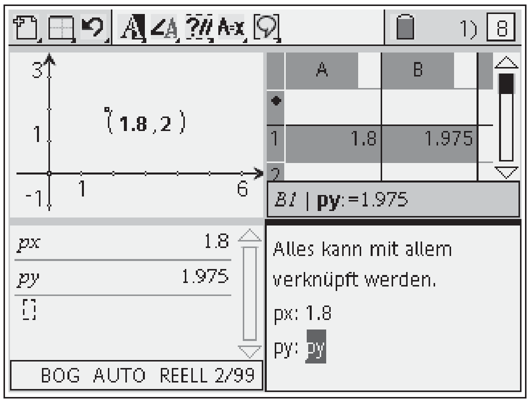
Verknüpfen der Applikationen

Jede *Applikation* kann mit jeder kombiniert werden. Der besondere Mehrwert der Anwendungen zeigt sich aber erst, indem man diese verknüpft. Am einfachsten geschieht dies durch *Seite* aufteilen.

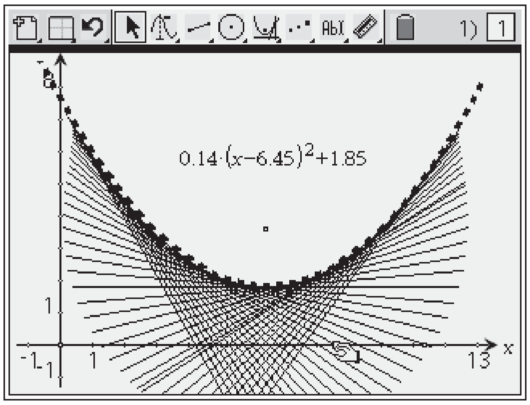
So kann man beispielsweise in **Graphs & Geometry** einen Punkt definieren. Die Koordinaten dieses Punktes kann man speichern (hier unter den Variablen px und py) und anschließend z.B. mit **Lists & Spreadsheet** verknüpfen. Das bedeutet, sobald man den Punkt verändert oder die Koordinaten in der Tabelle verändert, verändern sich der Punkt oder die Koordinaten ebenfalls. Von den beiden anderen *Applikationen* aus kann man auf die Variablen zugreifen; im **Calculator** kann man sie auch verändern.

Aber das Wichtigste ist und bleibt natürlich eine gute Idee, die man mit der neuen Technologie verwirklichen kann.

Die Redaktion



Verlinken von *Applikationen*

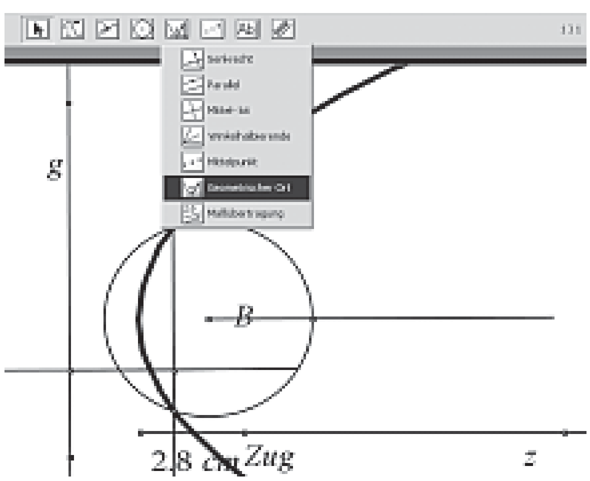


Verknüpfung von
Geometrie und Algebra

Parabeln als Ortslinien

H.-D. Stenten-Langenbach, Meppen

Wo befinden sich die Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden den gleichen Abstand haben?



Steckbrief der Aufgabe
Sekundarstufe I
Dauer: 3 - 4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- haben Grundkenntnisse in der Anwendung dynamischer Geometriesoftware
- können den Satz des Pythagoras anwenden
- können Ähnlichkeit erkennen und anwenden

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- vergleichen und bewerten verschiedene Lösungsansätze und Lösungswege (argumentieren)
- wenden algebraische, numerische, grafische Verfahren und geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an
- verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen, Funktionen oder Regressionen zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell
- stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar
- verwenden verschiedene Werkzeuge sachgerecht

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- beschreiben und erzeugen Parabeln als Ortslinien
- wenden quadratische Funktionen sachgerecht zur Beschreibung geometrischer Zusammenhänge an

Rolle der Technologie (TI-Nspire^{TM} CAS):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Zielgerichtetes Experimentieren
- Algebraisches Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Konstruktion, „Anpassung“
- Numerisch: ggf. Regression
- Algebraisch: algebr. Berechnungen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Einstieg als gemeinsame Demonstration der Gruppe
- Gruppenarbeit

Die Mittelsenkrechte ist die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben.

Die Winkelhalbierende ist die Menge aller Punkte, die von zwei Geraden (genauer zwei Strahlen) den gleichen Abstand haben.

Doch welche Kurve entsteht wenn man fordert, dass alle Punkte von einer Geraden und einem festgelegten Punkt den gleichen Abstand haben?

1. Stellt euch im Schulhof so auf, dass jeder von euch von einer Wand und einem festen Punkt den gleichen Abstand hat. Zeichnet mit Kreide eine Linie auf den Boden, die eure Standorte wiedergibt.
2. Stellt die Punkte, die den gleichen Abstand von einem Punkt und einer Gerade haben, graphisch dar. Wählt ein geeignetes Koordinatensystem und sucht nach einer Beschreibung dieser Punkte durch eine Funktionsvorschrift.
3. Untersucht, ob die Funktionsvorschrift genau ist und weist das ggf. nach.

Die Vielfalt der möglichen Bearbeitungswege ist groß. Je nach Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler sind an einigen Stellen Hilfen zum vereinfachten Umgang mit dem TI-Nspire™ CAS zu geben.

Es werden folgende Möglichkeiten skizziert:

I Positionierung einzelner Punkte und Beschreibung der Lage
(Schwerpunkt graphisch-experimentell)

- Beliebige Punkte setzen, Abstände bestimmen, Punkte verschieben
- Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
- Einpassen des Graphen einer quadratischen Funktion
- Verfeinerung
  - Erhöhung der Genauigkeit
  - Regression
- Überprüfung

II Konstruktion über konzentrische Kreise und Parallelen
(Schwerpunkt konstruktiver Ansatz, algebraischer Ansatz über Näherung)

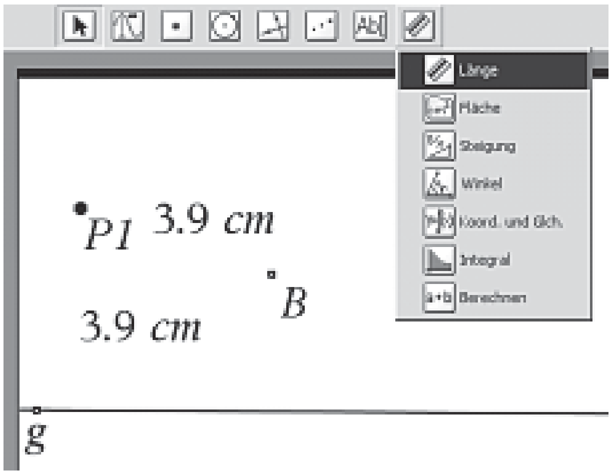
- Konstruktion der Punkte
- Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
- Einpassen des Graphen einer quadratischen Funktion
- Dynamisierung der Konstruktion
- Regression über Koordinaten aus der Datenerfassung
- Überprüfung

III Konstruktion über Mittelsenkrechte
(Schwerpunkt konstruktiver Ansatz, algebraische Umsetzung)

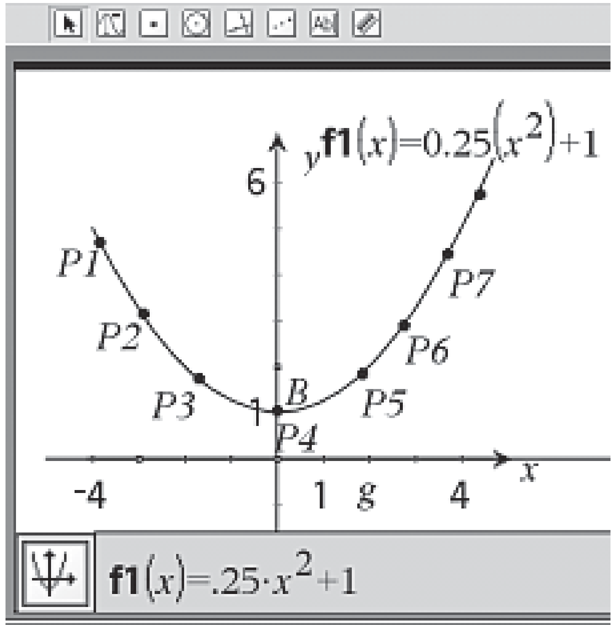
- Dynamische Konstruktion
- Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
- Einpassen des Graphen einer quadratischen Funktion
- Regression über Koordinaten aus der Datenerfassung
- Algebraischer Ansatz

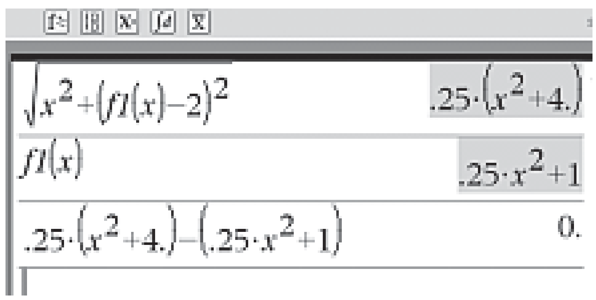
Weg I Positionierung einzelner Punkte und Beschreibung der Lage

Dieser Bearbeitungsweg orientiert sich zunächst an der Vorgehensweise beim Aufstellen der Schülerinnen und Schüler auf dem Schulhof:
Man zeichnet zunächst eine Gerade g und einen ausgewählten Punkt B.
Anschließend werden Punkte P_i gezeichnet und jeweils die Abstände $d(P_i;B)$ und $d(P_i;g)$ gemessen. Die Punkte P_i werden dann so verschoben, dass die Abstände jeweils gleich sind.



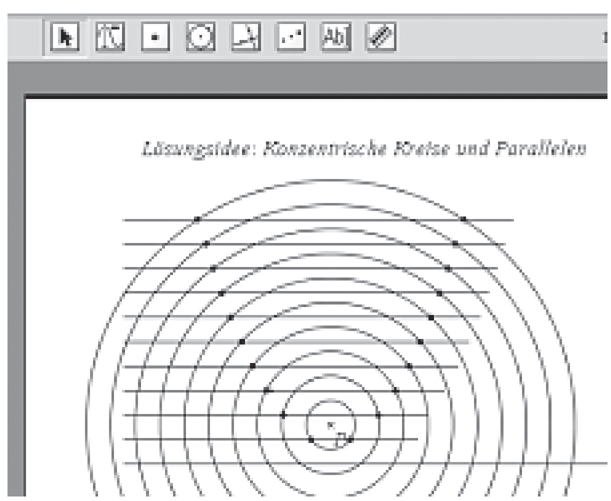
Zur weiteren Bearbeitung sollten die Entfernungsmessungen verborgen und das Koordinatensystem eingeblendet werden (Objekte verstecken).
Die Gerade g und der Punkt B werden geeignet verschoben, z.B. wie in der Abbildung rechts, wobei es sinnvoll ist, Punkte an die Achsen zu binden (Punkte, gebunden).
Sind quadratische Funktionen bekannt, so kann jetzt eine mögliche Funktion angegeben und ihr Graph gezeichnet werden. Der Graph kann dann angepasst werden (Graph zeichnen) , dass er die Punkte angemessen beschreibt.
Genügt die Genauigkeit nicht, so kann die Anzeigegenauigkeit der Entfernungsmessungen vergrößert werden.
Die Koordinaten der Punkte können in ein Tabellenblatt übertragen und der Funktionsterm durch Regression bestimmt werden (siehe Weg II).
Für einen Nachweis, dass die gefundene Funktionsgleichung die Vorgaben exakt erfüllt, wird überprüft, ob der Abstand des Punktes B (hier B(0|2)) zu einem allgemeinen Punkt auf dem Graphen mit dem Funktionswert an der entsprechenden Stelle übereinstimmt.
Das Ergebnis hängt natürlich von der Genauigkeit ab, mit der hier gearbeitet wird.



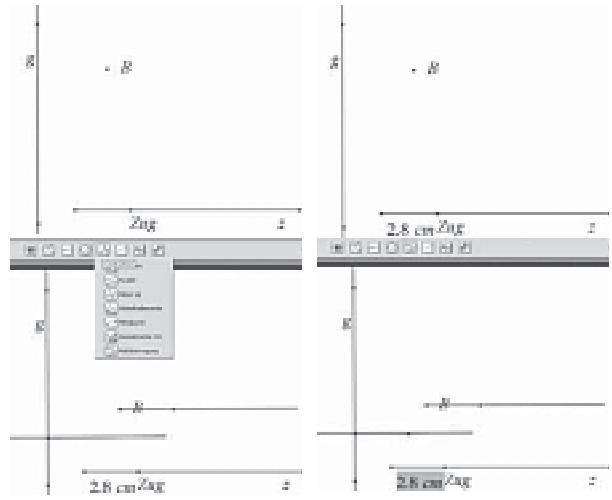


Weg II Konstruktion über konzentrische Kreise und Parallelen

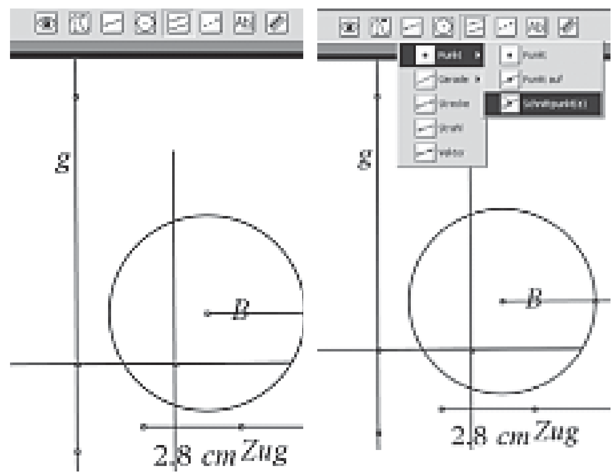
Dieser Bearbeitungsweg wird von Schülerinnen und Schülern gewählt, denen aus dem Vorunterricht noch deutlich ist, dass Punkte gleichen Abstandes von einer Geraden auf einer Parallelen dazu liegen, während Punkte gleichen Abstandes von einem Punkt auf einem Kreis liegen.
Eine Konstruktionszeichnung könnte dann wie nebenstehend aussehen.
Die weitere mögliche Bearbeitung ist in Weg I beschrieben.



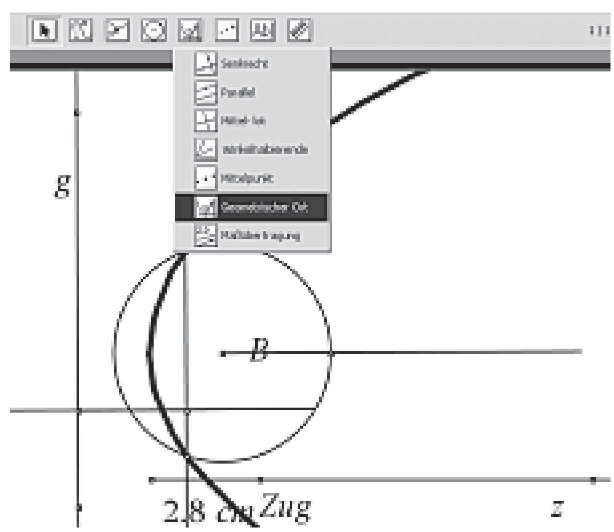
Allerdings liegt eine dynamische Umsetzung der Grundidee nahe.
Neben der Geraden g und dem Punkt B zeichnet man einen Strahl z. Auf diesem Strahl zeichnet man einen Punkt Zug (Punkte und Geraden, Punkte, Punkte auf) und misst den Abstand des Punktes Zug vom Anfangspunkt des Strahls (Messen).
Dann zeichnet man einen zu g senkrechten Strahl und einen Strahl mit Anfangspunkt B und trägt den gemessenen Abstand auf diese beiden Objekte ab (Maßübertragung).



Durch die entstandenen Punkte zeichnet man die Parallele zu g bzw. den Kreis um P. Die Schnittpunkte von Kreis und Parallele werden definiert.

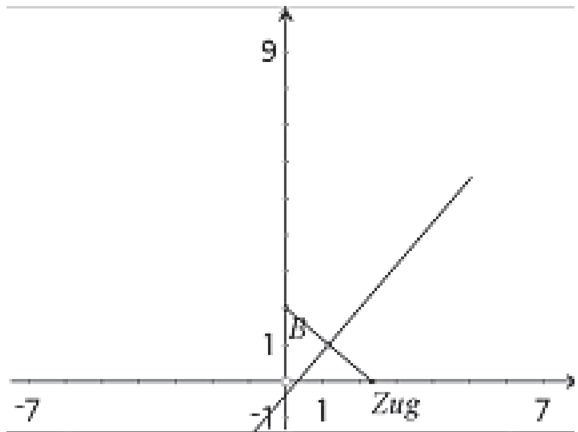


Die Lage der Punkte gleichen Abstandes von B und g erhält man nun als Ortslinie der Schnittpunkte (Geometrischer Ort) in Abhängigkeit von Zug.
Die Algebraisierung benötigt nun wieder die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems bzw. der Lage von g und B bezüglich des Koordinatensystems.
Eine funktionale Darstellung kann dann wie in Weg I erfolgen.
Als Alternative bietet sich auch an, die Koordinaten der Schnittpunkte in eine Tabelle zu übertragen (Werte sammeln) und dann über die quadratische Regression einen Funktionsterm zu erhalten, der wie in Weg I überprüft wird.

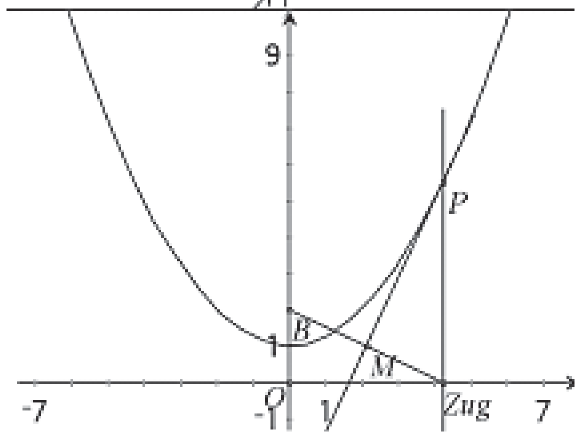


Weg III Konstruktion über Mittelsenkrechte

Zeichnet man die Abstände eines Punktes P von dem Punkt B und der Geraden g in einer Skizze ein, so gelangt man zu Konstruktionsidee (Hier der Kürze wegen direkt in der koordinatisierten Form).
Die Gerade g sei die x-Achse, der Punkt B der Punkt (0|2).
Zug sei ein beliebiger Punkt auf g. Die Punkte, die von Zug und B den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{ZugB}$.



Auf der Mittelsenkrechten definiert man den Punkt P, der senkrecht zu g über Zug liegt. Die Ortslinie (Geometrischer Ort) von P bezüglich Zug lässt sich bei dieser Koordinatisierung auch funktional beschreiben.
Z.B. so:
Bezeichne x die Strecke $\overline{\text{OZug}}$ und y die Strecke $\overline{\text{PZug}}$.



Aus der Ähnlichkeit folgt:

$$\frac{ob}{bzug}=\frac{mzug}{y} \qquad \frac{ob}{bzug}=\frac{mzug}{y}$$

Der Satz des Pythagoras im Dreieck OZugB liefert:

$$bzug:=\sqrt{ob^2+x^2} \qquad \sqrt{x^2+ob^2}$$

Damit erhält man auch die Länge der Seite $\overline{\text{MZug}}$:

$$mzug:=\frac{bzug}{2} \qquad \frac{\sqrt{x^2+ob^2}}{2}$$

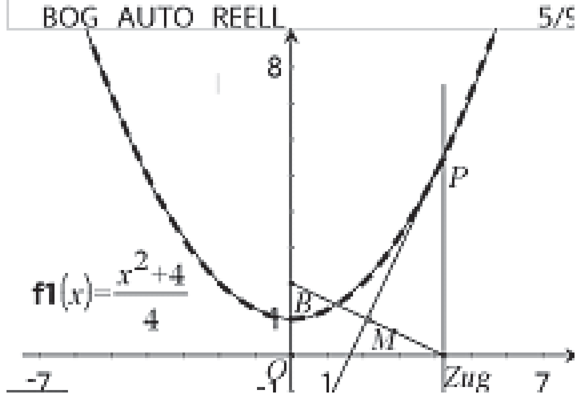
Mit der speziellen Wahl von B(0|2) ergibt sich für y:

$$ob:=2 \qquad 2$$

$$\text{solve}\left(\frac{ob}{bzug}=\frac{mzug}{y},y\right) \qquad y=\frac{x^2+4}{4}$$

BOG AUTO REELL 5/9

Damit ist auf diesem Weg die algebraische Darstellung bereits erstellt. Eine Überprüfung kann durchgeführt werden, indem man den entsprechenden Graphen einzeichnet.



Kommentar

Um auf der einen Seite herauszustellen, dass der Begriff der Parabel weiter greift als der Graph einer quadratischen Funktion lassen sich vielfältige Zugänge gestalten. Im Rahmen dieses Materials kann natürlich nur ein Aspekt herausgegriffen werden, eine breitere Anlage, auch unter Berücksichtigung weiterer händischer Zugänge erscheint notwendig.
Allerdings zeigt dieser Ansatz, wie durch den Einsatz und die Verknüpfung unterschiedlicher Werkzeuge und Zugänge auf verschiedenen Wegen eine Verknüpfung zwischen einer allgemeineren Definition und einer konkreten funktionalen Darstellung gewonnen werden kann.
Um den Schülerinnen und Schülern ihren individuellen Zugang zu ermöglichen, sollte der Bearbeitungsweg nicht zu eng vorgegeben werden. Allerdings ist es je nach Vorkenntnissen notwendig, an der einen oder anderen Stelle in einzelnen Gruppen Informationen zur Benutzung einzustreuen.
Eine Präsentation verschiedener Wege ist notwendig, fehlende Ideen können ggf. durch ein elektronisches Arbeitsblatt zeitsparend ergänzt werden.
Den Blick auf die Ortslinie als einen nicht nur isoliert zu betrachtenden Inhalt wird z. B. im niedersächsischen Kerncurriculum explizit gefordert: „Die Schülerinnen und Schüler beschreiben und erzeugen Kreis, Parallele, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Parabel als Ortslinien.“.

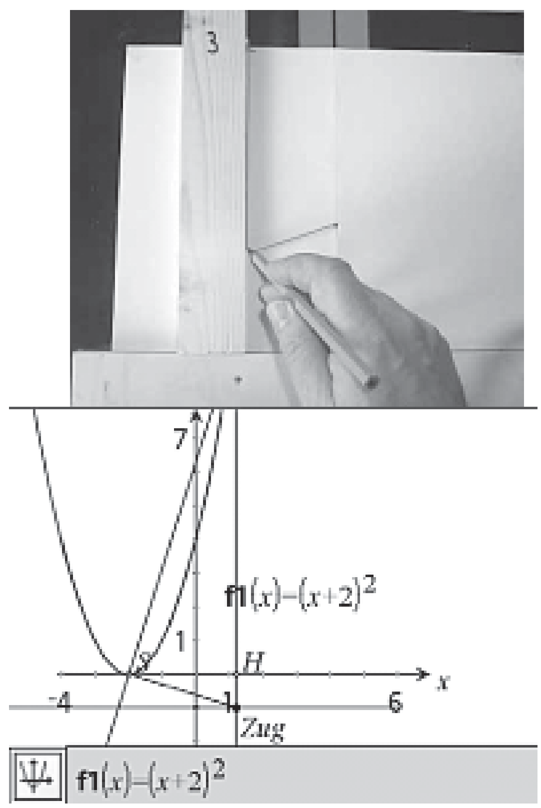
Literatur/Quellenangaben

Aus der vielfältigen Literatur nur zwei Hinweise:
Zur dynamischen Geometriesoftware allgemein:
Zeichnung-Figur-Zugfigur, Elschenbroich, Gawlick, Henn (Hrsg), Hildesheim 2001

Ein Lehrbuch mit einem recht weiten Blick auf Parabeln:
MatheNetz 9, Cukrowicz, Zimmermann (Hrsg), Braunschweig 2001

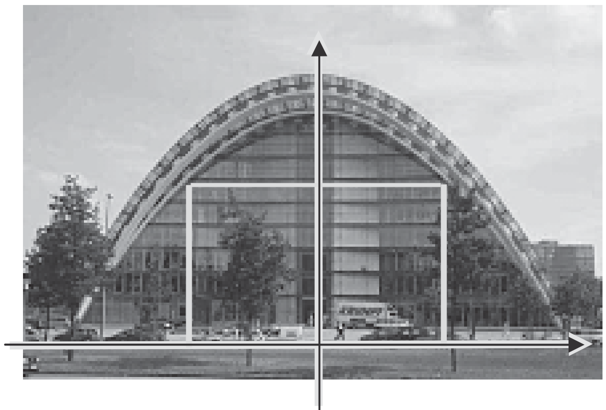
Ergänzungen

Als weitere Konstruktionen bieten sich unter anderem die Fadenkonstruktion, unterstützt z.B. durch ein elektronisches Arbeitsblatt und die Konstruktion über den Höhensatz an, wobei sich interessante Vergleiche und Zusammenhänge anbieten.

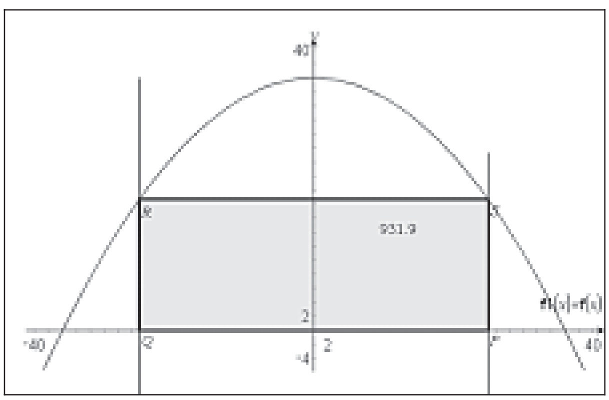


Berliner Bogen

Ursula Schmidt, Lünen
Bärbel Barzel, Essen
Kathrin Richter, Krefeld
Sabine Wüllner, Leverkusen



Wie groß kann das Gebäude unter dem Bogen maximal sein?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis)
Dauer: 3-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können Funktionsterme aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen
- können Flächeninhalte unter Funktionsgraphen von Polynomen bestimmen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren
- wählen ein Werkzeug entsprechend dem Lösungsweg
- präsentieren

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- stellen einen Funktionsterm zur Beschreibung des Daches auf
- bestimmen die relevanten Größen des Bürogebäudes

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Konstruieren
- Numerisch: Beispielwerte berechnen
- Algebraisch: Gleichung aufstellen und lösen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Gruppenarbeit
- Dokumentation im Lerntagebuch
- Präsentation mit Plakat

Berliner Bogen

Dieses Gebäude heißt „Berliner Bogen“ und steht in Hamburg. Einem Architekten aus Shanghai liegt dieses Foto vor. Er möchte das Design des Daches für ein Bürogebäude kopieren. Dabei soll der Bogen an der höchsten Stelle 36 m hoch werden und die Länge am Boden (ohne die überstehenden Teile des Daches) soll 140 m betragen.

Er möchte:

- unter dem Glasdach ein quaderförmiges Bürogebäude mit maximalem Rauminhalt entstehen lassen,
- zwischen dem Glasdach und dem quaderförmigen Gebäude im Erdgeschoss Pflanzen und Sitzgruppen aufstellen,
- auf dem Dach des Bürogebäudes eine Cafeteria einrichten.

Bestimmen Sie die Maße, die für die Planung relevant sind. (z.B.: Flächen- und Rauminhalte der einzelnen Bereiche). Bedenken Sie dabei, dass öffentliche Räume mindestens 2,50 m hoch sind.

Mögliche Lösungswege und -schritte:

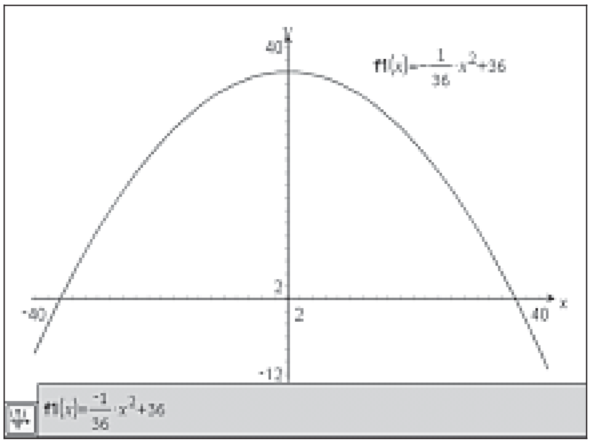
Zur Lage des Koordinatensystems:
- Scheitelpunkt auf der y-Achse/ Boden auf der x-Achse
- Nullpunkt an der linken Bodenseite des Daches
- Nullpunkt im Scheitelpunkt

Zur Art der Modellierung der Funktion:
- Quadratische Funktion (ist nahe liegend)
- ganzrationale Funktion höheren (geraden) Grades
- Sinusfunktion

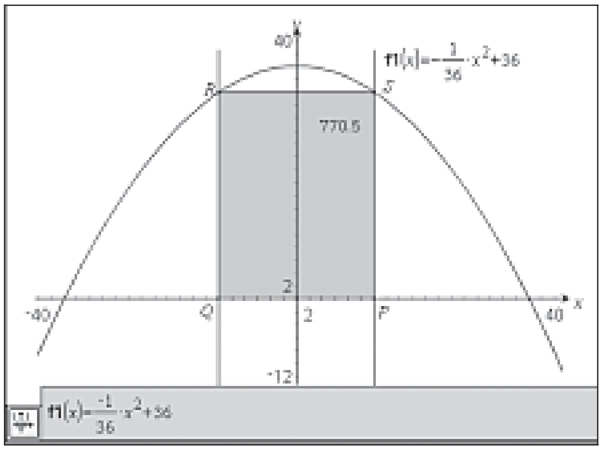
Zur Modellierung des Bürogebäudes:
- Graphisch-experimentell (Konstruieren eines Rechtecks)
- Numerisch-experimentell (Berechnung verschiedener Beispiele)
- Algebraisch (Aufstellen eines Terms)

Ermitteln der relevanten Größen

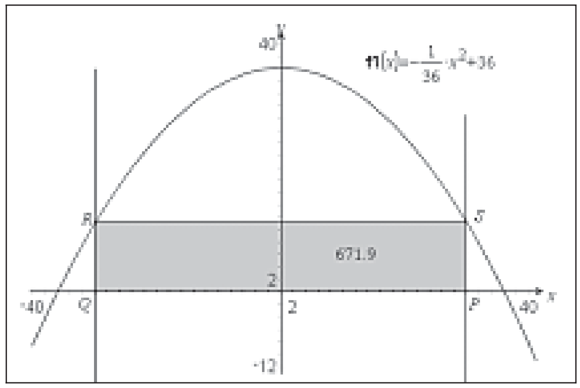
Wir beschreiben im Folgenden einen möglichen Lösungsweg für die Modellierung mit einer Parabel, wobei durch Messen festgestellt wird, dass der Berliner Bogen am Boden doppelt so breit wie hoch ist. Damit sind folgende Punkte bekannt:
A(0|36), B(36|0), C(–36|0).
Bei einem Ansatz mit einer Parabel ergibt sich daraus die Funktionsgleichung, die in **Graphs & Geometry** für $f_1(x)$ eingegeben und gezeichnet wird.
(Siehe: Graphen zeichnen, Koordinatenachsen verändern)



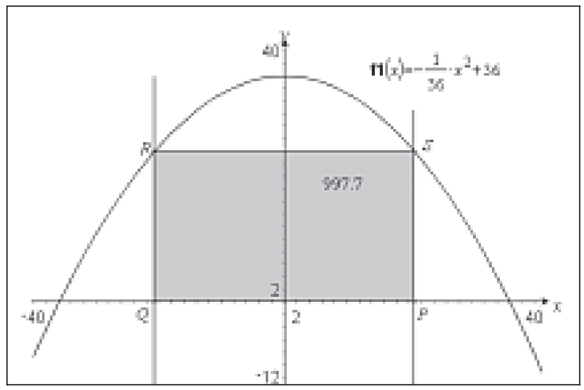
Das Gebäude wird eingezeichnet, dazu sind folgende technischen Kenntnisse nützlich:
Punkt auf Objekt, um einen Punkt auf der x-Achse zu konstruieren (zwischen die Skalierungsstriche).
Objekt benennen, hier den Punkt P.
Objekts spiegeln, hier P an der y-Achse spiegeln (Bildpunkt mit Q benannt).
Senkrechte konstruieren (Linien, besondere), hier Senkrechten zur x Achse durch P und durch Q.
Schnittpunkte bestimmen, hier der beiden Senkrechten mit der Parabel. Sie werden R und S genannt.
Rechteck durch P, Q, R und S zeichnen, dabei hier das Werkzeug Polygon (Linien, besondere) verwenden
Objekt hervorheben, hier das Rechteck.
Flächeninhalt messen



Durch Ziehen an P verändert sich das gesamte Rechteck und das Flächenmaß wird aktualisiert.

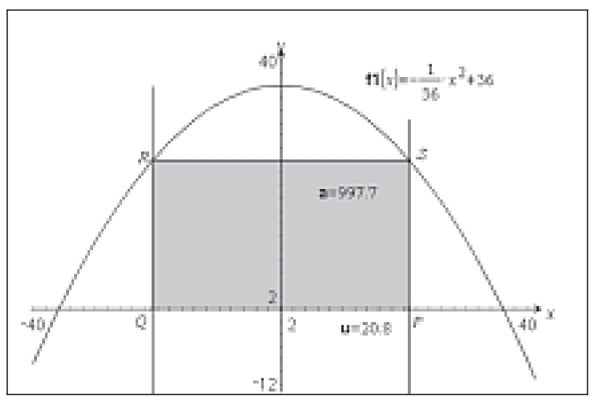


Durch Ausprobieren kann man so den Punkt für den maximalen Flächeninhalt finden.
Der Screenshot zeigt das Ergebnis.



Gemessen wird nun noch der Abstand von P zum Ursprung (als halbe Gebäudebreite) und der Flächeninhalt des Rechtecks. Es lässt sich dann eine Wertetabelle erstellen, die jeder Lage von P den zugehörigen Flächeninhalt zuordnet.
Dazu werden der Abstand u und der Flächeninhalt a als Variable gespeichert (Werte speichern).

(Der Abstand sollte nicht x heißen, sonst wird x mit einem Wert belegt und man kann später nicht mehr analytisch weiterrechnen.)

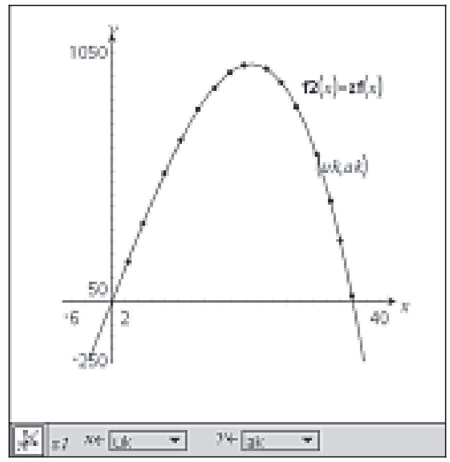


Mit Data capture (Werte sammeln) lassen sich die Werte von u und a in **Lists & Spreadsheet** übertragen.

	A uk	B ak	C
◆	=capture(u,0)	=capture(a,0)	
1	2.22426	159.536	
2	4.48897	318.181	
3	8.04779	550.484	
4	9.98897	663.834	
5	12.2537	780.047	
6	14.6801	881.211	
7	18.5625	981.166	
8	20.6654	997.612	
9	23.2537	975.707	
10	25.1949	925.518	

Die Werte werden auf einer neuen Karte in einem Streudiagramm (Punkteplot) dargestellt (Listen graphisch darstellen).
Um das Maximum genauer zu ermitteln, kann man jetzt analytisch weiterrechen.
Dazu wird im **Calculator** der Funktionsterm der Zielfunktion zf aufgestellt.

Define $zf(x)=2\cdot x\cdot f1(x)$	Done
$zf(x)$	$\dfrac{-x\cdot(x^2-1296)}{18}$



Der Screenshot zeigt den Graphen von zf und das Streudiagramm.

Die relevanten Maße lassen sich analytisch im **Calculator** bestimmen:

Define $zf1(x)=\frac{d^1}{dx^1}(zf(x))$	Done
$zf1(x)$	$72-\frac{x^2}{6}$
solve$(zf1(x)=0,x)\|x>0$	$x=12\cdot\sqrt{3}$
approx(Ans)	$x=20.7846$
$b:=2\cdot 12\cdot\sqrt{3}$	$24\cdot\sqrt{3}$
approx(Ans)	41.5692
$v:=zf(12\cdot\sqrt{3})\cdot 140$	$80640\cdot\sqrt{3}$
approx(Ans)	139673.
$h:=f1(12\cdot\sqrt{3})$	24
$8\cdot 140\cdot b$	$26880\cdot\sqrt{3}$
approx(Ans)	46557.5

Den maximalen umbauten Raum hat das Bürogebäude bei den Maßen l = 140 m (vorgegebene Länge), b = 41,57 m Breite und h = 24 m Höhe, nämlich V = 139673 m^3.
Bei 8 Stockwerken kommt man auf eine Bürogrundfläche von ca. 46500 m^2.

Berücksichtigt man, dass die Cafeteria eine Mindestraumhöhe von 2,50 m haben muss, so kann sie maximal eine Breite von $2\cdot 18{,}49$ m = 36,98 m haben. Das ergibt eine Grundfläche von 5178 m^2. Bis zur Glaskuppel beträgt ihr umbauter Raum ca. 30300 m^3.

solve$(f1(x)=h+2.5,x)$	$x=-18.4932$ or $x=18.4932$
$18.4932\cdot 2\cdot 140$	5178.1
$\int_{-18.4932}^{18.4932} f1(x)\,dx$	1214.39
$(Ans-b\cdot h)\cdot 140$	30341.6
$\int_{12\cdot\sqrt{3}}^{36} f1(x)\,dx$	$864-384\cdot\sqrt{3}$
$2\cdot 140\cdot Ans$	$-26880\cdot(4\cdot\sqrt{3}-9)$
approx(Ans)	55689.9

In den Seitenbereichen zwischen Bürogebäude und Glaskuppel ist noch ein Volumen von ca. 55600 m^3 frei.

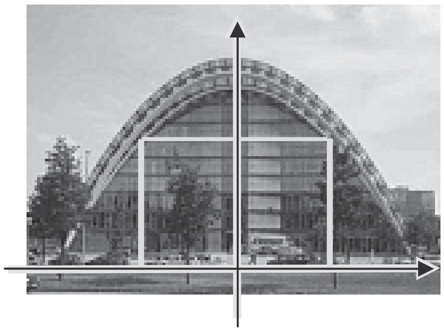
Die Aufgabe birgt einerseits eine Funktionsbestimmung aufgrund gegebener Eigenschaften (quadratische Funktion) als auch eine Extremwertaufgabe in sich. Dabei lässt der Kontext kreativen Spielraum und dementsprechend den Weg frei für verschiedene Modellierungen. Dazu sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht auch Raum erhalten, um die Bestimmung der Größen für das einzupassende Bürogebäude auf individuellem Weg zu vollziehen. Als Ausgangspunkte sind denkbar das Bestimmen einzelner Werte – entweder ausgehend von einer Graphik oder alleine durch die Berechnung einzelner Werte oder der direkte Schritt zur algebraischen Lösung. Es ist wichtig, die verschiedenen Wege und Zugänge zuzulassen, sie Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen und Vor- und Nachteile der Wege wie auch persönliche Präferenzen zu thematisieren. Es sollte in jedem Fall die alleinige Fokussierung des algebraischen Weges vermieden werden. TI-Nspire unterstützt alle drei Wege – sowohl den numerischen (durch die Tabellenkalkulation), den graphischen (durch die Verbindung von Funktionsgraph und geometrischer Konstruktion) sowie den algebraischen (durch die Computeralgebra).

Wichtig ist auch, dass die verschiedenen Lösungen präsentiert werden, wobei neben der Korrektheit der Lösungen weitere Kriterien wie Ästhetik und Praktikabilität der Modelle beurteilt werden sollten.

Literatur/Quellenangaben

Die Aufgabenidee stammt aus einer Vergleichsklausur von 2005, die im Rahmen von SINUS-Transfer in einigen Regierungsbezirken in NRW am Ende von 12.1 (ohne CAS) gestellt wurde. (www.sinus.nrw.de)

Originaltext:



Dieses Gebäude heißt „Berliner Bogen“ und steht in Hamburg. Ein Architekt in Shanghai möchte gerne das gewölbte Glasdach für ein Bürogebäude kopieren. Das Glasdach soll auch ähnliche Maße haben wie das Original: es soll eine Höhe von 36 m haben und unten doppelt so breit sein wie es hoch ist. Die Länge am Boden (ohne die überstehenden Teile des Dachs) soll 140 m betragen.

a) Erklären Sie, inwiefern der Graph der quadratischen Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 36$ den Bogen modelliert.

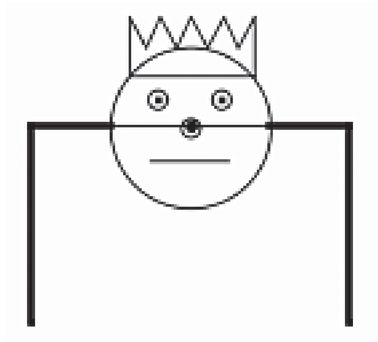
b) Unter dem Glasdach soll ein quaderförmiges Bürogebäude eingebaut werden (siehe Skizze). Ermitteln Sie dessen Maße so, dass der Rauminhalt dieses Bürogebäudes maximal wird.

[Zur Kontrolle: Die Breite beträgt ungefähr 40 m.]

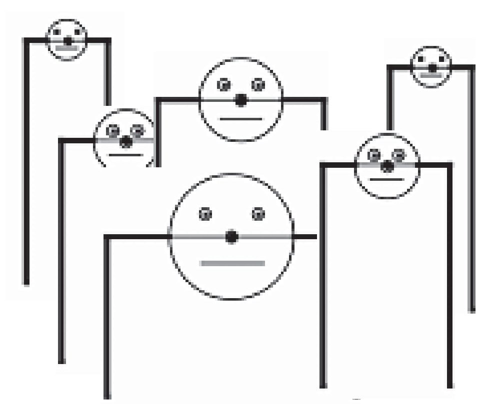
c) Zwischen dem Glasdach und dem quaderförmigen Gebäude sollen im Erdgeschoss Pflanzen und Sitzgruppen aufgestellt werden. Auf dem Dach des Bürogebäudes ist eine Cafeteria geplant.
Bestimmen Sie, wie viel Raum insgesamt zwischen Glasdach und Gebäude dafür frei bleibt.

Die Teiumfaner

Hans-Dieter Stenten-Langenbach, Meppen
Andreas Pallack, Soest
Carsten Willms, Oldenburg



Wer wird König der Teiumfaner?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I
Dauer: 3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können mit der Darstellung im Koordinatensystem umgehen
- kennen Zusammenhänge zwischen Tabelle-Term-Graph

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt
- stellen funktionale Zusammenhänge dar und nutzen diese Darstellungen
- erfassen Problemstellungen und wenden mathematische Verfahren zur Problemlösung an.

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- stellen lineare und quadratische Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph
- wenden Eigenschaften der linearen und quadratischen Funktionen zur Lösung von Problemen (Extremwertfragen) an.

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren von Zusammenhängen
- Generieren mehrerer Beispiele
- Bestimmen von „guten“ Näherungslösungen, Berechnen einer optimalen Lösung

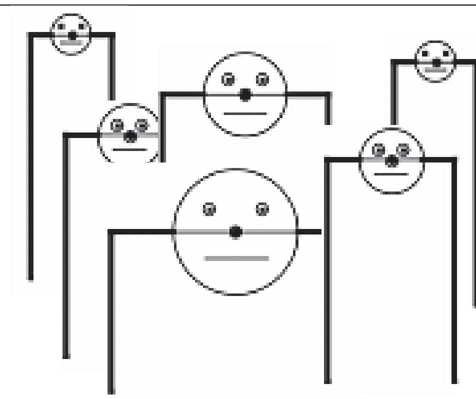
Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Konstruktion des Sachverhalts
- Tabellarisch: Auflisten einzelner Werte
- Algebraisch: Suche nach einer eindeutigen Lösung

In jedem Fall sollte ein Wechsel zwischen de Darstellungsformen erfolgen.

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Gruppenarbeiten, ggf. Hinweise zu technischen Umsetzungen aus dem Glossar zur Verfügung stellen

Die Teiumfaner

In der Welt der Mathematik bewohnen sie ganze Länder: Die Teiumfaner. Sie können sehr unterschiedlich aussehen, manche sind klein und dick, andere groß und dünn, einige sind sogar quadratisch. Aber alle Teiumfaner eines Landes haben eine gemeinsame Eigenschaft: Ihr Teilumfang (Länge der beiden Beine plus die Schulterbreite, also dem Abstand zwischen den beiden Schulterblättern) ist gleich, so gilt für alle Bewohner der Landes Teilumfan15:
$2 \cdot \text{Beinlänge} + \text{Schulterbreite} = 15\,\text{LE}$.



Aufgabe 1

In das Land Teiumfan15 hat sich ein Spion eingeschlichen. Er sieht den Teiumfanern aus Teiumfan15 zum Verwechseln ähnlich, nur sein Teilumfang ist anders.

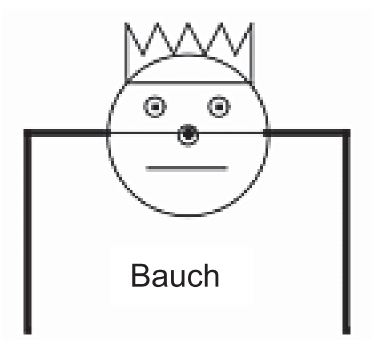
a) Die Spionageabwehr will den Spion herausfinden, indem sie alle Einwohner dazu auffordert, sich mit der linken Schulter an die Wand zu stellen. Die rechte Schulter wird mit einem schräg gestellten Brett „gemessen“.
Erläutere, dass dieses Verfahren geeignet ist, um den Spion herauszufinden.

b) Die Lage des Brettes lässt sich durch eine Geradengleichung beschreiben. Bestimme diese für Teiumfan15 und für ein beliebiges Teiumfanerland TeiumfanX.

Aufgabe 2

Aufruf an das Volk der Teiumfaner:

„Der Teiumfaner mit dem dicksten Bauch wird König.“



Klaus-Charlotte fordert, es müsste König werden.
Wie müsste Klaus-Charlotte aussehen, um sicher sein zu können, dass es König wird?

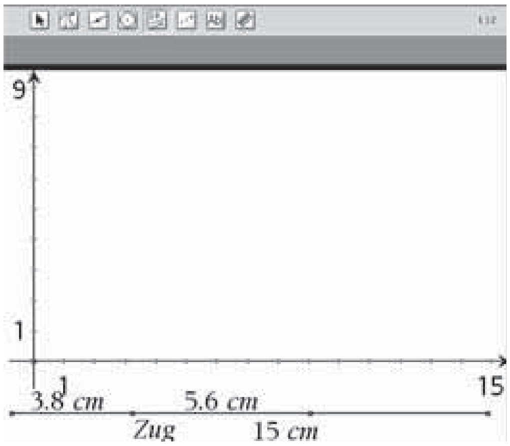
Lösungshinweise Aufgabe 1

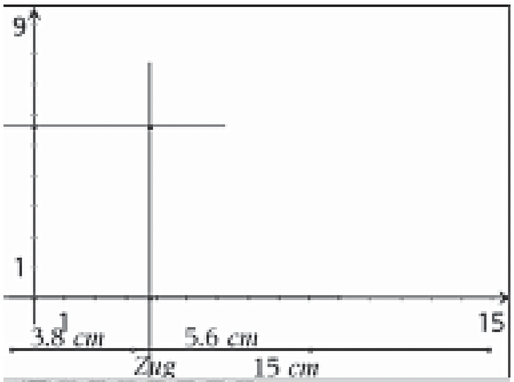
Die ersten Lösungsideen werden sicher ohne Rechnereinsatz entwickelt, evtl. können „Modell“ in Form von 15cm langen Drähten genutzt werden.
Spätestens wenn es um die Verallgemeinerung in Aufgabe 1b) oder 2) geht, bietet sich eine Aufarbeitung mit dem TI-Nspire™ CAS an.

Das Koordinatensystem wird im Folgenden so gewählt, dass die positive y-Achse die Wand und die x-Achse den „Boden“ darstellt.

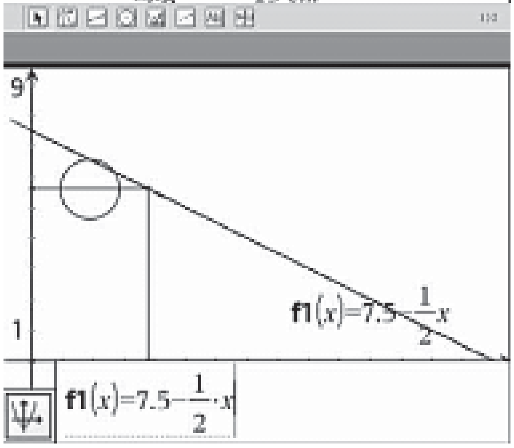
Je nach Vorkenntnissen bieten sich verschiedene Lösungswege an, wobei graphische, numerische und symbolische Lösungsschritte unterschiedlich miteinander kombiniert werden.:

Graphischer Zugang:
Die Teiumfaner lassen sich dynamisch konstruierten:
Man zeichnet in **Graphs & Geometry** zunächst außerhalb des Koordinatensystems eine Strecke der Länge 15 LE für den Teilumfang. (Linien, besondere; Messen), mit Attribute wird die Maßzahl auf 15 cm gesetzt.
Auf dieser Strecke zeichnet man einen Punkt (Zug). Dessen Abstand vom Anfangspunkt der Strecke wird wieder gemessen, es ist die „Schulterbreite“. Die Reststrecke wird in der Mitte geteilt (Punkt, Mittelpunkt) und die Länge eines Teilabschnittes gemessen („Beinlänge“).
Durch Maßübertragung werden die Schulterbreite auf die x-Achse und die Beinlänge auf die y-Achse übertragen. Senkrechte (Linien, besondere) durch diese Punkte zu den Koordinatenachen führen zum „Schulterpunkt“ (Punkte & Geraden – Punkt - Schnittpunkt(e)). Die bisher gewonnene Darstellung lässt sich dann natürlich noch „verschönern“.

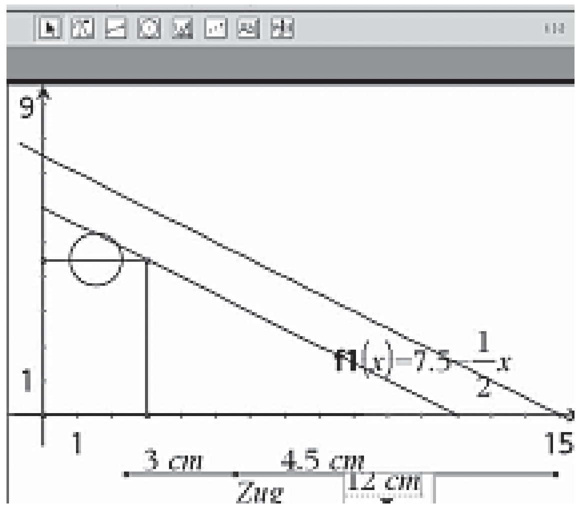




Bewegt man den Punkt Zug, liegt die Vermutung über die Lage der Schulterpunkte nahe.
Zeichnet man die Ortslinie dieser Schulterpunkte ein (Geometrischer Ort), ist die Gleichung der Geraden nahezu direkt ablesbar. Zur Kontrolle kann die Gerade auch über die Gleichung eingezeichnet werden (Graph einer Funktion zeichnen).

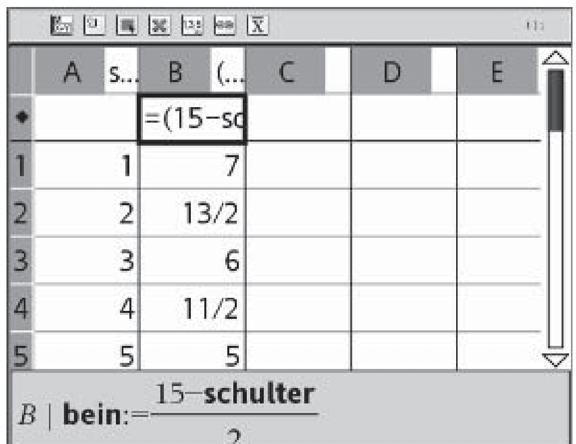


Erinnert man sich noch daran, dass die Zugehörigkeit zum Volk der Teiumf15 zu Beginn über die Länge einer Strecke festgelegt war, kann man nun durch Veränderung der Streckenlänge (s.o.) schnell überprüfen, dass Spione daran erkannt werden, dass ihre zweite Schulter nicht zum Brett „passt“.
Die in b) geforderte Verallgemeinerung fällt bei diesem Weg automatisch ab.
Man erhält den
<u>Satz vom Brett</u>
Stellen sich die Teiumfaner mit dem Teilumfang TU mit einer Schulter an die Wand, dann wird die Lage der anderen Schultern in einem geeigneten Koordinatensystem beschrieben durch die „Brettgleichung“
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}TU$.

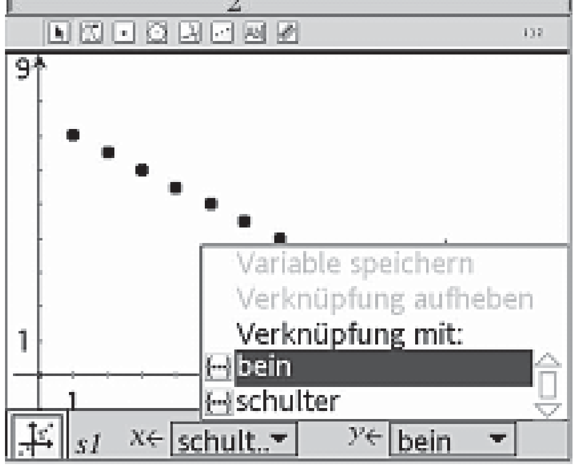


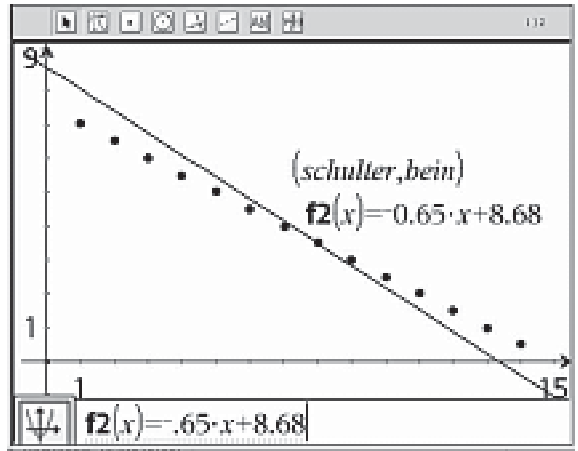
Der folgende numerische Lösungsweg kommt ohne Konstruktionen aus:

In **Lists & Spreadsheet** werden zwei Listen „schulter“ und „bein“ angelegt. Dazu werden die Werte für verschiedene Schulterbreiten entweder einzeln oder über den Folgenbefehl (Listen erzeugen) – hier in Spalte A - eingetragen. In einer zweiten (hier B) werden dann die entsprechenden Beinlängen berechnet.



Nach der Einstellung eines geeigneten Koordinatensystems lassen sich die Punkte über ein Streudiagramm graphisch darstellen (Listen graphisch darstellen).





Die Erstellung der Liste für die Beinlänge erzwingt schon eine funktionale Betrachtung, die Gleichung einer Geraden kann also analog zur Eingabe in der Titelzelle der Tabelle erfolgen:

$$f(x) = \frac{(15-x)}{2}.$$

Gibt man den Term in der Form $m \cdot x + b$ ein, so kann man bei einer fehlerhaften Eingabe die Gerade „von Hand“ anpassen (Graphen zeichnen)

Analog zum ersten Bearbeitungsweg ist auch hier zu überprüfen, dass die Schulter eines Spions nicht durch die Brettgleichung der Teiumfaner aus Teiumfan15 beschrieben wird und der Satz vom Brett gilt.

Lösungshinweise Aufgabe 2

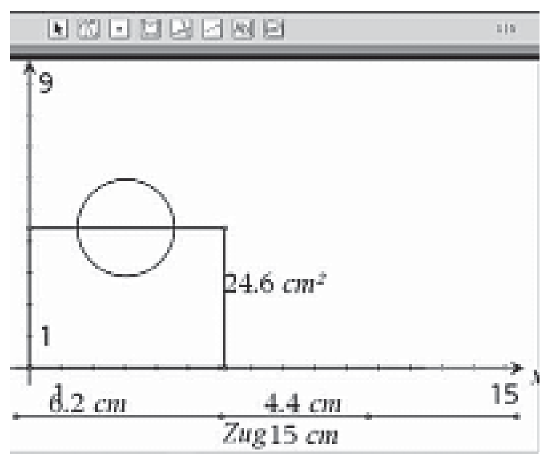
Nach der Vereinbarung, was unter dem Bauch eines Teiumfaners zu verstehen ist, gibt es eine Vielzahl möglicher Vermutungen, oft werden genannt:

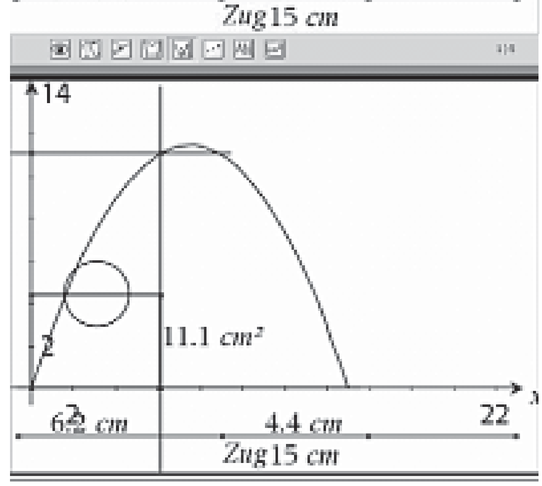
- Der quadratische Teiumfaner wird König. (Gegenbeispiel)
- Die Schulter des Königs liegt auf dem Mittelpunkt der Brettlinie (Begründung über die Veränderung der Fläche bei der Veränderung der Figur)

Hier sollen die Ansätze skizziert werden, die sich beim Einsatz entsprechender Hilfsmittel insbesondere an die Bearbeitung der Aufgabe 1 anschließen.

Lösungsweg I

Sind die Teiumfaner konstruiert worden, bietet es sich an, die Fläche des Bauches zu messen und den Teiumfaner mit dem größten Bauch dadurch zu bestimmen. Bei der hier gewählten Konstruktion tritt dabei das Problem auf, dass die Einheiten im Koordinatensystem nicht mit den Längen in der Zeichnung übereinstimmen. Eine Bearbeitung dieser Fragestellung führt aber zu weit von dem eigentlichen Problem weg und ist an dieser Stelle auch nicht notwendig, da hier nur die Schulterbreite gesucht ist, für die der Bauch am größten wird.

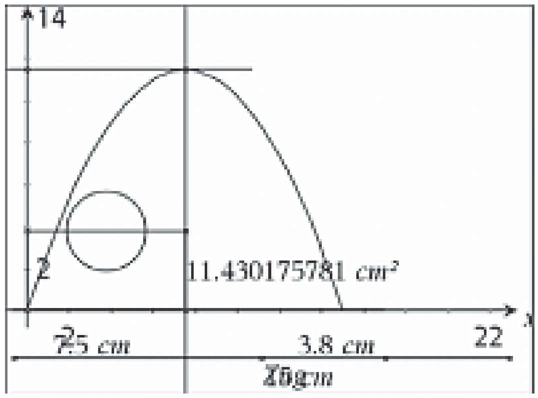




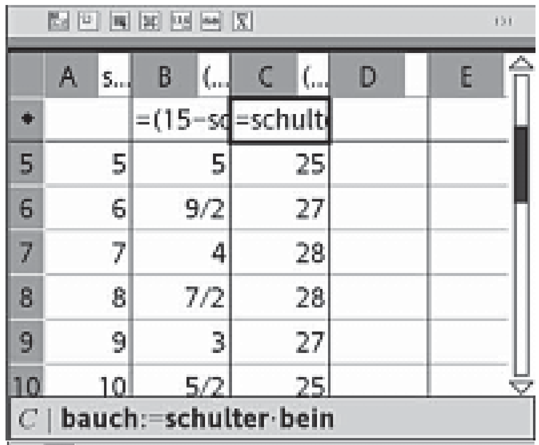
Zunächst wird der Bauch des Teiumfaners als Polygon definiert (Linien, besondere: Polygon) und dann der Flächeninhalt bestimmt.

Der Flächeninhalt kann durch Maßübertragung auf die y-Achse übertragen werden und nach der Anpassung des Koordinatensystem kann wie in Aufgabe 1 die Ortslinie (hier des Flächeninhaltes) gezeichnet werden (geometrischer Ort).

Durch die Verfeinerung der Angaben (Attribute) lässt sich der König mit entsprechender Genauigkeit bestimmen. Die Flächeninhaltsdaten lassen sich auch in eine Tabelle übertragen (Werte sammeln) und über eine Regression ein Funktionsterm bestimmen. Bei dieser Fragestellung ist aber auch der folgende zweite Lösungsansatz naheliegend.



Lösungsansatz II
Ausgehend von der Tabelle in Aufgabe 1 bietet es sich an, einen „Bauchterm" in der Titelzelle einer neue Spalte einzugeben. Durch eine Verfeinerung im Bereich der größten Werte erhält man schnell den maximalen Wert, aber ohne diesen nachweisen zu können.



	A s...	B (...	C (...	D	E
◆		=(15-sc	=schult		
5	5	5	25		
6	6	9/2	27		
7	7	4	28		
8	8	7/2	28		
9	9	3	27		
10	10	5/2	25		

C | bauch:=schulter·bein

Eine Darstellung der (verfeinerten) Daten führt je nach Vorkenntnissen über

- algebraische Wege

$$\text{bein(schulter)} = \frac{(15 - \text{schulter})}{2}$$

$$\text{bauch(schulter)} = \text{schulter} \cdot \frac{(15 - \text{schulter})}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{schulter}^2 + \tfrac{15}{2}\,\text{schulter}$$

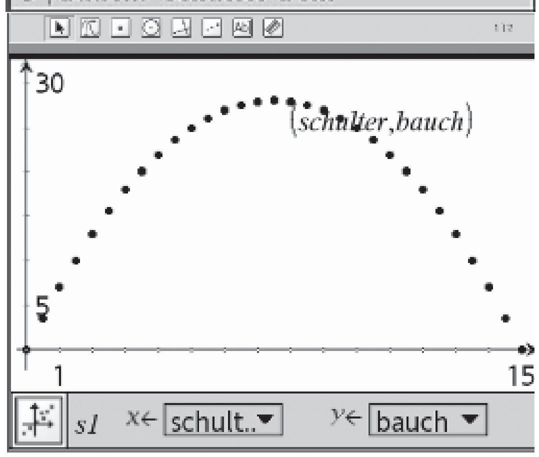
- manuelles Anpassen eines geeigneten Funktionsterms (siehe Aufgabe 1)

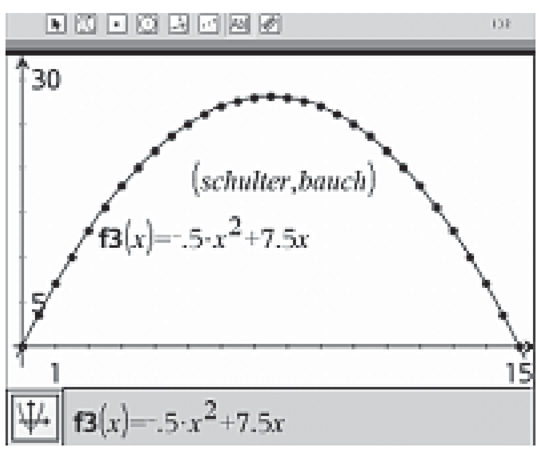
oder eine

- Regression

zu der „Bauchgleichung"

$b(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}5x$.





Das Ausgangsproblem ist im Rahmen einer sinnvollen Genauigkeit damit auf verschiedenen Wegen bearbeitet worden. König ist der Teiumfaner mit der Schulternbreite 7,5 oder im Rückgriff auf Aufgabe 1 derjenige, der doppelt so breit wie hoch ist.

Ob die Fragestellung nach der Eindeutigkeit und der mathematischen Genauigkeit zur Untersuchung des Scheitelpunktes vertieft wird, hängt sicher von der Stellung der Stunden im gesamten Unterrichtskonzept ab.

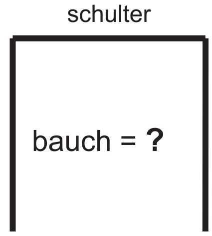
Zum Einstieg bietet es sich an, die Schüler einige Teiumfaner aus Draht (Pfeifenreiniger ergeben Bewohner aus Teiumfan15,5) biegen zu lassen. Die Projektion der Pfeifenreiniger über einen Tageslichtprojektor bietet die Möglichkeit, an verschiedenen Stellen Impulse zu setzen.
Die Aufgabe 1 kann natürlich deutlich offener gestellt werden. In dieser Form ist eine erste selbstständige Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schülern möglich, dennoch eröffnet sie die Möglichkeit, auch Hinweise zur Umsetzung mit dem TI-Nspire™ CAS einzufügen. Die zweite Aufgabe kann dann von den Schülerinnen und Schülern eigenständig (in Gruppen) bearbeitet werden.
Möglichen Schwierigkeiten beim Übergang zur Extremwertaufgabe kann man nach Knechtel (1996) dadurch begegnen, dass die Frage nach dem General (dem Teiumfaner mit der längsten „Diagonale“ zum Aufhängen der Orden) eingeschoben wird. Es bietet sich auch an, in der Gruppe zunächst anhand der gebastelten Teiumfaner den „Bürgermeister“ (also des Königs dieser Teilgruppe) des Gruppentisches durch Messung bestimmen zu lassen, bevor die allgemeine Frage nach den Maßen des Königs gestellt wird.
Weitere mögliche ergänzende Aufgabenstellungen zur Übung und Vertiefung findet man durch Übertragung in das Land der Umfaner (gleicher Rechtecksumfang, sehr einfach), der Diagonier (gleiche „Diagonalenlänge“) oder der SchuLos (siehe Zusatzmaterial)

Für die Bearbeitung der Aufgabe 2 in Gruppen kann man auch folgende Hilfekarten einsetzen:

Trage die Fläche des Bauches gegen die Breite der Schultern in ein Koordinatensystem ein.

Schulter-breite	Beinlänge	Bauchfläche
schulter	bein	bauch
	$\frac{15 - \text{schulter}}{2}$	schulter · bein
3	6	18
5	5	25
7	4	28
…		

schulter



$\text{bein} = \frac{15 - \text{schulter}}{2}$

Literatur/Quellenangaben

Knechtel, H.(1996). Die Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen unter dem Aspekt der Extremwertbestimmung, in: nli-Berichte 59, Hildesheim.

Stowasser, R.(1976). Extremale Rechtecke – eine Problemsequenz mit Kurzfilmen. Der Mathematikunterricht 3/1976.

Mathenetz 9 (2001). S.180, Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig.

Aufgabe zur Auswertung des Unterrichts:

In einem Dorf südlich leben die SchuLos16:

Sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Summe der Länge ihrer Beine 16 ist. Außerdem ist der Abstand zwischen ihren Füßen immer 6.

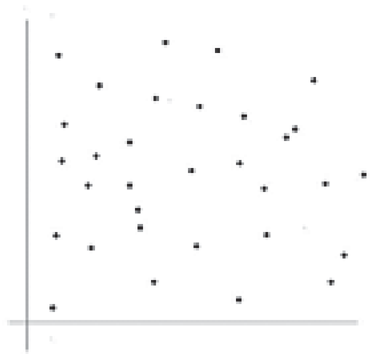
Auch in diesem Dorf hat sich ein Spion eingeschlichen. Ebenso wird ein König gesucht.

Arbeitsauftrag:

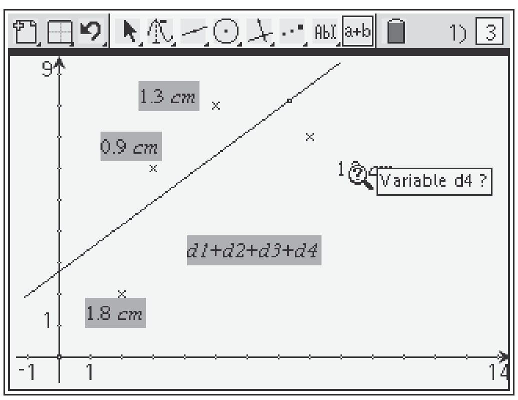
1. Entwickle eine Methode, um den Spion zu finden.
2. Entwickle eine Methode, um den König zu bestimmen.

Die beste Näherungsgerade

Andreas Pallack, Soest



Welche ist die beste Näherungsgerade?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I/II (Beschreibende Statistik)
Dauer: 1-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- kennen stochastische Zusammenhänge
- können mit linearen Funktionen umgehen
- können Abstände berechnen

Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- entwickeln Modelle zur Beschreibung von Daten
- hinterfragen Modelle zur Beschreibung von Daten

Inhaltsbezogene Ziele/Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- berechnen Abstände und optimieren Gütemaße gezielt

Rolle der Technologie (TI-Nspire^{TM} CAS):
- visualisieren
- berechnen

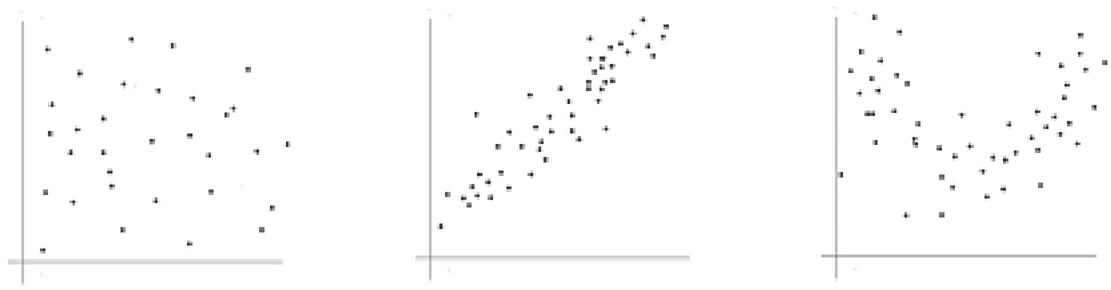
Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisches, numerisches und algebraisches Berechnen und Optimieren von Fehlern bei der Approximation

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Es bietet sich an, vorab mit den verschiedenen Regressionsmodellen zu spielen, d.h. anhand weniger Punkte zu testen, ob die Lernenden den beschriebenen Zusammenhang wirklich erfasst haben. Je nach Zugang kann das mit Hilfe von **Graphs & Geometry**, **Calculator** oder **Lists & Spreadsheet** durchgeführt werden. Auch Kombinationen dieser *Applikationen* sind denkbar. Deswegen sollte – im ersten Schritt – keine Methode vorgegeben werden; die Lernenden sollten möglichst selbstständig und in kleinen Gruppen arbeiten. Um die Ergebnisse im Anschluss vergleichbar zu machen, bietet es sich an, sich auf eine festgelegte Punktwolke zu einigen.

Welches ist die beste Näherungsgerade oder Was ist **Lineare Approximation?**

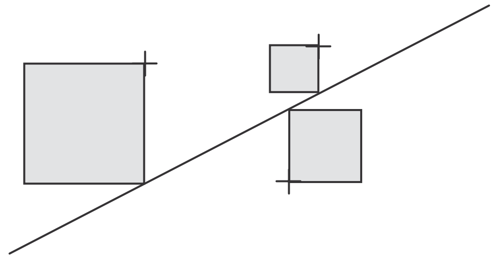
Jeder redet über Zusammenhänge. Die Zeitungen sind voll davon: Z.B. Die Kaufkraft wird steigen, wenn wir die Steuern senken; der Benzinverbrauch ändert sich mit der gefahrenen Geschwindigkeit; der Stromverbrauch in einer Stadt hängt von der Tageszeit ab, …. .

Solche Zusammenhänge lassen sich graphisch darstellen. Man erhält dann oft eine Ansammlung von Punkten im Koordinatensystem, eine „Punktwolke“.



Um diese Zusammenhänge näher untersuchen und für Prognosen und Berechnungen nutzen zu können, sucht man oft eine Funktion, die die jeweilige Punktwolke annähert (approximiert). Dies kann zum Beispiel eine lineare Funktion sein, wie es sich bei der mittleren Punktwolke anbietet. Diese Methode nennt man lineare Approximation oder lineare Regression.

Aber: Welche Gerade liefert die beste Näherung?
Häufig folgt man dem folgenden Gütekriterium: Minimiere die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände.



Aber das ist nur ein sehr spezielles Kriterium.

Zeichne zu Deinen Punkten eine Gerade, mit der der gesuchte Zusammenhang möglichst gut beschrieben wird. Vergleiche Dein Ergebnis mit Deinem Nachbarn. Welche Gerade stellt die bessere Näherung dar? Entwickle Kriterien für die Konstruktion der optimalen Geraden.

Tipps: Beginne mit einigen wenigen Punkten. Überlege, welches der Werkzeuge von TI-Nspire™ CAS am besten für deine Erkundung geeignet ist.

Die Aufgabe ist sehr offen gestellt. Aus diesem Grund können wir an dieser Stelle nur mögliche Gedankengänge und Lösungswege darstellen.

Wenn die Lernenden trotz systematischer Suche keine geeigneten Kriterien bennen können, könnte die Aufgabenstellung modifiziert werden. Z.B.:

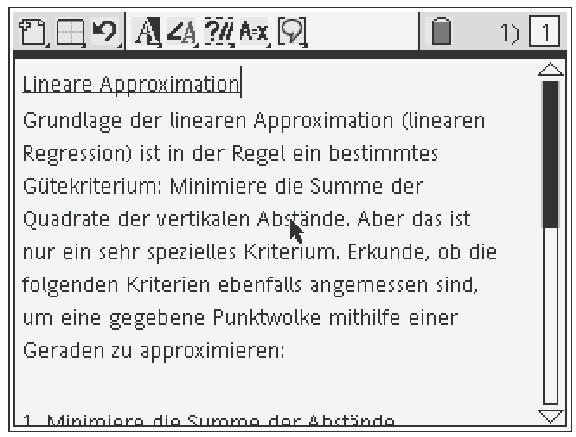
Erkunde, ob die folgenden Kriterien ebenfalls angemessen sind, um eine gegebene Punktwolke mithilfe einer Geraden zu approximieren:

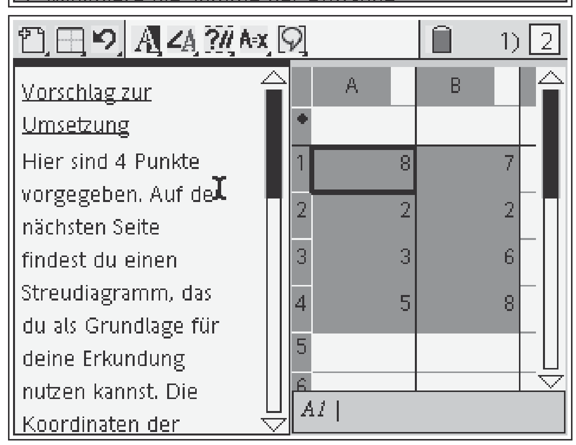
1. Minimiere die Summe der Abstände
2. Minimiere die Summe der Quadrate der Abstände
3. Minimiere die Summe der Quadrate der horizontalen Abstände

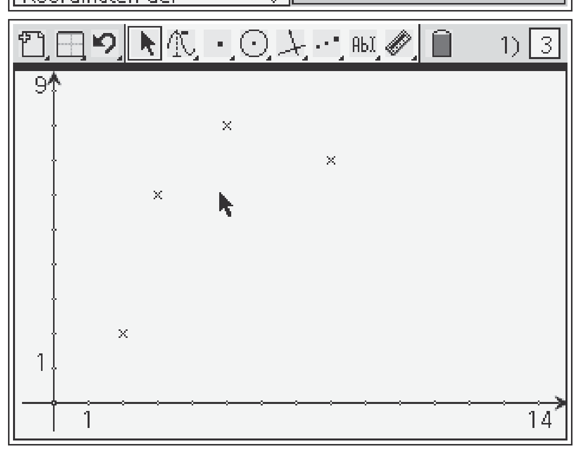
Überlege anschließend, ob es weitere geeignete Gütekriterien gibt und berechne die zugehörigen Gütemaße.

Die Lösungsskizzen nehmen Bezug auf die hier vorgestellten Ideen zu Gütekriterien.

Es gibt prinzipiell drei verschiedene Zugänge zur Erforschung der verschiedenen Gütekriterien: einen graphischen, einen algebraischen und einen numerischen Zugang. Hier behandelt werden ein graphischer und ein numerischer Zugang. Um einen Überblick darüber zu geben, werden im Folgenden beide an Hand verschiedener Kriterien realisiert.
Die Kriterien „Minimieren der Summe der Abstände der Punkte von der Gerade“ und „Minimieren der Summe der Quadrate der Abstände der Punkte von der Geraden“ werden in **Graphs & Geometry** erarbeitet.
Die Kriterien „Minimieren der Summe der Quadrate der vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden“, „Minimieren der Summe der Quadrate der horizontalen Abstände der Punkte von der Geraden“ und die Summe dieser beiden Gütemaße werden in **Calculator** und **Lists & Spreadsheet** behandelt.







Teil 1:
Minimieren der Summe der Abstände der Punkte von der Geraden

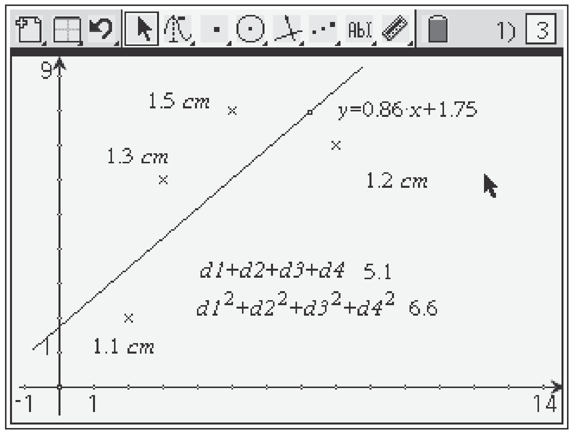
bzw.

Minimieren der Summe der Quadrate der Abstände der Punkte von der Geraden

1) **Graphs & Geometrie**. Um Punkte genau auf Gitterpunkte zu setzen, sollte das Gitter eingeblendet werden. Hier wird lediglich mit vier Punkten gearbeitet, was für das grundlegende Verständnis ausreicht. Zusätzlich wird eine Gerade definiert.

2) Messen Sie die jeweiligen Abstände der Punkte von der Geraden. Durch Verschieben kann man die Anzeigen so platzieren, dass alle

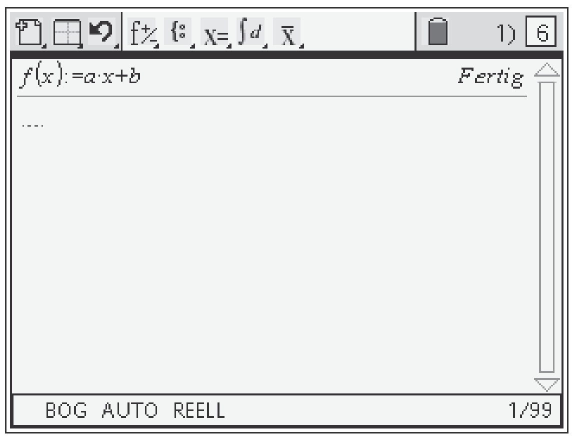
wesentlichen Elemente erkennbar bleiben.



3) Zur Berechnung der Gütemaße werden die verschiedenen Formeln eingegeben (d1+d2+d3+d4 und d1²+d2²+d3²+d4²) und die entsprechenden Werte berechnet (Formeln, Werte berechnen)

4) Minimieren Sie die Summen durch Verschieben der Geraden. Welches ist die optimale Gerade? Welche Gleichung hat sie?

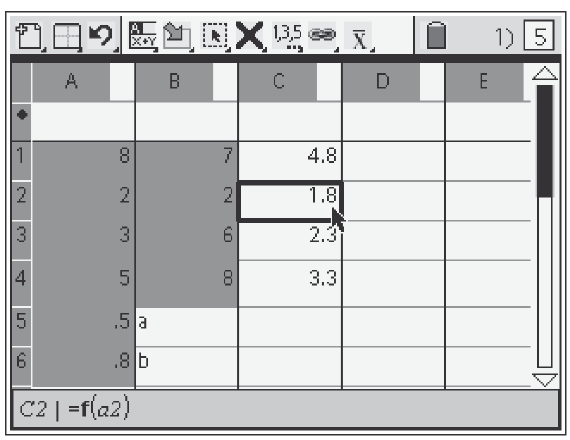
5) In unserem Fall zeigt sich, dass das erste Gütemaß sich nicht verändert, wenn sich zwei Punkte oberhalb und zwei Punkte unterhalb der Geraden befinden und man die Gerade parallel verschiebt. Welche Gerade optimal ist, kann deswegen nicht eindeutig gesagt werden. Für das zweite Gütekriterium ergibt sich – nach einigem feinen Probieren – die rechts gezeigte Auswahl.



Teil 2:
Minimieren der Summe der Quadrate der horizontalen Abstände der Punkte von der Geraden (Klassisches Kriterium)

bzw.

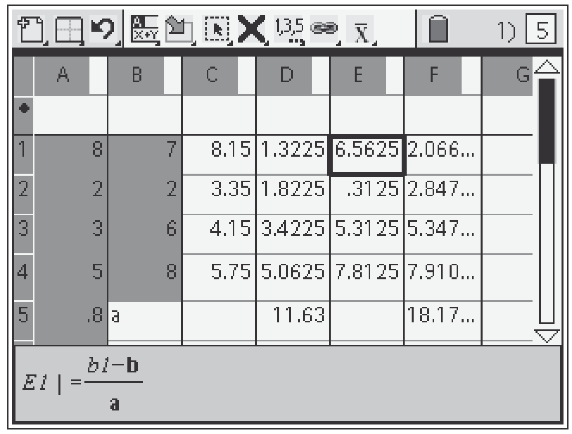
Minimieren der Summe der Quadrate der horizontalen Abstände der Punkte von der Geraden



1) Öffnen Sie auf einer Seite sowohl **Lists & Spreadsheet** als auch **Calculator** (Applikationen aufrufen). Definieren Sie eine lineare Funktion (z.B. f(x):=a·x+b).

2) Geben Sie die Koordinaten der Punkte ein (siehe auch: Listen). Zusätzlich werden die Parameter a und b der zuvor definierten Funktion von hier gesteuert. Mit Hilfe von Formeln in den weiteren Spalten lässt sich dann das erste Gütekriterium berechnen. Für das zweite Gütekriterium kann man entweder mit der Umkehrfunktion arbeiten, oder man vertauscht die x- und y-Koordinaten der Datenreihen.

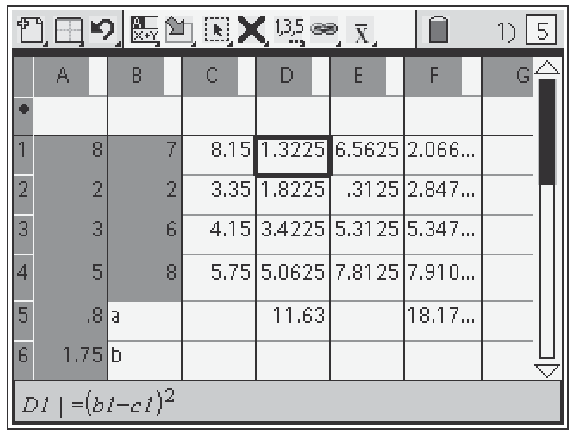
3) Den letztendlichen Wert kann man sich z.B. durch Verwendung des sum-Befehls (=sum(.)) anzeigen lassen. Die Optimierung erfolgt über die gezielte Variation der Parameter.



	A	B	C	D	E	F	G
◆							
1	8	7	8.15	1.3225	6.5625	2.066...	
2	2	2	3.35	1.8225	.3125	2.847...	
3	3	6	4.15	3.4225	5.3125	5.347...	
4	5	8	5.75	5.0625	7.8125	7.910...	
5	.8	a		11.63		18.17...	

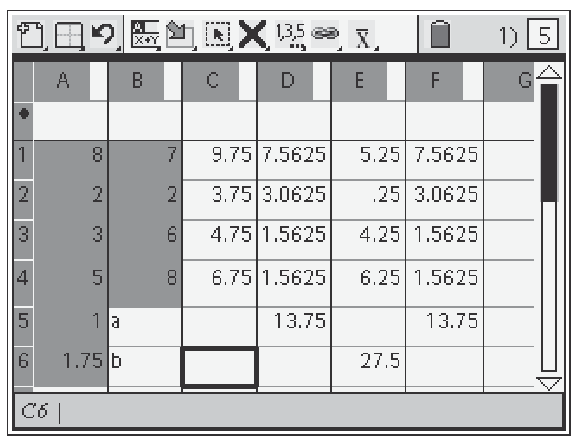
$E1 \mid = \frac{b1-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

4) Als zusätzliches Gütemaß könnte dann noch die Summe der beiden bereits berechneten Maße betrachtet werden. Durch Verknüpfen der **Lists & Spreadsheet**-Seiten (Variablen verknüpfen) kann dies recht übersichtlich realisiert werden.



	A	B	C	D	E	F	G
◆							
1	8	7	8.15	1.3225	6.5625	2.066...	
2	2	2	3.35	1.8225	.3125	2.847...	
3	3	6	4.15	3.4225	5.3125	5.347...	
4	5	8	5.75	5.0625	7.8125	7.910...	
5	.8	a		11.63		18.17...	
6	1.75	b					

$D1 \mid =(b1-c1)^2$



	A	B	C	D	E	F	G
◆							
1	8	7	9.75	7.5625	5.25	7.5625	
2	2	2	3.75	3.0625	.25	3.0625	
3	3	6	4.75	1.5625	4.25	1.5625	
4	5	8	6.75	1.5625	6.25	1.5625	
5	1	a		13.75		13.75	
6	1.75	b			27.5		

C6 |

Im Unterricht ist es spannend, Zusammenhänge zwischen Größen (ob nun kausal oder nicht) zu untersuchen. Dazu werden häufig Regressionsverfahren verwendet. Durch die Weiterentwicklung neuer Technologien ist es heutzutage leicht, Regressionen im Unterricht durchzuführen. Die eigentliche Mathematik, die hinter der Approximation von Punktwolken mit Hilfe von Graphen steckt, tritt dabei jedoch häufig in den Hintergrund. Den meisten implementierten Algorithmen zur Approximation von Punktwolken durch eine Gerade liegt das Gütekriterium „Minimierung der Summe der Quadrate der vertikalen Abstände von den Punkten zur Geraden“ zu Grunde. Jedoch sind auch andere Gütekriterien denkbar, praktikabel und z.T. sogar besser geeignet, um Zusammenhänge zwischen Größen zu beschreiben.

Bevor man die Lernenden verschiedene Methoden der Approximation erkunden lässt, sollte ein angemessenes Problemverständnis geschaffen werden. Das kann z.B. dadurch geschehen, dass man den Zusammenhang zwischen zwei Größen mit Hilfe linearer Regression bestimmt und anschließend die Datenreihen vertauscht. Die meisten implementierten Regressionsalgorithmen sind nicht unabhängig von der Vertauschung der Achsen. Ansonsten sind – neben Kompetenzen zur Nutzung der Technologie – nur elementare mathematische Fähigkeiten gefordert.

Da nicht festgelegt wird, mit welchen Methoden die Aufgaben gelöst werden sollen, muss an dieser Stelle betont werden, dass die Lösungsvorschläge lediglich der Orientierung dienen und mögliche Schülerlösungen sind. Es sind zahlreiche alternative Lösungswege möglich, von denen hier nur einer skizziert wurde. So kann es durchaus sinnvoll sein, auch vollends andere Wege zu wählen. Auf der Produkt-CD zu TI-Nspire™ CAS gibt es ein Schülerdokument, das ebenfalls im Rahmen dieser Unterrichtseinheit eingesetzt werden kann.

Literatur/Quellenangaben

Es wurde ursprünglich für die Produkt-CD von TI-Nspire™ CAS entwickelt:
Pallack, Andreas (2006). Linear Approximation: What is it? Texas Instruments.

Die Klausuraufgabe stammt aus dem Buch:
Pallack, Andreas (2006). Mit CAS zum Abitur. Schroedel Verlag. S. 38.

Fragen zur Auswertung des Unterrichts

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten den Erfolg des Unterrichts zu evaluieren. Am wichtigsten ist sicher die Auswertung unmittelbar danach. Hier sollten die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit bekommen ihre Ideen vorzustellen. Vor allem der Vergleich verschiedener Ansätze wird sich als fruchtbar erweisen. Zusätzlich können aber auch Verständnisfragen und Übungen dazu beitragen herauszufinden, inwiefern die Lernenden das Problem wirklich vollständig erfasst und verstanden haben. Die folgenden Fragen sind möglich Vorschläge zur erweiterten Auswertung des Unterrichts:

1) Gibt es Punktkonstellationen, bei denen sich die behandelten Regressionstypen nicht unterscheiden? Bestimme ggf. eine solche Punktkonstellation.
2) Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes zu einer Geraden? Gib auch eine geeignete Formel an.
3) Welches der behandelten vier Gütekriterien ist wohl am ehesten geeignet, um den Zusammenhang zwischen zwei Größen (z.B. Größe und Gewicht von Menschen) annähernd zu beschreiben? Welches ist überhaupt nicht geeignet? Begründe deine Antwort.
4) Welches Gütekriterium liegt der Standard-Regression bei TI-Nspire™ CAS zu Grunde? Überprüfe deine Vermutung durch ein Beispiel.
5) Beschreibe – unter Berücksichtigung deiner neu gewonnen Erfahrungen über Gütekriterien – was man unter linearer Approximation versteht.
6) Approximiere die Punkte A(1|6), B(3|2), C(4|4) und D(6|1) mit Hilfe einer Geraden. Begründe die Wahl der Regressionsmethode.

Weiterführung, Variationen des Problems

- Man kann die Lernenden auffordern, weitere Gütekriterien zu erfinden. Eine Übersicht zu weiteren Regressionsmethoden findet man z.B. bei Tack, Thomas (2006), Die dritte, vierte und fünfte Regressionsgerade, MNU 59, Heft 1: S. 7-13.
- Statt linearer Zusammenhänge kann man auch Regressionen mit quadratischen oder exponentiellen Funktionen betrachten. Beachten Sie jedoch, dass die Abstandsberechnung in diesem Fall ungleich schwieriger ist.
- Es lohnt sich, die verschiedenen Regressions-Methoden auf reale Probleme anzuwenden und im Rahmen dieser Kontexte besonderen Wert auf die Auswahl der Methode zu legen. Schließlich bestimmt die Frage die Methode und nicht umgekehrt. Das kann von Fall zu Fall ebenfalls sehr anspruchsvoll sein und setzt fundierte Modellierungskompetenzen voraus.

Vorschlag für eine Klausuraufgabe

Bakterien im Trinkwasser

Im Trinkwasser einer Stadt wurde ein Bakterium entdeckt. Da in einem Teil der Haushalte gesundheitsgefährdende Dosierungen der Bakterien gemessen wurden, gibt die Stadt eine Studie in Auftrag. Im Experiment wird eine bestimmte Menge des Bakteriums 10 Stunden auf konstanter Temperatur gehalten. Die Temperatur wird von Messung zu Messung variiert. Anschließend wird mit dem Mikroskop die Anzahl der Bakterien pro Liter bestimmt. Es wurden die folgenden Werte gemessen:

Experiment	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatur(°C)	23,5	13,5	9	19,5	9	9	26	10	10	15
Bakterien/l in TSD	28,6	16,5	11,3	23,9	11,3	11,5	34	12,6	12,3	19,2

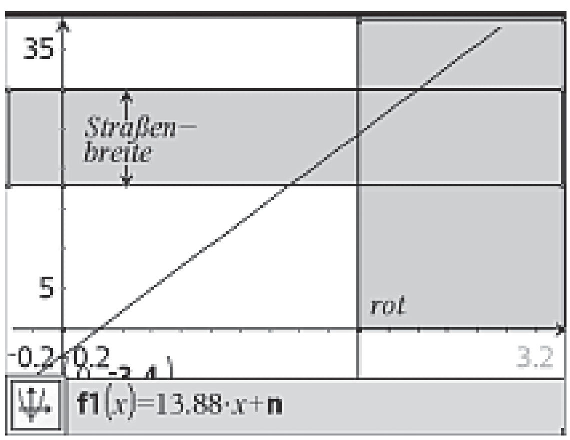
a) Eine Dosierung von über 15000 Bakterien pro Liter gilt als gesundheitsgefährdend. Bestimme den relativen und absoluten Anteil derjenigen Proben, die als gesundheitsgefährdend eingestuft wurden.
b) Berechne den Korrelationskoeffizienten und die Regressionsgerade bezüglich der Messreihen.
c) Stelle Messwerte und Regressionsgerade in einem Diagramm dar.
d) Bei welcher Temperatur sind – gemäß des Modells aus b) – keine Bakterien im Wasser zu erwarten?
e) Bei einem weiteren Experiment wird das Wasser auf 38,5 °C erhitzt. Wie viele Bakterien erwartet man, wenn das Modell aus b) auch hier trägt?
f) Nachträglich stellte sich heraus, dass das Thermometer zur Bestimmung der Temperatur defekt war. Es zeigte stets 3 °C zu wenig an. Erkläre – ohne Rechnung – wie Korrelationskoeffizient und die Gleichung der Regressionsgeraden korrigiert werden müssen.
g) Eine Zeitung greift die Untersuchung auf: *„... Besonders gefährdet sind – wenn man der Untersuchung Glauben schenken darf – Suppen oder andere heiße Speisen, da diese auf Temperaturen von über hundert Grad erhitzt werden und mit einem massiven Bakterienwachstum gerechnet werden muss. Vor allem Schnellkochtöpfe, in denen das Wasser auf bis zu 200 °C erwärmt wird, sind tickende Zeitbomben unserer Kochgesellschaft. Bleiben Sie also lieber bei der kalten Küche.“* Beurteile dieses Statement in Bezug auf Plausibilität und Reichweite der Untersuchung auf der Basis der Ergebnisse der Teilaufgaben a)-f) und deinem Wissen über Bakterien.

Kommentar zu der Aufgabe: Der Realitätsbezug ist für die Zwecke einer Klausur stark reduziert. Teil a) der Aufgabe dient dem Hineinlesen in die Tabelle. Schülerinnen und Schüler, die diese recht leichte Aufgabe sicher lösen, haben die Bakterien-Zeile richtig interpretiert. Teil b) ist mithilfe der Technologie leicht zu bewältigen. Neben Nutzungskompetenzen wird hier nichts geprüft. In Teil c) müssen die Ergebnisse in die Klausurunterlagen übernommen werden. Die Teile c) und d) verlangen die Anwendung des unterstellten Modells. Dazu müssen die Lernenden mit linearen Funktionen sicher umgehen können. Teil f) ist eine Verständnisfrage. Sie zielt darauf ab, dass der Korrelationskoeffizient invariant ist gegenüber linearen Transformationen der Daten. Die Regressionsgerade verschiebt sich schlicht. In Teil g) soll die Reichweite des Modells beurteilt werden. Die Erfahrung spricht dagegen, dass sich Bakterien umso stärker vermehren, umso stärker man eine Flüssigkeit erhitzt. Vielmehr bieten sehr niedrige und sehr hohe Temperaturen ungünstige Lebensverhältnisse für diese Spezies. Das lineare Modell ist in diesem Bereich nicht tragfähig.

Durchstarten, Anhalten oder Weiterfahren

Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda

An der Ampel anhalten oder durchstarten?



Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Simulieren
- Berechnen

Steckbrief der Aufgabe
Das vorliegende Problem kann sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II im Rahmen des Analysisunterrichtes genutzt werden. Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können mit linearen und quadratischen Zusammenhängen umgehen
- kennen die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- verwenden verschiedene Formen der Darstellung einer mathematischen Situation
- modellieren eine Situation
- argumentieren und kommunizieren bei der Problemlösung

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- wenden ihre Kenntnisse über Funktionen an
- erweitern ihre Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit Diagrammen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Erfassen und Lösen des Problems durch Simulation
- Algebraisch: Überprüfen der graphischen Lösung

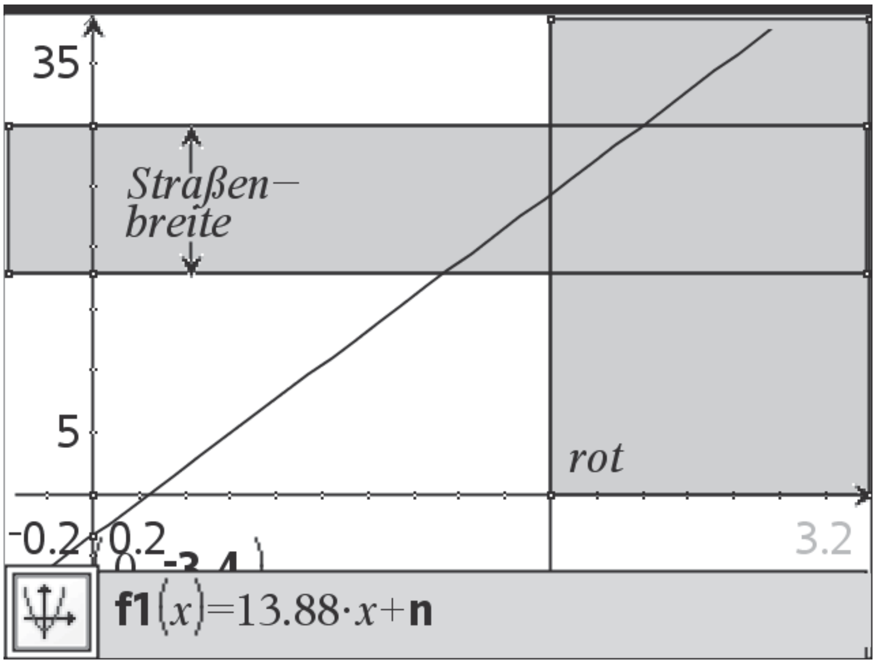
Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Zum Üben oder Vertiefen auch im fächerübergreifenden Unterricht
- Gruppenarbeit mit Präsentation wird empfohlen
- Die Aufgabe kann durch Weglassen der Abbildung auf der Kopiervorlage offener gestaltet werden

An der Ampel anhalten oder durchstarten?

Ein Autofahrer nähert sich in einer Ortschaft einer ampelgesteuerten Kreuzung in dem Augenblick, in dem die Ampel von Grün auf Gelb umspringt. In welcher Entfernung zur Ampel sollte er bremsen, wann sollte er lieber durchstarten?

Analysieren Sie das Problem mit Hilfe des vorgegebenen s-t-Diagramms, in der bereits eine mögliche Situation eingezeichnet ist. Zeichnen Sie in dieses s-t-Diagramm zwei weitere mögliche Situationen ein. Gehen Sie dabei zunächst davon aus, dass das Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h fährt, die Kreuzung 12 m breit ist und das Umschalten auf Rot 2 Sekunden dauert.

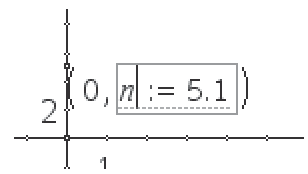
1. Das Fahrzeug soll nun mit 7,5 m/s^2 konstant abgebremst werden, hinzu kommt eine Reaktionszeit von 1 Sekunde. Wie verändert sich nun die Sachlage?
2. Auch ein Beschleunigen wäre denkbar. Diskutieren Sie verschiedene Varianten mit Ihrem Nachbarn und stellen Sie Ihre Ideen anschließend im Plenum vor.

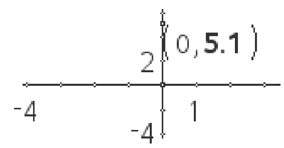


Wir behandeln die beiden Varianten „Weiterfahren“ und „Abbremsen“ getrennt und beginnen jeweils mit einem möglichen graphischen Lösungsweg. Dieser graphische Zugang kann auch als zusätzliche und sinnvolle Visualisierung bei anderen Lösungswegen dienen, um das Erfassen der Problematik zu erleichtern.

Weiterfahren

Für einen gleichförmigen Bewegungsvorgang gilt die Beziehung $s(t)=v \cdot t+s_0$, wobei s_0 der zu variierende Parameter ist.
Um die Bewegung zu visualisieren, kann man die Funktion s entlang der s- Achse verschieben. Dazu definiert man einen Punkt auf der Koordinatenachse und weist dessen y-Koordinate z. B. den Variablennamen n zu (Werte speichern).
Nun kann man diese Variable n nutzen, um die lineare Funktion $f_1(x)=13{,}88 \cdot x + n$ zu definieren, welche s(t) entspricht. Der Koeffizient von x ergibt sich durch Umrechnen der Geschwindigkeit (50 km/h) in die Einheit Meter pro Sekunde (≈13,88 m/s).

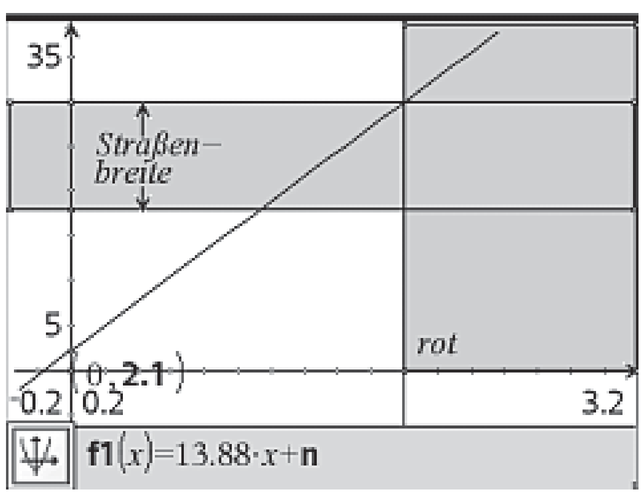




$f1(x)=13.88x+\mathbf{n}$

Es sind nun relativ einfach verschiedene Situationen herzustellen, indem man die lineare Funktion entlang der y-Achse verschiebt. In der Kopiervorlage ist ein Beispiel dargestellt, bei dem das Fahrzeug die Kreuzung nicht mehr rechtzeitig überqueren konnte, da sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt t = 2 s mitten auf der Kreuzung befindet.

Es lässt sich nun auch graphisch der Abstand von der Kreuzung bestimmen, für den ein rechtzeitiges Überqueren gerade noch möglich wäre.



Selbstverständlich kann dies auch algebraisch überprüft werden.

$\text{solve}(13.88 \cdot x+k=30,k)|x=2$

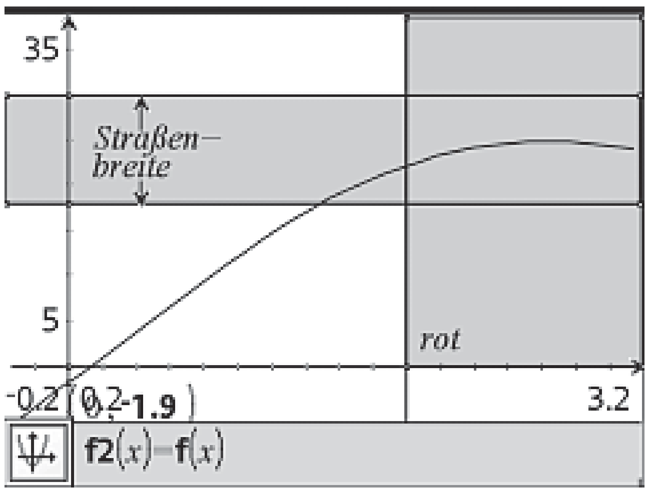
Gibt man nicht vor, dass die Lösung graphisch erfolgen soll, kann die Lösung auch durch folgende Überlegung gewonnen werden: Das Fahrzeug legt in 2 s noch ca. 28 m zurück, also muss es weniger als ca. 16 m von der Ampel entfernt sein, um nicht bei Rot im Kreuzungsbereich zu sein.

Abbremsen

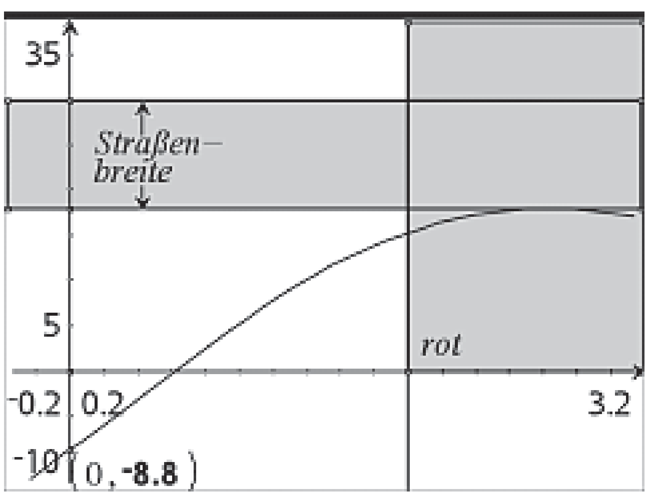
Um den Vorgang des Abbremsens graphisch darzustellen benötigt man eine abschnittsweise definierte Funktion. Für den Zeitraum der Reaktionszeit ($t \leq 1$ s) nutzt man die bereits definierte Funktion f_1, für den Abbremsvorgang gilt die Beziehung $s(t) = v_o \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$.

$$f(x) := \begin{cases} f1(x), & x \leq 1 \\ f1(x) - \frac{7.5}{2} \cdot (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Mit dieser Funktion f kann man nun den entsprechenden Vorgang in **Graphs & Geometry** simulieren.



Man findet auch hier graphisch den entsprechenden Abstand von der Kreuzung, bei dem ein Anhalten vor der Kreuzung noch gelingt.



Auch eine analytische Lösung ist sinnvoll und denkbar, diese sei hier kurz skizziert: Man kann sich überlegen, dass das Fahrzeug dort zum Stillstand kommt, wo der Graph der Funktion f einen lokalen Hochpunkt hat. Entweder man bestimmt den Scheitelpunkt des Parabelabschnitts oder löst dieses Problem mithilfe der Differenzialrechnung. So ermittelt man, dass man mindestens 27 m vor der Kreuzung mit dem Bremsvorgang beginnen muss.

Didaktischer Kommentar

Aufgaben dieser Art sind vor allem für Schülerinnen und Schüler interessant, die ihren Führerschein machen oder in absehbarer Zeit machen wollen. Sie bietet sich deswegen am Ende der Sekundarstufe I oder zum Beginn der Sekundarstufe II an.

Die Lernenden müssen sich auf den Kontext einlassen. Das bedeutet, dass auf einige physikalische Grundlagen nicht verzichtet werden kann. Sollten die Lernenden mit Weg-Zeit-Diagrammen nicht vertraut sein, können Sie sich der Problematik langsam nähern durch Aufgaben wie:
Zeichnet ein Weg-Zeit-Diagramm eures Schulweges. Lauft ihr immer gleich schnell? Wie sieht man im Diagramm, ob ihr stehen bleibt?

Literatur/Quellenangaben

Idee nach Klett Impulse Oberstufe (Flyer)

Bürger, H., Fischer, R. und Malle, G. (1997), Einige Beispiele zu projektorientiertem Unterricht: Verkehrsprobleme. In:Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd1, Franzbecker, Hildesheim.

Foto: Hubert Langlotz

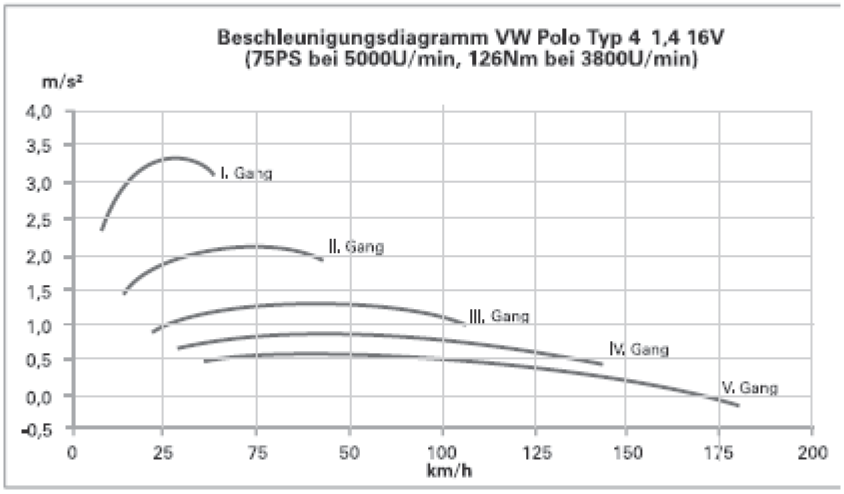
Klausuraufgabe/ Projektaufgabe (Idee nach Bürger/Fischer/Malle)

Ein PKW-Fahrer eines VW-Polo (PKW-Länge 4 m), welcher mit 60 km/h hinter einem LKW (Länge 10 m) im vorgeschriebenen Mindestabstand herfährt (Eine Fahrschulregel sagt: „Mindestabstand zum vorausfahrenden Fahrzeug mindestens halbe Tacho-Anzeige in Meter“) möchte den LKW überholen. In 600 m Entfernung kommt ein PKW mit ca. 90 km/h entgegen.

Da man sich auf einer Bundesstraße befindet, dürfen 100 km/h nicht überschritten werden.

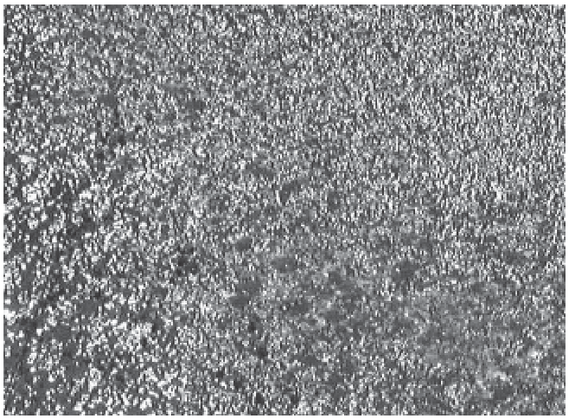
Kann der Überholvorgang gefahrlos erfolgen?

Fertigen Sie zunächst eine Skizze des Überholvorgangs mit allen wesentlichen Maßen an. Nutzen Sie auch das hier gezeigte Diagramm. Stellen Sie die Bewegungsabläufe der 3 Fahrzeuge in einem s-t-Diagramm dar und diskutieren Sie den Überholvorgang.

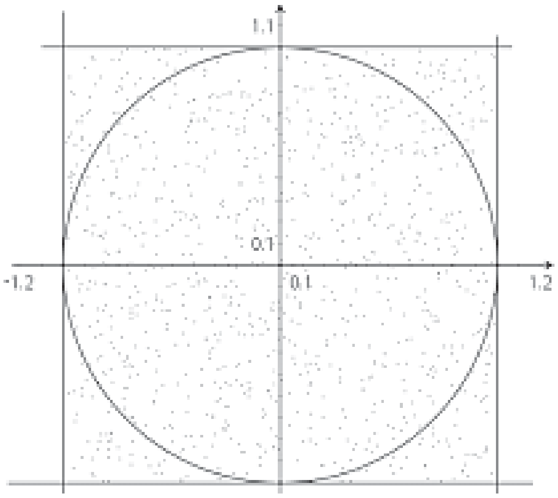


π durch Zufallsregen

Benno Grabinger, Neustadt



Kann man mit Regentropfen einen Näherungswert für den Flächeninhalt eines Kreises finden?



Steckbrief der Aufgabe
Das vorliegende Problem kann sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II im Rahmen des Stochastikunterrichts behandelt werden.
Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können mit dem Satz des Pythagoras umgehen
- können relative Häufigkeiten berechnen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- verwenden verschiedene Formen der Darstellung einer mathematischen Situation
- modellieren eine Situation mit Zufallszahlen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- schätzen Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen
- interpretieren Flächenverhältnisse als Wahrscheinlichkeiten

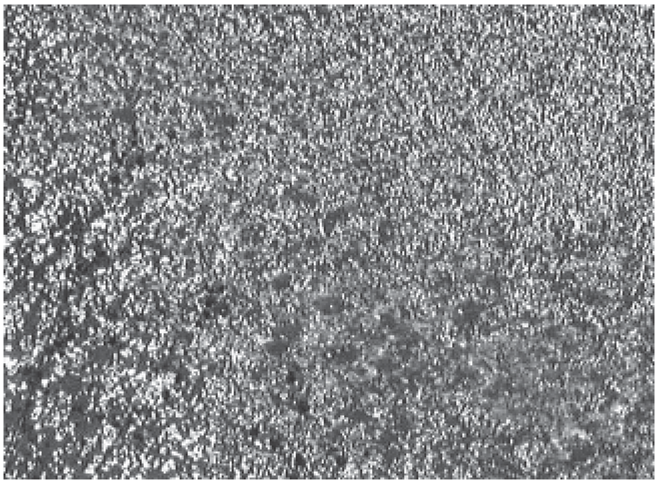
Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Simulieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Wegen der umfangreichen Daten ist eine sinnvolle Behandlung des Problems nur mit Einsatz der Technologie möglich. Dabei werden algebraische, numerische und graphische Methoden verwendet.

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- In der Sekundarstufe I bietet sich die Arbeit mit Vorlagen an. In der Sekundarstufe II können Schülerinnen und Schüler die einzelnen Elemente teilweise oder auch ganz selbst entwickeln.

π durch Zufallsregen

Nach Wikipedia bezeichnet man Regen als „einen flüssigen Niederschlag mit einer Tropfengröße von meist 0,6–3 mm. Unterhalb von 0,5 mm spricht man von Sprühregen" (auch *Nieselregen*)." (http://de.wikipedia.org/wiki/Regen)



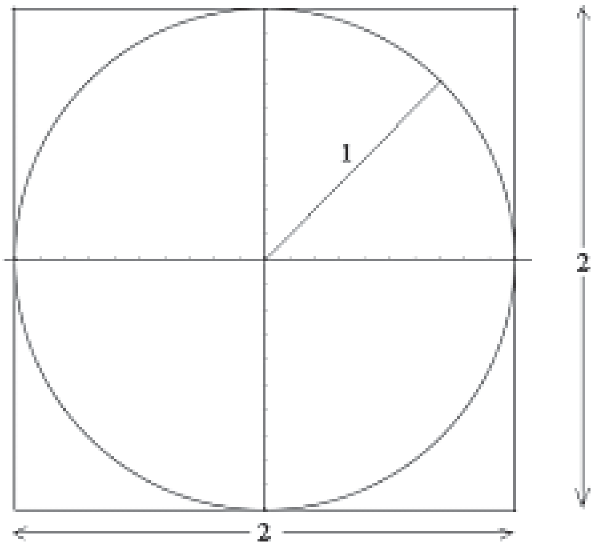
Regentropfen auf einer Wasseroberfläche

Im Gegensatz dazu versteht man unter einem Zufallsregen punktförmige Tropfen, die als Punkte in der xy-Ebene und damit durch ein Koordinatenpaar (x|y) angegeben werden können. Erzeugt werden die Punkte durch den Zufallszahlengenerator von TI-Nspire™ CAS.

Erzeuge eine große Anzahl n von Zufallspunkte im Quadrat Q mit den Eckpunkten (–1|–1), (1|–1), (1|1), (–1|1) der xy-Ebene. Ermittle aus n und der Zahl t der Punkte, die dabei das Innere des Einheitskreises K treffen, einen Näherungswert für π.
Stelle die Situation grafisch dar.

Versuche, den Verlauf der Simulation, d.h. die Entwicklung des Schätzwertes für π in Abhängigkeit von der Zahl n darzustellen.

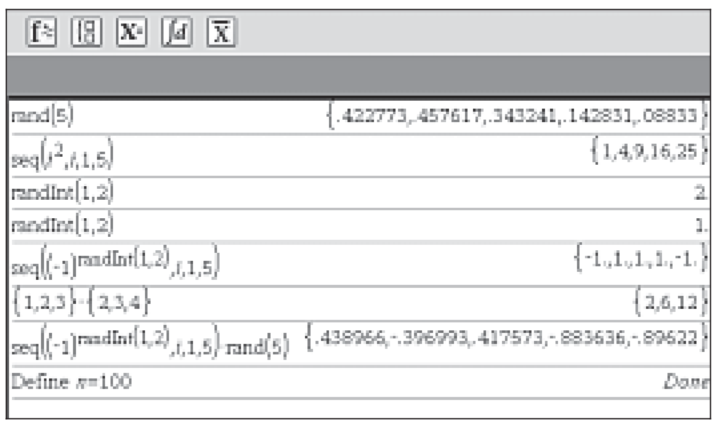
Für die Bearbeitung dieses Problems ist der Umgang mit Zufallszahlen und Listen erforderlich.



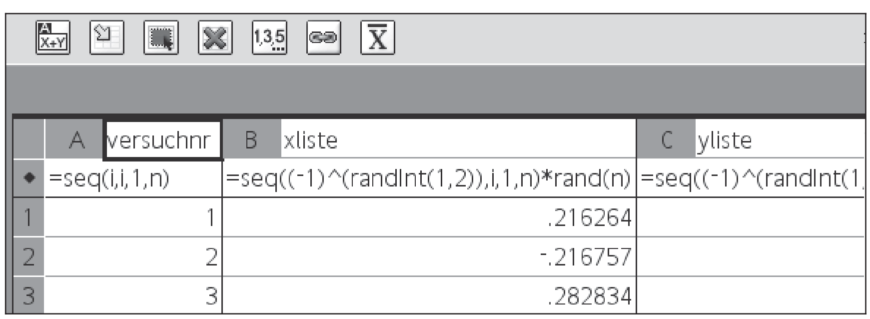
Aus den Punkten des Quadrats wird zufällig ein Punkt ausgewählt. Der Kreis hat den Flächeninhalt π, das Quadrat den Flächeninhalt 4.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällig ausgewählte Punkt im Kreis liegt gleich $\frac{\pi}{4}$. Diese Wahrscheinlichkeit kann durch $\frac{t}{n}$ geschätzt werden. Als Näherungswert für π ergibt sich damit $\pi \approx 4\frac{t}{n}$.

Eine einfache Variante besteht darin, die Zahl der zu simulierenden Zufallstropfen in einer Variablen n festzulegen. Dies geschieht am besten in **Calculator (Zufallszahlen erzeugen)**.



Die Erzeugung der Zufallspunkte sowie die rechnerische Auswertung kann jetzt in **Lists & Spreadsheet** vorgenommen werden. Dabei wird die Variable n verwendet:



In der Spalte A werden die Zahlen von 1 bis n erzeugt. Sie stellen die Nummern der einzelnen Tropfen dar. In Spalten B und C werden, wie zuvor beschrieben, die x- bzw. y-Koordinaten der Zufallstropfen gebildet. Die Spalten D bis G dienen zur Auswertung.

		C yliste	D	E	F	G näher...
◆	*rand(n)	=seq((-1)^	=int(b[]*b[]+c[]*c[])	=cumSum(d[])	=a[]−e[]	=4*(f[]/(a[]))
1	-.857392	-.735525	1.	1.	0.	0.
2	-.976876	-.968159	1.	2.	0.	0.
3	.01862	-.328395	0.	2.	1.	1.33333
4	.695085	.042617	0.	2.	2.	2.
5	-.394852	.159879	0.	2.	3.	2.4

Ein Punkt P(x|y) liegt innerhalb des Einheitskreises wenn die Bedingung $x^2 + y^2 < 1$ erfüllt ist. Um dies von den erzeugten Koordinaten in den Spalten B und C festzustellen, wird in D der ganzzahlige Anteil von $x^2 + y^2$ gebildet. Ist dieser gleich 0, dann liegt der Punkt im Einheitskreis, ansonsten ergibt sich höchstens 1 (genau genommen 2, wenn einer der Eckpunkte des Quadrates getroffen wird, aber das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit 0). Eine 1 in Spalte D bedeutet somit eine Niete, d.h. einen Punkt der außerhalb des Einheitskreises liegt. In Spalte E wird die Spalte D kumuliert (Listen verarbeiten: CumSum). Subtrahiert man diese kumulierten Zahlen von der Versuchsnummer in Spalte A, so erhält man die Zahl der Treffer auf den Einheitskreis (Spalte F).

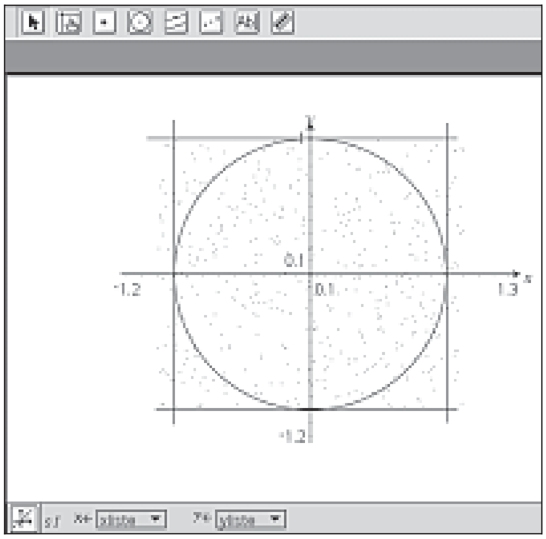
Entsprechend zur Näherungsformel $\pi \approx 4\frac{t}{n}$ werden in Spalte G die Näherungswerte für π gebildet. Die folgende Abbildung zeigt eine Simulation, die 3,24 als Näherungswert nach 100 Tropfen liefert.

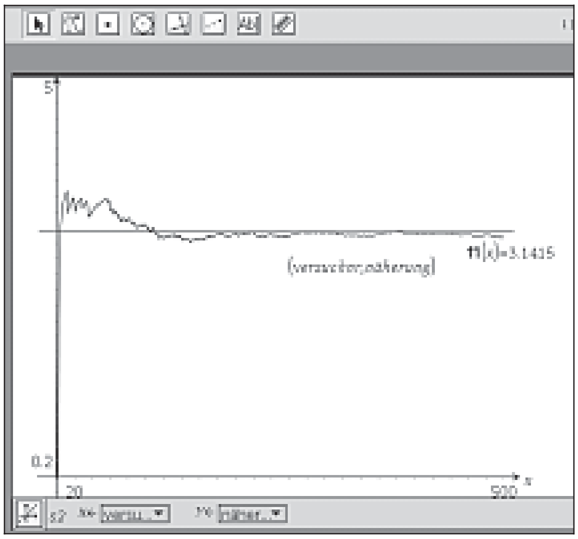
	A v...	B xliste	C yliste	D	E	F	G näher...
◆	=seq(i,i	=seq((-1)^	=seq((-1)^	=int(b[	=cumS	=a[]−e[]	=4*(f[]/(a[]))
91	91	-.492984	.966852	1.	18.	73.	3.20879
92	92	.50544	-.138831	0.	18.	74.	3.21739
93	93	-.369915	-.308839	0.	18.	75.	3.22581
94	94	.567489	-.293936	0.	18.	76.	3.23404
95	95	-.253925	-.852402	0.	18.	77.	3.24211
96	96	.725383	-.961203	1.	19.	77.	3.20833
97	97	-.290447	.284138	0.	19.	78.	3.21649
98	98	-.686723	-.127711	0.	19.	79.	3.22449
99	99	-.527844	.826806	0.	19.	80.	3.23232
100	100	-.023628	-.379535	0.	19.	81.	3.24

Um mit einer größeren Anzahl von Tropfen zu arbeiten, kann der Wert von n geändert werden. Hier ein Ergebnis von 500 Simulationen.

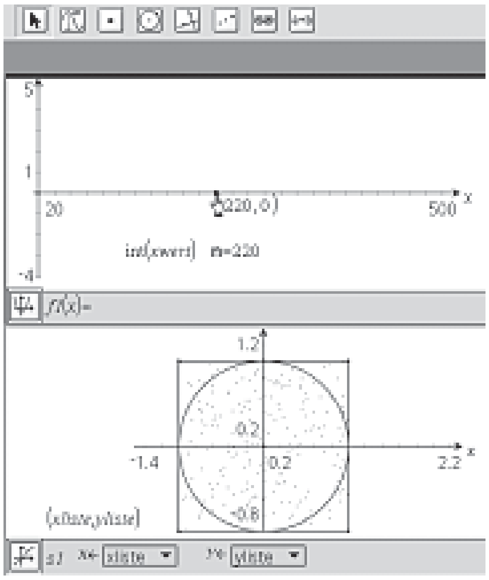
	A (.	B xliste	C yliste	D	E	F	G (...
◆	=seq(i,i	=seq((-1)^	=seq((-1)^	=int(b[	=cumSu	=a[]−e[]	=4*(f[]/
496	496	.236329	-.978738	1.	110.	386.	3.1129
497	497	-.716983	-.81583	1.	111.	386.	3.106...
498	498	.483267	.747398	0.	111.	387.	3.108...
499	499	.088243	-.124865	0.	111.	388.	3.110...
500	500	-.784069	.997454	1.	112.	388.	3.104

Die graphische Darstellung der Simulation kann auf verschiedene Weise geschehen (Listen graphisch darstellen). Eine Möglichkeit besteht darin, die erzeugten Zufallstropfen in die xy-Ebene einzeichnen zu lassen (Siehe nächste Abbildung links). Eine weitere Möglichkeit einer grafischen Darstellung ergibt sich, wenn man die Entwicklung des Näherungswerts für π darstellt. Dazu trägt man die Spalte G über der Spalte A auf (siehe nächste Abbildung rechts):





Folgende Variante der graphischen Darstellung benutzt einen „Schieberegler“, um die Zahl der Regentropfen dynamisch zu verändern.
In einem ersten **Graphs & Geometry** Fenster wird ein Punkt an die x-Achse gebunden und diesem seine Koordinaten zugewiesen. In ein Textfenster wird der Text int(xwert) eingegeben (Funktionen, Ganzzahl). Dieser Wert wird mit der x-Koordinate des zuvor erzeugten Punktes als xwert berechnet. Über das Variablen-Menü (Variablen verknüpfen) wird der berechnete Wert als Variable n gespeichert (Variablen speichern). Bewegt man nun den Punkt auf der x-Achse, dann ändert sich sowohl in der Tabelle als auch in dem zweiten Graphikfenster die Zahl der verwendeten Regentropfen.



Literatur/Quellenangaben

http://de.wikipedia.org/wiki/Regen
B. Grabinger, Stochastik interaktiv mit Derive, bk teachware Nr. SR-29

Didaktischer Kommentar

In der Sekundarstufe I kann man sich dem Problem auch allgemeiner nähern: Wie kann man den Flächeninhalt eines Kreises bestimmen? Die Lernenden werden erfahrungsgemäß viele verschiedene Vorschläge entwickeln, die im Unterricht gewinnbringend verfolgt werden können:

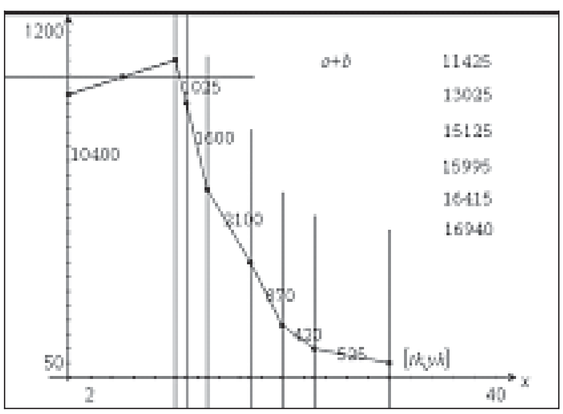
- ausschneiden von Kreisen und wiegen
- annähern der Fläche durch Rechtecke
- …

Methoden, die auf Zufallsprozessen beruhen, erkennen die Lernenden eher nicht als angemessene Methode. Jedoch haben – vor allem bei Simulationen von realen Prozessen – stochastische gegenüber anderen Methoden oft die Nase vorn. Insofern ist es lohnenswert, Schülerinnen und Schülern eine solche Methode exemplarisch vorzustellen. Dabei kann auch ein Blick in aktuelle Forschungen geworfen werden: Wo werden Zufallsmodelle eingesetzt (z. B. bei der Simulation physikalischer Experimente in der Quantenwelt, Analyse wirtschaftlicher Zusammenhänge)? Welche Erkenntnisse kann man aus Ergebnissen ziehen, die auf Zufallsprozessen beruhen, welchen Prognosecharakter kann man ihnen zuschreiben?

Schadstoffemission im Straßenverkehr

Ursula Schmidt, Lünen
Horst Hüllen, Lünen

Wie berechnet man eine Kumulation?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Einführung in die Integralrechnung)
Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können Messdaten durch Regressionskurven modellieren

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- erkunden und mathematisieren Umweltdaten
- wählen ein Werkzeug entsprechend ihrem Lösungsweg
- präsentieren ihren Lösungsweg

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- bestimmen die kumulierte Größe "Gesamtemission"
- interpretieren ihre Ergebnisse innerhalb des Sachkontextes

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Erarbeitung durch direktes Ausmessen
- Numerisch: Berechnungen in einer Tabellenkalkulation

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Gruppenarbeit
- Präsentation mit Plakaten

Schadstoffemissionen im Straßenverkehr

Ozon entsteht aus Stickoxiden und Kohlenwasserstoff unter Einwirkung von Sonnenstrahlung. Um die Ozonkonzentration in der Atmosphäre zu senken, ist es notwendig, diese Vorläufersubstanzen in den Autoabgasen deutlich zu senken.
In einer Broschüre „Mobilität im Jahr 2020“ hat der ADAC unter anderem die folgenden Daten für die jährliche Emission von Kohlenwasserstoffen (HC) veröffentlicht:

Jahr	Emissionsrate in 1000 t pro Jahr
1980	980
1985	1040
1990	1100
1991	950
1993	650
1997	400
2000	180
2003	100
2010	50

Arbeitsaufträge:

Stellen Sie sowohl die Emissionsrate als auch die Entwicklung der Gesamtemission im angegebenen Zeitraum graphisch dar und diskutieren Sie den Verlauf.

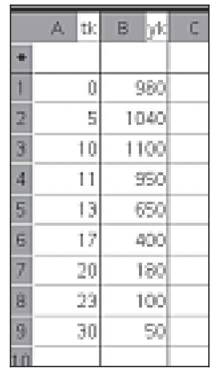
Bedenken Sie dabei u.a.:

- Gründe für die unterschiedlichen Trends
- Deutung der Menge der Gesamtemissionen in bestimmten Zeiträumen
- Größe der Gesamtemissionen im Jahr 2010, wenn sich der erste Trend fortgesetzt hätte
- Einsparungen nach 1990

Im Folgenden wird ein geometrischer Zugang zu diesem Problem beschrieben. Dabei werden die folgenden Aspekte dargestellt

1. Darstellung der Daten in einem Streudiagramm
2. Erklärung für die unterschiedlichen Trends
3. Berechnung der Gesamtemissionen bis 1990 und geometrische Deutung
4. Berechnung der Gesamtemissionen bis 2010, wenn der erste Trend sich fortgesetzt hätte
5. Einsparen der Gesamtemissionsmenge von 1990 bis 2010
6. Graphische Darstellung der Entwicklung der Gesamtemission von 1980 bis 2010

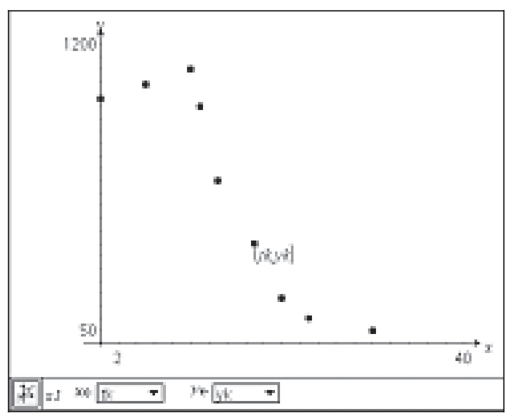
zu 1.
Die Werte werden zuerst in **Lists & Spreadsheet** eingegeben, die Spalten werden mit tk und yk bezeichnet (Listen).



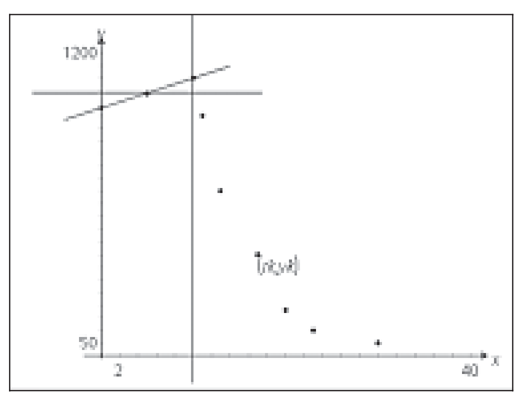
	A tk	B yk	C
◆			
1	0	980	
2	5	1040	
3	10	1100	
4	11	950	
5	13	650	
6	17	400	
7	20	180	
8	23	100	
9	30	50	
10			

Anschließend wechselt man nach **Graphs & Geometry**, stellt die Koordinatenachsen passend ein und zeichnet dann ein Streudiagramm (Listen graphisch darstellen)

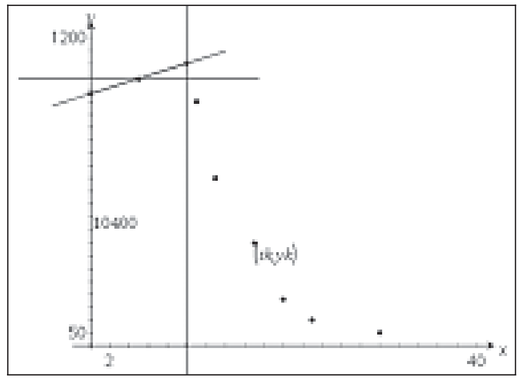
zu 2.
1989 wurden in Deutschland Katalysatoren eingeführt. Bis dahin stieg die Menge der pro Jahr emittierten Schadstoffe, ab 1990 beobachtet man eine deutliche Abnahme der Emissionen.



zu 3.
Die ersten drei Punkte liegen auf einer Geraden. Außerdem wird, um diese erste Phase zu veranschaulichen, eine Parallele zur y-Achse (Linien, besondere) durch den dritten Punkt gezeichnet.



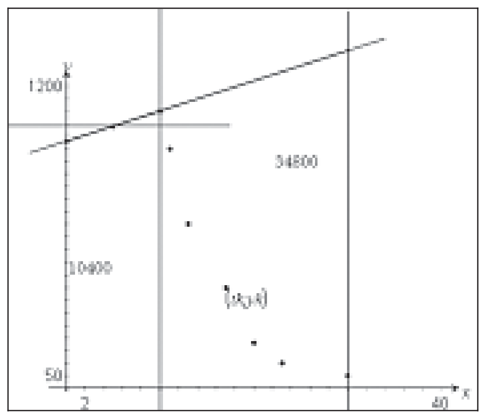
Eine erste Idee zur Berechnung der Gesamtemission könnte sein, mit einem Durchschnittswert auf dem ganzen Intervall zu rechnen, also $1040 \cdot 10 = 10400$. Dies entspricht dem Flächeninhalt des eingezeichneten Rechtecks. Dieser ist aber gleich dem Flächeninhalt des eingezeichneten Trapezes.



Zur Kontrolle kann der Flächeninhalt des Trapezes in **Graphs & Geometry** auch direkt gemessen werden. Dazu muss das Trapez vorher als Polygon markiert werden (Linien, besondere).

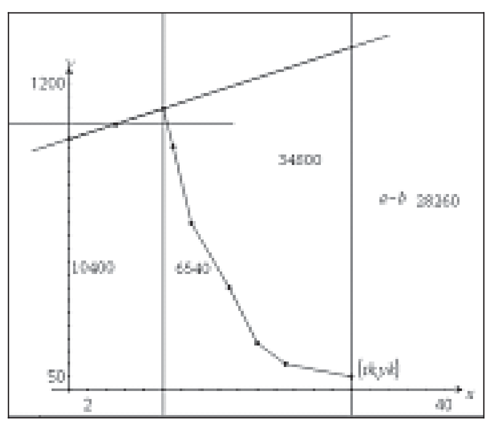
zu 4.
Die Gerade durch die ersten drei Punkte wird verlängert (Geraden), durch x = 30 wird eine Parallele zur y-Achse gezogen (Linien, besondere).

Dann kann man die Idee aus 3. übernehmen und für die Gesamtemissionen bis 2010 die Fläche des großen Trapezes (Polygon) ausmessen: 34800 t.

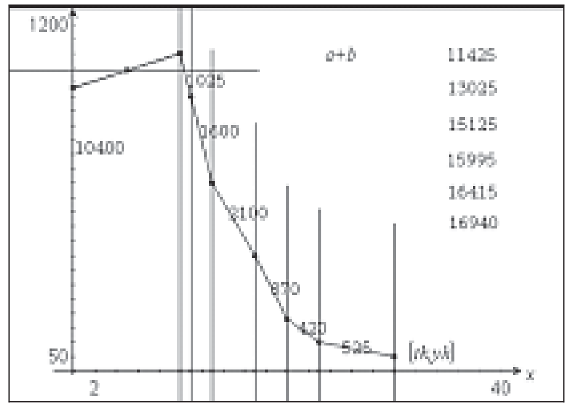


zu 5.
Die einfachste Lösung ist, durch alle Punkte zwischen x = 10 und x = 30 ein Polygon zu zeichnen (Linien, besondere) und dessen Flächeninhalt auszumessen: 6540 t.

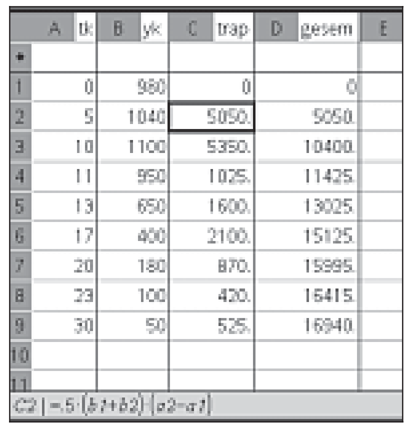
Berechnet wird dann noch die Differenz: Term <u>a–b</u> als Text eingeben und den Wert berechnen (Formeln, Werte einsetzen) mit a = 34800 und b = 6540.
Ergebnis: 28260 t.



zu 6.
Um die Gesamtemissionen zu jedem vorgegebenen Zeitpunkt zu bestimmen, werden Teiltrapeze eingezeichnet (Linien, besondere) und deren Flächeninhalte ausgemessen.
Diese Werte werden dann sukzessive aufaddiert: a+b als wird als Text eingeben, damit wird dann berechnet (Formeln, Werte einsetzen): zuerst die Summe der ersten beiden Trapezflächen, dann jeweils die Summe aus dem letzten Ergebnis und der nächsten Trapezfläche.



Alternativ oder auch ergänzend zu dem beschriebenen geometrischen Vorgehen können die Trapezflächen und die kumulierte Summe der Trapezflächen (Gesamtschadstoffmenge) auch in **Lists & Spreadsheet** bestimmt werden (Listen, Formeln).

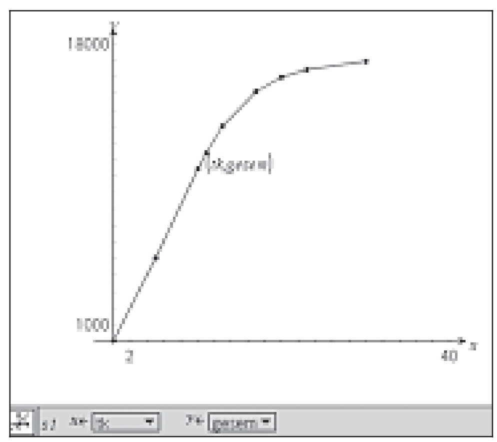


	A tk	B yk	C trap	D gesem	E
•					
1	0	980	0	0	
2	5	1040	5050.	5050.	
3	10	1100	5350.	10400.	
4	11	950	1025.	11425.	
5	13	650	1600.	13025.	
6	17	400	2100.	15125.	
7	20	180	870.	15995.	
8	23	100	420.	16415.	
9	30	50	525.	16940.	
10					
11					

C2 | =.5·(b1+b2)·(a2−a1)

In d2 steht die Formel: = d1 + c2.
Die Zellen unter c2 und d2 werden durch Kopieren ausgefüllt (Formeln kopieren).

Um die Entwicklung der Gesamtemissionen auch graphisch zu veranschaulichen, wird ein Streudiagramm (Punkteplot) zu den Spalten A (tk) und D (gesem) der Tabelle angefertigt (Listen, graphisch darstellen).



(Unter Attribute lassen sich die einzelnen Punkte eines Diagramms mit Streckenzügen verbinden.)

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe kann als Einführungsbeispiel für die Integralrechnung verwendet werden. Sie betont den Aspekt der Kumulation, da auch der Kontext so gewählt ist, dass sich in der Umwelt etwas "ansammelt".

Der Datensatz ist so gestaltet, dass die Schülerinnen und Schüler an Hand der Fragen eigene Lösungswege finden können. Natürlich lässt sich die Aufgabenstellung durch Zusätze wie „Wählen Sie t = 0 für das Jahr 1980.“ vereinfachen. Bei der Bearbeitung der ersten drei Teilfragen wird eine graphische Deutung der Gesamtemission entwickelt. Die Aufgabe lässt sich nun wie vorgestellt eher geometrisch lösen, genauso ist es aber auch möglich die Rechnungen in der Tabellenkalkulation vorzunehmen.

Für die Unterrichtsorganisation bietet sich Gruppenarbeit an, da die Lernenden hier zunächst einmal ihre eigenen Ideen diskutieren können. Die Aufgabe zur Schadstoffemission steht exemplarisch für eine ganze Reihe von Aufgaben, in denen aus Messdaten der Änderungsrate ein Gesamtbestand ermittelt werden soll (z.B. Zufluss-/ Abflussrate, Geschwindigkeit, Abbau von Amalgam, Wachstumsrate bei Kindern, …). Diese Aufgaben lassen sich analog behandeln.

Spannend ist nun eine arbeitsteilige Gruppenarbeit, in der jede Gruppe ein anderes Problem bearbeitet. Die einzelnen Gruppen dokumentieren anschließend ihre Aufgaben und Lösungswege auf Plakaten. Die Präsentation erfolgt in einem Museumsgang (gallery tour). Die gemeinsame Struktur der unterschiedlichen Kontexte und Lösungswege wird den Schülern deutlich und führt zu einer Vorstellung der Begriffe "Kumulation" / "Integration".

Die Aufgabe lässt sich auch wieder aufgreifen, wenn den Lernenden der Hauptsatz der Integralrechnung zur Verfügung steht. Dann bekommt sie einen anderen Schwerpunkt: nämlich, dass die Messdaten ab 1990 durch unterschiedliche Funktionen modelliert werden können und die Gesamtemission mit Hilfe des Hauptsatzes als Integral über die jeweilige Modellierungsfunktion berechnet werden kann. Von den Schülern wird dann auch eine Beurteilung ihres gewählten Modells erwartet.

Literatur/Quellenangaben

Diese und weitere Beispiele finden sich z.B. unter: www.sinus.nrw.de .
Bildquelle: http://analysis.math.uni-duisburg.de/mowo2002/Themen/verkehrsstau.htm

Auszug aus einer Klausuraufgabe zur "Schadstoffemission"

(Hier wird der Schwerpunkt auf unterschiedliche Modellierungen des Datensatzes gelegt.)

Die Entwicklung der HC-Emissionen ab 1990 soll durch eine Funktion modelliert werden. Dazu wird ein neues Koordinatensystem so gewählt, dass x = 0 dem Jahr 1990 entspricht, x = 1 dem Jahr 1991 usw.

1. Experte A hat sich für die ganzrationale Funktion
   $f(x) = -\frac{21}{160} \cdot \left(x^3 - 60x^2 + 1200x - 8400\right)$ entschieden.

1.1 Zeichnen Sie auf Ihrem Rechner den Punkteplot der Messwerte und den Graphen von f. Beurteilen Sie, ob f eine sinnvolle Annäherung an die Messwerte darstellt.

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass f bei x = 20 einen Sattelpunkt hat. Wie könnte man dieses Verhalten inhaltlich deuten?

1.3 Ermitteln Sie mit Hilfe von f die Gesamtmenge der emittierten Schadstoffe im Zeitraum von 1990 bis 2010.

2. Experte B möchte für die jährliche Schadstoffemission ab 1990 lieber eine Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ wählen.

2.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b durch eine exponentielle Regression.

2.2 Wann hat sich die Schadstoffmenge gegenüber 1990 halbiert (Monat und Jahr)?

2.3 Zeigen Sie: Dieser Zeitraum ist unabhängig von der Schadstoffmenge im Jahr 1990.

3. Sie sollen eine Prognose für die Menge der Kohlenwasserstoffemissionen im Jahr 2015 abgeben. Welches der beiden Modelle A oder B ist dafür geeigneter? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe „Porsche“

In einem Autotest wurden folgende Daten zur Beschleunigung eines Porsche angegeben:

Zeit x in s	0	2,1	3,9	5,4	7,1	8,8	10,5	17,4
Geschwindigkeit in km/h	0	50	100	130	160	180	200	250

Wie lang ist die Fahrstrecke, bis die 250 km/h erreicht sind?

a) Zeichnen Sie den Punkte-Plot zum Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm.

b) Berechnen Sie annähernd die zurückgelegte Wegstrecke, indem Sie
   - Rechtecksflächen und/oder
   - Trapezflächen

   einzeichnen, deren Flächeninhalte messen und sukzessive aufaddieren.
   (Das geht alles noch in **Graphs & Geometry**.)

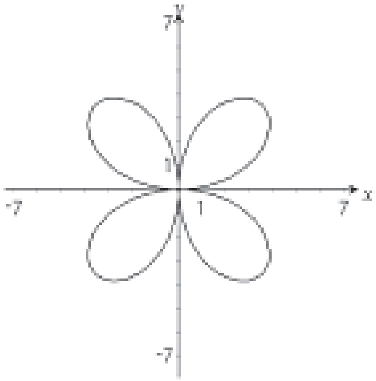
c) Bestimmen Sie zu den Punkten eine Regressionsfunktion und zeichnen Sie den Graphen.
   Berechnen Sie im **Calculator** Unter- und Obersummen.

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial

Die rutschende Leiter

Dieter Eichhorn, Neunkirchen

Auf welcher Kurve bewegt sich ein Punkt auf der Leiter, wenn diese rutscht?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I (parametrisierte Kurven)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- kennen trigonometrische Funktionen
- evtl: kennen Kreisgleichung, Ellipsengleichung

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren ein geometrisches Problem
- analysieren und strukturieren verschiedene geometrische Sachverhalte

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- entwickeln parametrisierte Kurven als Ortslinien

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Geometrisch: Aufnehmen der Ortslinien
- Numerisch: Erstellen einer Tabelle für die Koordinaten eines Leiterpunktes
- Graphisch: Darstellen von parametrisierten Kurven

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
In Partner- oder Gruppenarbeit können die Formen der Kurve, evtl. auch die Kreisgleichung herausgefunden werden; Ellipsengleichung und b) benötigen Lehrerunterstützung

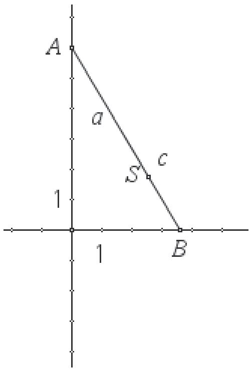
Die rutschende Leiter

Eine Leiter rutscht an einer senkrechten Wand hinunter.

a) Auf welcher Kurve bewegt sich eine Sprosse, die sich auf der Leiter befindet?
Wie lassen sich die verschiedenen Kurven mathematisch beschreiben? Gibt es Spezialfälle?

b) Betrachtet den folgenden Spezialfall: Betrachte die Sprosse, deren Abstand zum „Fuß“ der Hauswand am kleinsten ist. Sie wird durch den Punkt L auf der Strecke AB dargestellt. Unabhängig von der Lage der Leiter soll der Abstand des Punktes L zum Ursprung des Koordinatensystems immer am kleinsten sein.
Welche Kurve entsteht dann?

Geht bei euren Betrachtungen von folgendem mathematischen Modell aus:



A und B seien die Endpunkte der Leiter, die die Länge c hat.
A und B sind so gewählt, dass sie auf der y- bzw. x-Achse eines Koordinatensystems liegen.
Der Punkt S steht für die „Sprosse“, liegt also auf $\overline{AB}$.

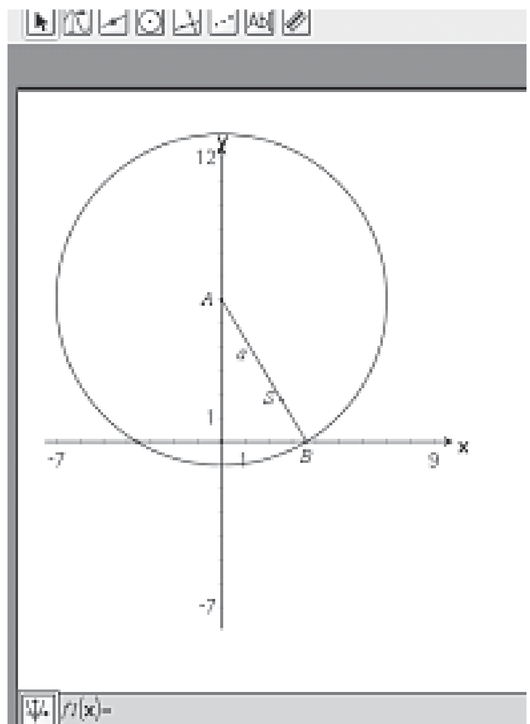
Mögliche Lösungswege und –schritte:

- Geometrisch-experimentell (enaktiv): Papierstreifen als Modell der Leiter gleitet an einer Schiene hinunter, Aufzeichnen der Ortskurve mit einem Stift
- Geometrisch-experimentell (ikonisch): Zeichnen mehrerer Leiterpositionen, Markieren des Punktes S
- Geometrisch-konstruktiv: Konstruktion in TI-Nspire™ CAS, Aufzeichnen der Spur bzw. Darstellen der Ortslinie von S und L (Geometrischer Ort, erzeugen)
- Numerisch-experimentell: Übertragen der Koordinaten von S und L in eine Tabelle (Werte, sammeln und in Tabelle übertragen) und Untersuchen des algebraischen Zusammenhangs
- Algebraisch-graphisch: Herleiten des Zusammenhangs zwischen den Koordinaten von S bzw. L und dem Anlehnwinkel α, Darstellung der Ortslinien als parametrisierte Kurven (Graph, einer Funktion in Parameterdarstellung)

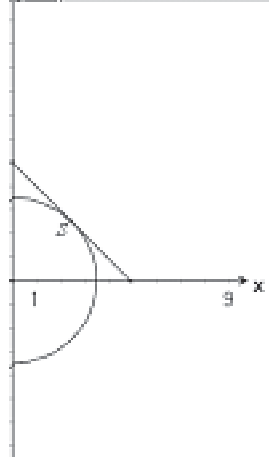
Im Folgenden werden der geometrisch-konstruktive, der numerisch-experimentelle und der algebraisch-graphische Lösungsweg unter Verwendung des TI-Nspire™ CAS beschrieben.

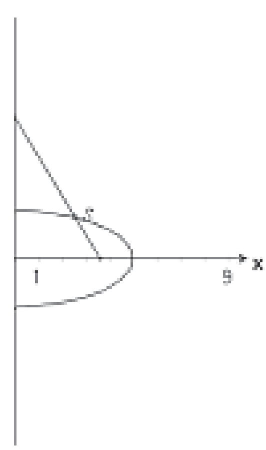
Zu a)
Die Grundfigur wird in **Graphs & Geometry** konstruiert:

- Punkt A auf y-Achse
- Kreis um A mit vorgegebenem Radius, der die positive x-Achse in B schneidet (Linien, besondere)
- Strecke $\overline{AB}$ (Linien, besondere)
- Punkt S auf Strecke $\overline{AB}$ (Spezialfall: (Punkt, Mittelpunkt)
- Ausblenden aller störenden Hilfslinien (Objekte (graphische), verstecken)



Die Ortslinie von S bei Bewegung von A auf der y-Achse wird aufgenommen (Geometrischer Ort, erzeugen).
Für den Spezialfall, dass S in der Mitte der Leiter liegt, ergibt sich ein Kreis, ansonsten für einen beliebigen Punkt S auf der Leiter eine Ellipse.





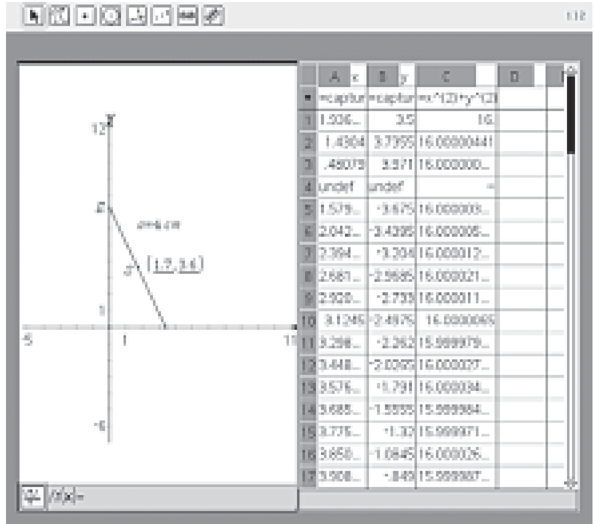
Die Koordinaten von S werden in **Lists & Spreadsheet** übertragen.

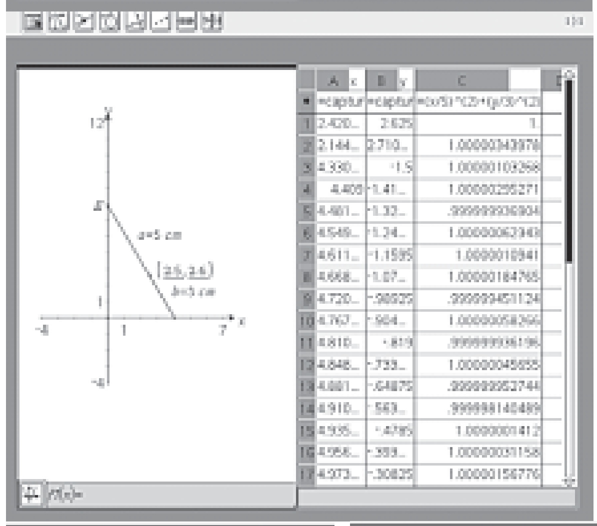
In Fall, dass S in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ liegt, erfüllen die Koordinaten von S die Kreisgleichung.

$x^2 + y^2 = r^2$ (mit $r = \frac{c}{2}$)

Ansonsten erhält man die Ellipsengleichung

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (dabei ist $b = c - a$).

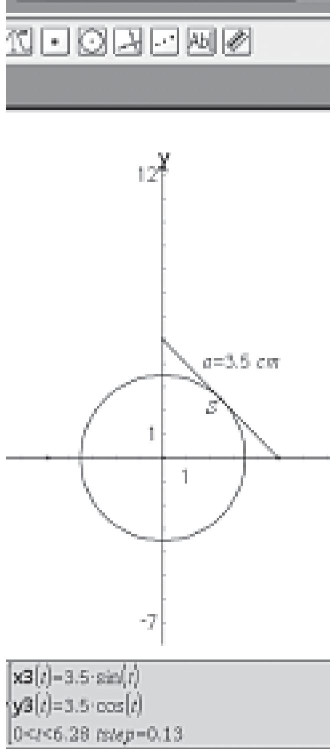


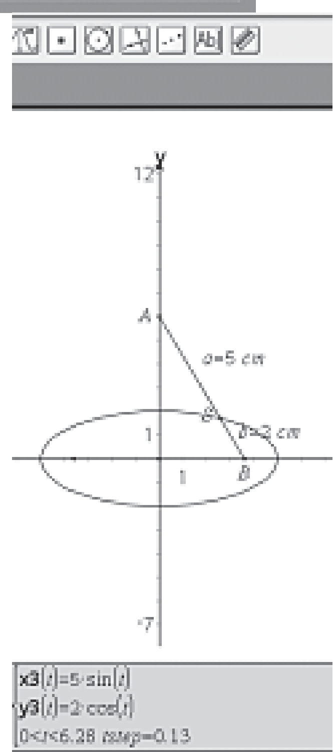


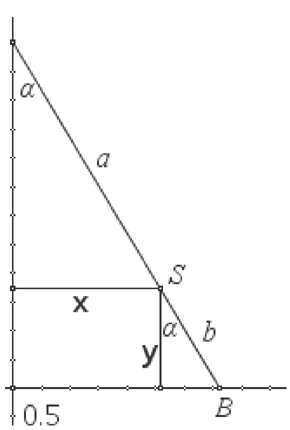
Darstellung der Kurven:
In **Graphs & Geometry** lassen sich der Kreis bzw. die Ellipse auch als Kurven in Parameterdarstellung definieren und zeichnen. (Graph, einer Funktion in Parameterdarstellung)
Dazu werden die Koordinaten von S in Abhängigkeit vom Anlehnwinkel α ausgedrückt:

$x(\alpha) = a \cdot \sin(\alpha)$

$y(\alpha) = b \cdot \cos(\alpha)$



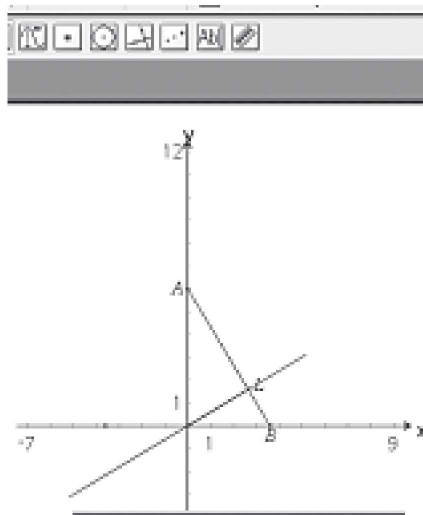




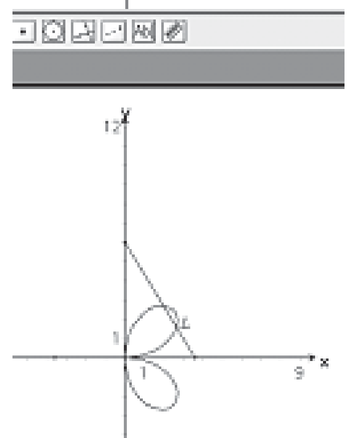
Zu b)

Die Grundfigur wird in **Graphs & Geometry** wie oben konstruiert (Strecke $\overline{AB}$). Dann:

- Senkrechte zu $\overline{AB}$ durch Ursprung (Linie, besondere - Senkrechte)
- Lotfußpunkt L als Schnittpunkt der Senkrechten mit $\overline{AB}$ (Punkt, Schnittpunkt)



Die Ortslinie von L bei Bewegung von A auf der y-Achse ist eine Rosette (Geometrischer Ort, erzeugen).

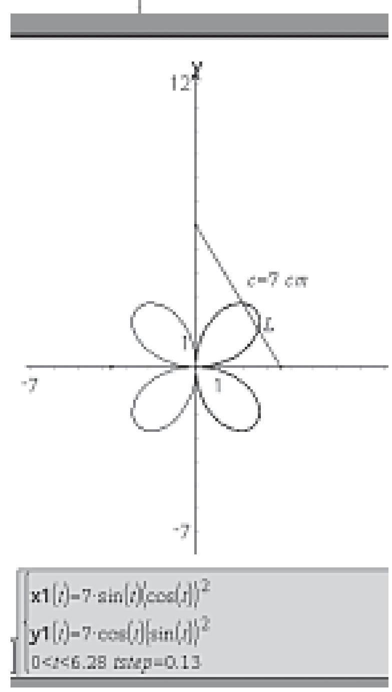


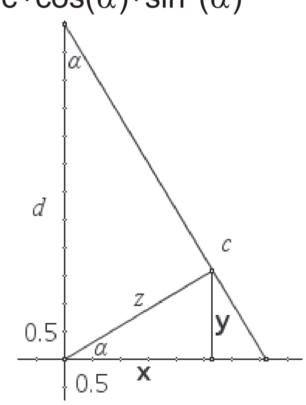
In **Graphs & Geometry** wird die Kurve in Parameterdarstellung definiert und gezeichnet (Graph, einer Funktion in Parameterdarstellung). Dazu werden die Koordinaten von S in Abhängigkeit vom Anlehnwinkel α ausgedrückt:

$$x(\alpha) = z \cdot \cos(\alpha)$$
$$y(\alpha) = z \cdot \sin(\alpha)$$

Mit $z = d \cdot \sin(\alpha)$ und $d = c \cdot \cos(\alpha)$ ergibt sich:

$$x(\alpha) = c \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)$$
$$y(\alpha) = c \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha)$$





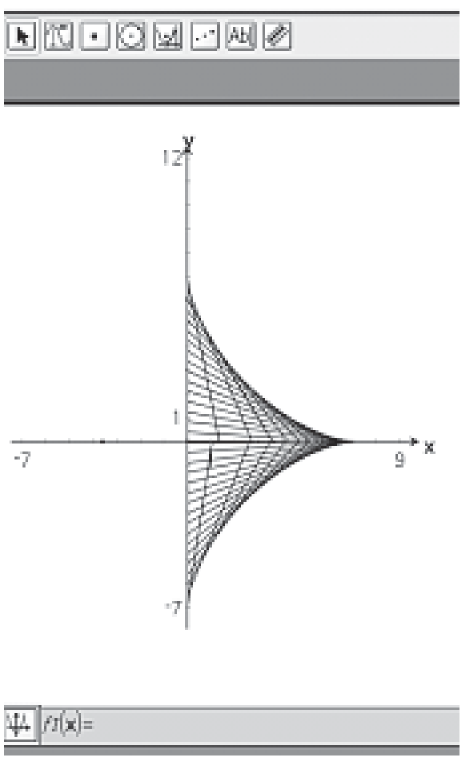
Besonders reizvoll an der Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst experimentell mit einfachen Mitteln die Situation durchspielen können. Die Problembehandlung erfolgt also in der didaktisch sinnvollen Reihenfolge enaktiv – ikonisch – symbolisch.
Die Erkenntnis, dass es bei a) einen Spezialfall gibt, wenn S der Mittelpunkt der Strecke ist, wird wohl erst am Computer erkannt, da dies der Punkt ist, wo die Ellipse von der gestreckten Form zur y-Achse zur gestreckten Form zu x-Achse übergeht.

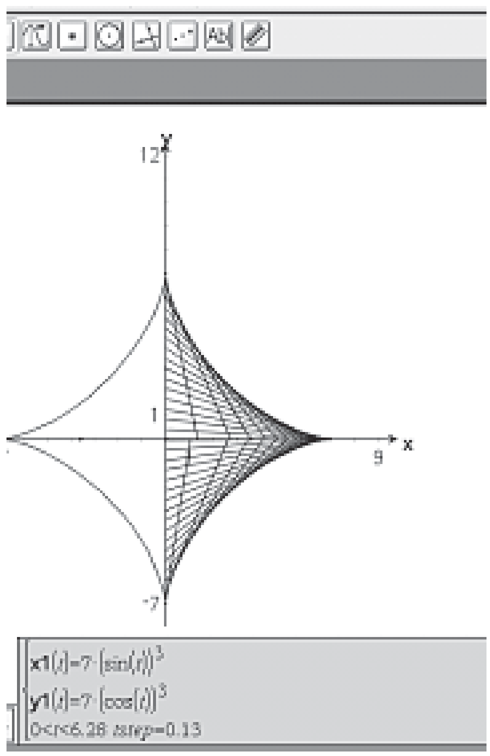
Der enaktive Zugang erleichtert auch das Verständnis des grundlegenden Unterschieds zwischen a) und b). Bei a) ist der Punkt absolut fest auf der Leiter und bei b) nur seine relative Lage. Für Fall b) mag das Nachvollziehen der Kurvenform erleichtert werden durch die Überlegungen, welche extremen Positionen für den Punkt S möglich sind (Leiter steht bündig an der Wand bzw. liegt flach auf dem Boden).

Der Übergang von der geometrischen Konstruktion zur numerischen Betrachtung in einer Tabelle und die abschließende Erweiterung auf die algebraische Darstellung als parametrisierte Kurven wird durch TI-Nspire™ CAS optimal unterstützt.

Mögliche Erweiterung:

Interessant ist es auch, die Spur der gesamten Leiter bei Bewegung des Punktes A auf der y-Achse zu betrachten. Dies kann wieder zunächst mit einem Papierstreifen als Leitermodell bzw. durch eine Zeichnung und dann mit dem TI-Nspire™ CAS genauer untersucht werden. Als Einhüllende der Leiterpositionen ergibt sich eine Astroide.



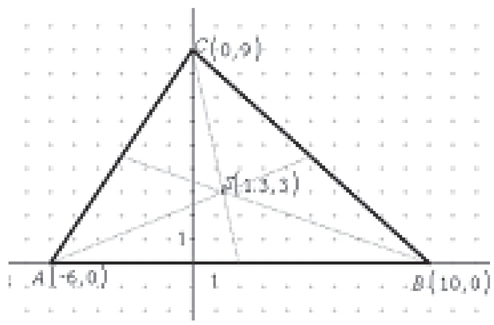


Literatur/Quellenangaben

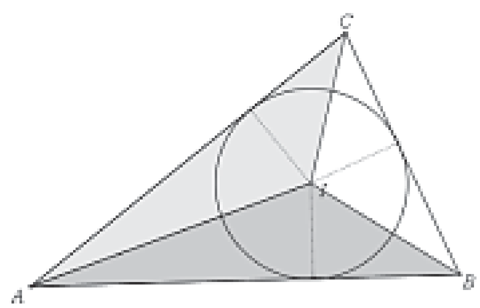
Foto: D. Eichhorn

Entdeckungen am Dreieck

Hildegard Urban-Woldron, Pressbaum, Österreich



Schwerpunkt und Inkreis: Welche Besonderheiten haben sie?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I (Geometrie)
Dauer: 2 - 4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können den Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt eines Dreiecks konstruieren
- haben grundlegende Werkzeugkompetenz

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- analysieren geometrische Zusammenhänge
- stellen Vermutungen auf,
- falsifizieren bzw. verifizieren und begründen die Vermutungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler erkennen und begründen
- besondere Eigenschaften der Schwerpunkt-Koordinaten und das Teilungsverhältnis der Schwerlinien (bzw. Seitenhalbierenden) durch den Schwerpunkt
- den proportionalen Zusammenhang zwischen Inkreisradius und Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Konstruieren
- Visualisieren
- Messen
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Vermutungen aus graphischen Darstellungen ziehen
- Numerisch: Geometrisch vermutete Zusammenhänge numerisch überprüfen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Partner- oder Gruppenarbeit, anschließende Besprechung im Klassenverband

Entdeckungen am Dreieck

1. Besondere Eigenschaften des Schwerpunkts

Ihr sollt die besonderen Eigenschaften der Schwerpunkt-Koordinaten erkunden und eine allgemeine Vermutung aufstellen. Versucht dabei auch herauszufinden, in welchem Verhältnis der Schwerpunkt die Schwerlinien teilt.

Dabei können euch die folgenden Spezialfälle bei einem gleichschenkligen Dreieck ABC helfen. Überlegt euch jeweils mögliche Begründungen für die besonderen Eigenschaften der Schwerpunkt-Koordinaten.

a) A und B liegen auf der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung.
Wählt den Punkt C so, dass seine y-Koordinate ein Vielfaches der Zahl 3 ist. Verändert die Lage von C. Was fällt euch auf?

b) A und B liegen auf der x-Achse. Wählt den Punkt C so, dass seine y-Koordinate ein Vielfaches der Zahl 3 ist und fest ist. Verändert die x-Koordinate von C. Was fällt euch auf?

c) A und B liegen nicht auf der x-Achse, aber symmetrisch zur y-Achse.
Wählt nun C wieder auf der y-Achse, wobei die y-Koordinate ein Vielfaches der Zahl 3 sein soll. Variiert nun die x- und y-Koordinaten der Punkte A und B. Was fällt euch auf?

Überprüft eure Vermutungen an einem beliebigen Dreieck.

2. Besondere Eigenschaften des Inkreisradius

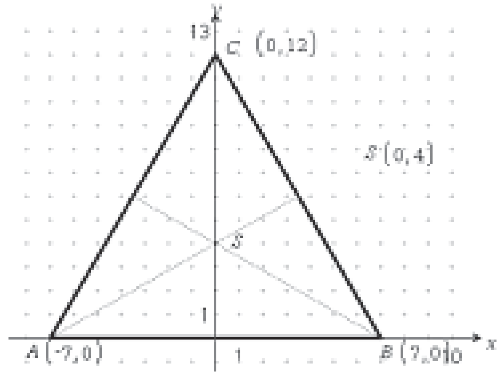
Konstruiert ein beliebiges Dreieck und zeichnet den Inkreis.
Verbindet den Inkreismittelpunkt mit jedem Eckpunkt des Dreiecks.
Untersucht den Zusammenhang zwischen Inkreisradius und Flächeninhalt des Dreiecks.
Nutzt dazu auch die Tabellenkalkulation, in der ihr für verschiedene Dreiecke sowohl die Längen der Seiten, den Flächeninhalt und auch den Inkreisradius eintragen könnt.

Was fällt euch auf? Überlegt mögliche Begründungen.

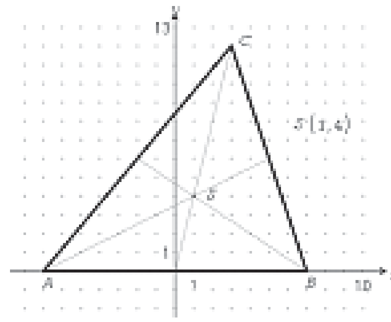
Benötigte Befehle zur Konstruktion der Dreiecke: Punkt; Linien, besondere; Koordinaten bestimmen; Punkt, Mittelpunkt; Messen, Flächeninhalt

Zu 1) Besondere Eigenschaften des Schwerpunkts

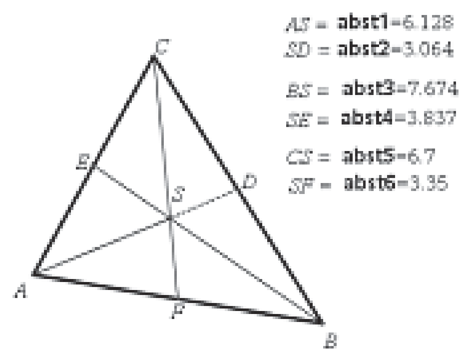
a) Aufgrund der besonderen Lage des Ausgangsdreiecks erkennt man, dass die y-Koordinate des Schwerpunkts immer ein Drittel der y-Koordinate des Punkts C ergibt. Aus Symmetrieüberlegungen ist einsichtig, dass der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen muss.



b) Durch Verändern der x-Koordinate des Punktes C kann man herausfinden, dass sich für die x-Koordinate des Schwerpunkts (bei sonst unveränderten Lagen der Punkte A und B) immer dann ein ganzzahliger Wert ist, wenn die x-Koordinate des Punktes C durch 3 teilbar ist.



Bei c) kann die Vermutung auch bzgl. des Teilungsverhältnisses (1:3) bereits bestätigt werden.



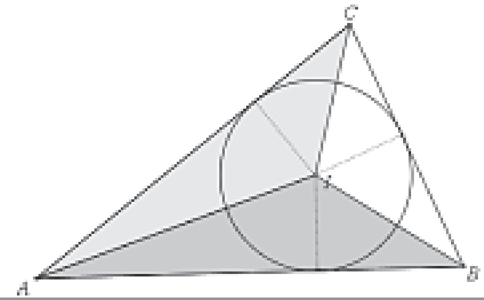
Bei einem numerischen Zugang können die Koordinaten in eine Liste übertragen (Werte, sammeln und in Tabelle übertragen) und verglichen werden.

	A	B	C	D	E	F	G	H
♦	=erfass	=erfass		=erfass	=erfass		=erfass	=erfass
1	6.800...	4.400...		9.098...	4.549...		6.9602	3.4801
2	7.340...	3.670...		6.871...	3.435...		7.363...	3.681...
3	6.368...	3.184...		8.1172	4.0586		8.055...	4.027...
4	7.803...	3.901...		10.33...	5.169...		6.749...	3.374...

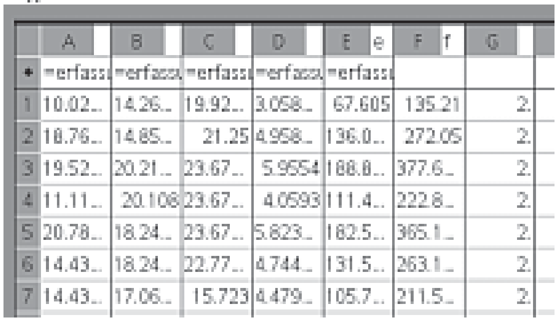
Alle diese Zugänge können bei einem Besprechen der Ergebnisse im Klassenverband hilfreich sein, um das Verstehen der Zusammenhänge zu erleichtern.

Zu 2) Zusammenhang zwischen Inkreisradius und Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks.

Auch hier ist eine Mischung aus geometrischem und numerischem Lösungsweg denkbar.
Zunächst wird das Dreieck konstruiert:
Nötige Befehle:
Linien, besondere, Punkt, Mittelpunkt;
Schraffieren der unterschiedlichen Flächen
(Attribute, verändern)



Die Längen der Dreieckseiten, der Inkreisradius werden erfasst und können in eine Tabelle in **Lists & Spreadsheet** übertragen werden. (Werte, sammeln und in Tabelle übertragen).



	A	B	C	D	E e	F f	G
◆	=erfass	=erfass	=erfass	=erfass	=erfass		
1	10.02...	14.26...	19.92...	3.058...	67.605	135.21	2.
2	18.76...	14.85...	21.25	4.958...	136.0...	272.05	2.
3	19.52...	20.21...	23.67...	5.9554	188.8...	377.6...	2.
4	11.11...	20.108	23.67...	4.0593	111.4...	222.8...	2.
5	20.78...	18.24...	23.67...	5.823...	182.5...	365.1...	2.
6	14.43...	18.24...	22.77...	4.744...	131.5...	263.1...	2.
7	14.43...	17.06...	15.723	4.479...	105.7...	211.5...	2.

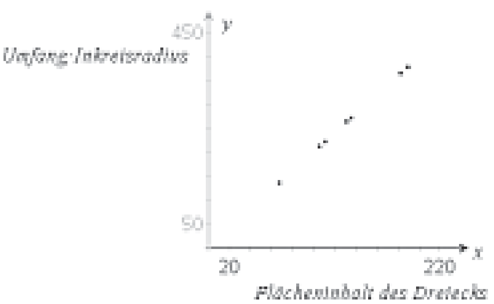
Hier sind die Seiten des Dreiecks in den Spalten A, B und C, der Inkreisradius in Spalte D. Der Flächeninhalt ist hier in Spalte E geschrieben.

In der Spalte F steht folgende Formel:

F1 = (A1+B1+C1) * D1

(Formeln, eingeben)

Ziel ist es, dass die Lernenden erkennen, dass der Inkreisradius r aus der Formel $r = \frac{A}{s}$ berechnet werden kann. A ist der Flächeninhalt des Dreiecks und s der halbe Umfang. Wenn r daher mit s multipliziert wird, ergibt sich 2A.
Oder anders ausgedrückt: Für jedes beliebige Dreieck sind der Flächeninhalt und das Produkt aus Umfang und Inkreisradius zueinander proportional. Diesen Zusammenhang kann man auch graphisch darstellen.
(Listen, graphisch darstellen)



Algebraisch kann der Beweis folgendermaßen geführt werden:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + \frac{1}{2}\cdot b\cdot r + \frac{1}{2}\cdot c\cdot r = \frac{1}{2}\cdot r\cdot (a+b+c) = \frac{1}{2}\cdot r\cdot U_{\Delta ABC}$$

Die hier vorgestellten Erkundungen am Dreieck sind exemplarisch zu verstehen und können auf viele verschiedene Aspekte nicht nur bei der Dreiecksgeometrie übertragen werden.
Idee ist, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig innermathematische – hier geometrische – Zusammenhänge entdecken.
Die Möglichkeiten und das Arbeiten mit der Technologie kann die Lernenden zu weiteren, vor allem eigenen Fragestellungen anregen. Sie können im Sinne einer experimentellen Arbeitsweise tätig werden, da sie beobachten, Vermutungen aufstellen, diese überprüfen und versuchen, sie zu begründen.

Die Aufgabenstellungen folgen dem Ziel, eine Balance zu finden zwischen maximaler Eigenständigkeit und gezielter Vermittlung. Es werden zwar mögliche Schritte vorgegeben, aber die Fragen letztlich offen gehalten. Dadurch soll dem Ziel entsprochen werden, verschiedenen Leistungsniveaus gerecht zu werden. Eine Berechnungsformel für die Koordinaten des Schwerpunkts eines Dreiecks lässt sich sicher bei nahezu allen Schülerinnen und Schülern erreichen. Für das Herausfinden des Teilungsverhältnisses der Schwerlinien sind erfahrungsgemäß nicht viele Anleitungen erforderlich. Diese explorative Arbeit ist aber eine wichtige Ausgangsbasis und Vorbereitung für die analytische Behandlung dieser Fragestellung in der Sekundarstufe II.

Die Formel für den Inkreisradius eines Dreiecks soll nicht nur gefunden werden, sondern auch fundiert begründet werden. Die Lernenden sollen sich algebraisch mit der Fragestellung beschäftigen und verstehen, dass eine geometrische Veranschaulichung nicht direkt einen Beweis ist.

Die Lehrperson sollte in jedem Fall beratend einschreiten, wenn die Arbeitsgruppen nicht weiterkommen. Dazu können z. B. in 1a) Hilfefragen wie „Warum ändert sich die x-Koordinate des Schwerpunkts nicht?“. „Hast du eine Erklärung dafür, warum die x-Koordinate des Schwerpunkts für diese besondere Lage des Dreiecks immer den Zahlenwert Null hat?“ u. ä. , gestellt werden.

Generell kann auch ein Hinweis, die numerischen Werte zu in **Lists & Spreadsheet** zu betrachten manchen Schülerinnen und Schülern weiterhelfen, die geometrisch die Zusammenhänge nicht so leicht erfassen. Darin liegt gerade der Vorteil des TI-Nspire™ CAS: Verschiedene Zugänge und Wege – sowohl geometrisch als auch numerisch – sind möglich. Insofern können die Lösungshinweise mit den verschiedenen Ansätzen als Anregung dienen, das Besprechen der Ergebnisse im Klassenverband vielfältig und variantenreich zu gestalten.

Die im Zusatzmaterial angeführten Fragestellungen sind hauptsächlich als Erweiterungs- und Vertiefungsmöglichkeiten für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler. Zudem bieten die Anregungen Möglichkeiten zur Weiterarbeit, für alle Schülerinnen und Schüler, die sich damit über den Unterricht hinaus beschäftigen wollen. So kann eine eigenständige Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten gefördert werden.

Vertiefungen und Erweiterungen

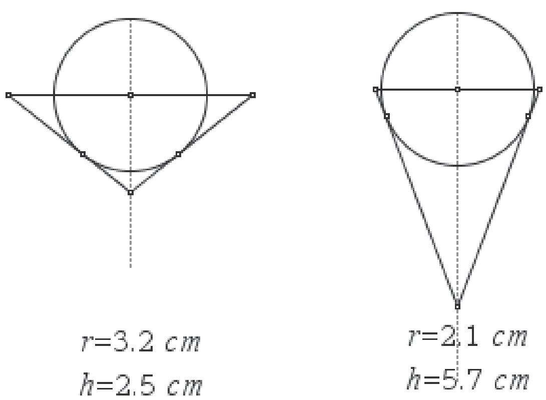
Untersuche auch die beiden anderen besonderen Punkte des Dreiecks und versuche Regelmäßigkeiten und Gesetzmäßigkeiten zu entdecken!

- Kannst du eine allgemeine Aussage darüber machen, wo der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegt? Vergleiche mit dem Schwerpunkt und dem Inkreismittelpunkt?
- Untersuche auch besondere Dreiecke!
- Was fällt dir auf, wenn du alle vier besonderen Punkte in einem Dreieck einzeichnest? Erzeuge mehrere Screenshots für verschiedene Dreiecke.
- Schau dir auch die Lagebeziehung der Punkte H, S und U genau an! Hast du eine Vermutung? Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen!
- Wie liegen die besonderen Punkte, wenn das Dreieck rechtwinkelig, gleichschenklig oder gleichseitig ist?
- Kannst du eine allgemeine Aussage für spitzwinkelige bzw. Für stumpfwinkelige Dreiecke machen?

Das Cornetglacé als Extremalproblem

Michael Roser, Zürich, Schweiz

Wie könnte das Cornet optimiert werden?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I / II (Stereometrie)

Dauer: 2-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:

Schülerinnen und Schüler

- kennen den Satz des Pythagoras, Ähnlichkeitsbeziehungen, Oberflächen- und Volumenberechungen
- können Gleichungssysteme lösen und funktionale Abhängigkeiten daraus ableiten
- können einfache Extremalprobleme strukturieren und lösen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:

Schülerinnen und Schüler können

- bekannte Lösungsstrategien vertiefen und erweitern
- elektronische Hilfsmittel zur Visualisierung und zur Entlastung des Rechenaufwandes nutzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:

Schülerinnen und Schüler können

- geometrische Zusammenhänge analysieren
- die funktionale Abhängigkeiten variabler Größen ableiten
- Resultate interpretieren

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):

- Konstruieren
- Visualisieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:

- Graphisch und numerisch: Konstruktion und Messung der Größen
- Graphisch und algebraisch: Formulierung der geometrischen Bedingungen mittels Gleichungssystem und Ableiten der Funktion mit entsprechenden Variablen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:

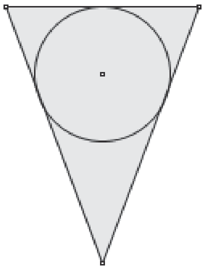
- Die Einheit ist zur Übung und Vertiefung im Unterricht vorgesehen. Dabei sollten die Lernenden, wo immer möglich, selbständig und individuell den Lösungsweg entwickeln. Die Lehrperson sollte vor allem beratend Einfluss nehmen.

Das Cornetglacé als Extremalproblem

Wer hat sich nicht schon geärgert, wenn im Sommer das schmelzende Glacé über den Rand des Cornets läuft?

Ob Produzent oder Konsument, je nach Standpunkt werden Parameter gewichtet, die zu unterschiedlichen Extremalproblemen führen.

Idealisiert wird angenommen, dass der Hersteller Glacé-Kugeln, die gefroren sind und einen Durchmesser von 4 cm haben, in Cornets abfüllt.



Problemstellung des Produzenten:

1. Der Produzent möchte die Kosten minimieren und will deshalb wissen, welche Cornethöhe gewählt werden muss, um den Verbrauch an Verpackungsmaterial (Cornet mit Deckel) zu minimieren? Wie groß ist der minimale Flächeninhalt der Verpackung eines Cornetglacés?

2. Wie ändert sich die Situation, wenn auf den Deckel verzichtet wird? Wie groß ist dann die optimale Höhe und der minimale Mantelflächeninhalt eines Cornets?

Problemstellung des Konsumenten:

Für den Konsumenten ist das Volumen der Cornet-Waffel wichtig: Es sollte gerade so groß sein, dass die Cornet-Waffel alle Flüssigkeit zurückhält, auch wenn die Glacé-Kugel vollständig schmilzt. Untersuchen Sie folgende Fragen unter der genannten Bedingung.

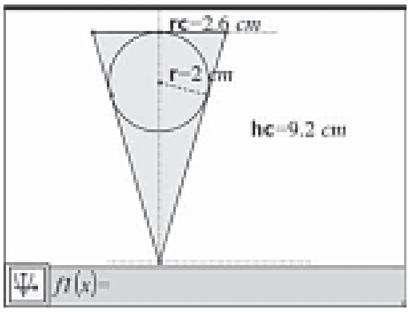
3. Wie ändert sich die Lage des Cornet-Randes in Abhängigkeit der Cornet-Höhe, gegenüber dem Glacé-Kugelmittelpunkt?

4. Bei welcher Cornet-Höhe liegt der Cornet-Rand genau auf der Höhe des Kugelmittelpunktes?

5. Bei welcher Cornet-Höhe überragt der kleinste Teil der Glacé-Kugel den Cornet-Rand?

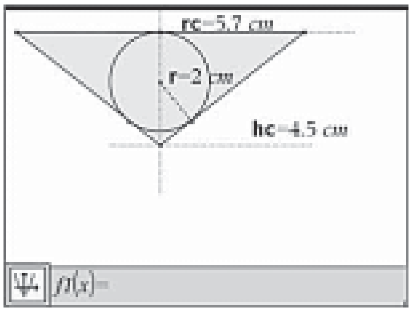
Lösungshinweise zur Aufgabe 1 und 2:

Die variablen Grössen sind die Cornet-Höhe hc und der Radius rc des Cornet-Randes. Da hc und rc bei konstantem Kugelradius über geometrische Beziehungen von einander abhängig sind, kann dies als Nebenbedingung dienen, so dass die Fragen zur Ermittlung der lokalen Extrema der entsprechenden Funktionen beantwortet werden können.



Zuerst soll ein Schnitt der geometrischen Situation konstruiert werden, in dem interaktiv die variablen Größen verändert werden können. Dazu wird in einer neuen Seite in **Graphs & Geometry** (Applikationen) hinzugefügt und die Situation so konstruiert, dass der Punkt der Cornet-Spitze vertikal verschiebbar ist (Punkt, Linien, besondere, Messen).

Die Hilfslinien der Konstruktion, sowie das Koordinatensystem werden ausgeblendet. (Objekte, graphische – verstecken)

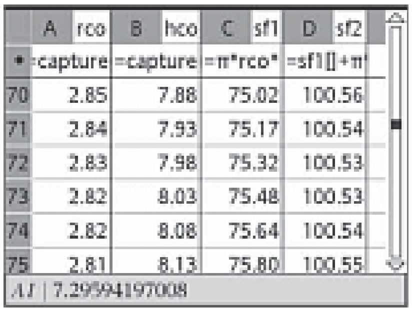


Der Kugel- und Cornet-Radius sowie die Höhe werden gemessen und danach die Masszahlen mit den entsprechenden Variablen verknüpft.

Die Attribute der einzelnen Objekte werden entsprechend angepasst.

Auf einer zweiten Seite wird die Applikation **Lists & Spreadsheet** eingefügt. Über die automatische Datenerfassung (Werte, sammeln und in Tabelle übertragen) werden durch das Ziehen der Cornet-Spitze auf der ersten Seite Messwerte für den Radius (rco) und die Höhe (hco) in die Tabelle eingefügt.

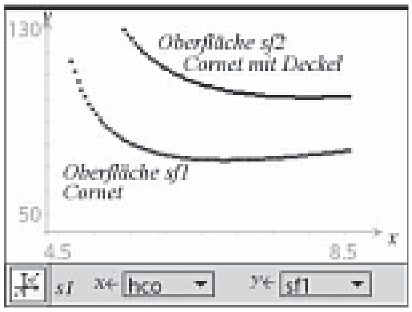
In den Spalten C und D werden die Oberflächen (sf1 ohne Deckel und sf2 mit Deckel) in Abhängigkeit von rco und hco berechnet.



	A rco	B hco	C sf1	D sf2
•	=capture	=capture	=π*rco*	=sf1[]+π
70	2.85	7.88	75.02	100.56
71	2.84	7.93	75.17	100.54
72	2.83	7.98	75.32	100.53
73	2.82	8.03	75.48	100.53
74	2.82	8.08	75.64	100.54
75	2.81	8.13	75.80	100.55

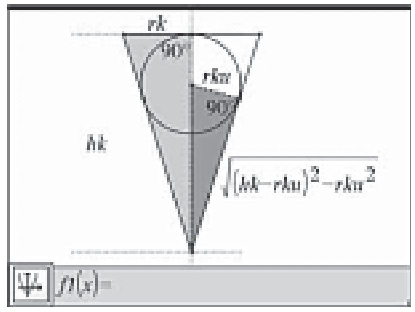
A1 | 7.29594197008

Auf der dritten Seite (mit **Graphs & Geometry**) werden nun die Messdaten der zweiten Seite als Punkte im Koordinatensystem (Listen, graphisch darstellen) dargestellt (Oberflächen sf1 und sf2 gegen Höhe hco). Die Plots der beiden Oberflächen lassen beide im dargestellten Bereich ein Minimum erkennen. Deutlich ist in der Graphik aber auch erkennbar, dass das Minimum der Cornet-Oberfläche mit und ohne Deckel nicht bei derselben Cornet-Höhe angenommen wird. Dies könnte man voreilig und ohne diese Untersuchung vermuten.

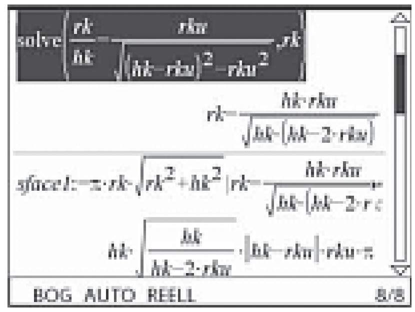


Bei welcher Cornet-Höhe genau liegen nun diese Minima? – Wie sind sie vom Kugelradius abhängig?

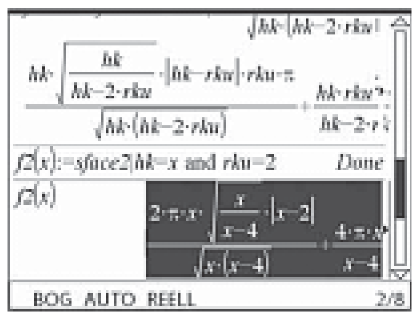
Anhand der Ähnlichkeitsbeziehung der markierten Dreiecke wird nun analytisch der Funktionsterm bestimmt, der die Abhängigkeit der Oberfläche von der Höhe des Cornets beschreibt.



Die Berechnungen zu den Funktionstermen werden auf einer weiteren Seite (mit **Calculator**) symbolisch durchgeführt.

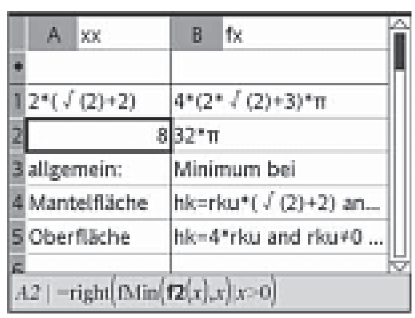


Mit diesen Termen (sface1 und sface2) werden die Oberflächenfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ definiert, wobei der Cornet-, resp. der Kegelhöhe hk die Variable x und dem Kugelradius rku die Konstante 2 cm zugewiesen werden.

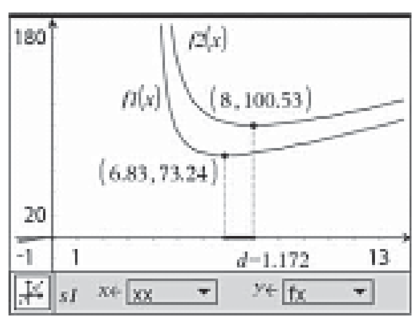


In einer weiteren Tabelle (**Lists & Spreadsheet**) werden nun die Koordinaten der lokalen Minima von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ symbolisch berechnet. (Funktionen, ableiten)

Auch allgemein lässt sich das Minimum in Abhängigkeit des Kugelradius rku berechnen.



In einem neuen Koordinatensystem (**Graphs & Geometry**) werden nun die Graphen der Oberflächenfunktionen, die Plots der Minima und ihre approximierten Koordinaten angezeigt.



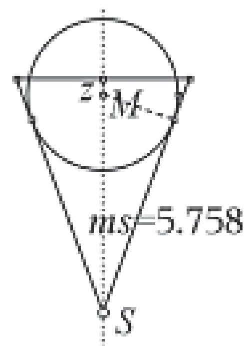
Fazit:

Über das geometrische Modell, das sich einfach konstruieren und interaktiv verändern lässt, werden Messwerte generiert. Danach erst wird analytisch die allgemeine funktionale Abhängigkeit der Mantel-, resp. der Oberfläche von der Kegelhöhe bestimmt.

Das Minimum der Mantelfläche des Kegels, dem eine Kugel eingeschrieben ist, wird bei der Kegelhöhe $h = \left(2+\sqrt{2}\right)\cdot r_{Kugel}$ angenommen. Soll jedoch die ganze Oberfläche des Kegels minimiert werden, so ist die Kegelhöhe $h = 4\cdot r_{Kugel}$ zu wählen.

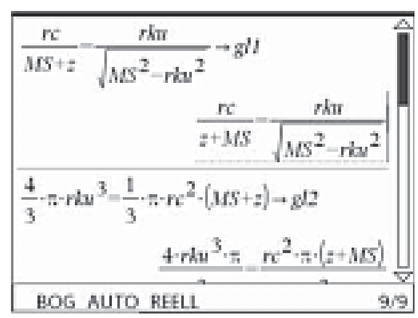
Lösungshinweise zu Problemstellung 2, Aufgabe 3 und 4:

Anders als bei den ersten beiden Aufgaben ist durch die Bedingung der Volumengleichheit der Kugel und des Kegels die Cornet-Höhe nicht mehr frei wählbar. Dadurch kann die geometrische Situation nicht einfach konstruiert werden. Da die Kugel den Cornet-Rand nicht mehr zwingend tangiert, ist es sinnvoll, den Abstand des Cornet-Randes zum Kugelmittelpunkt als Variable z zu definieren. Eine Ähnlichkeitsbeziehung und die Volumengleichheit führen zum Gleichungssystem, aus dem der Funktionsterm, aus dem der Funktionsterm für z(ms) berechnet werden kann.

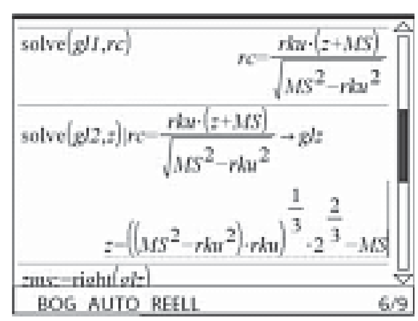


Mit dem Einfügen eines neuen *Problems* werden alle Variablen zurückgesetzt.

In einer neuen Seite (mit **Calculator**) werden die ausformulierten geometrischen Beziehungen unter gl1 und gl2 gespeichert. (Variablen, verknüpfen)

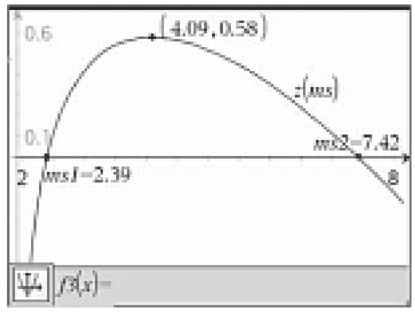


Durch geschickte Kombination der Gleichungen und unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen der auftretenden Größen ergibt sich der Funktionsterm für die Strecke z in Abhängigkeit von der Strecke $\overline{MS}$.

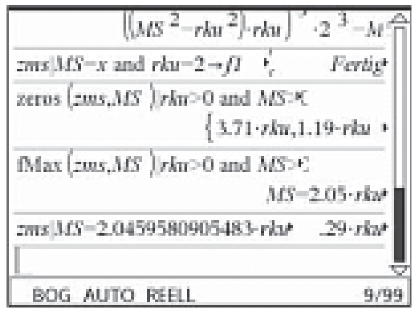


Somit kann die Funktion z in Abhängigkeit von der Strecke $\overline{MS}$ und des Kugelradius' definiert und graphisch dargestellt werden.

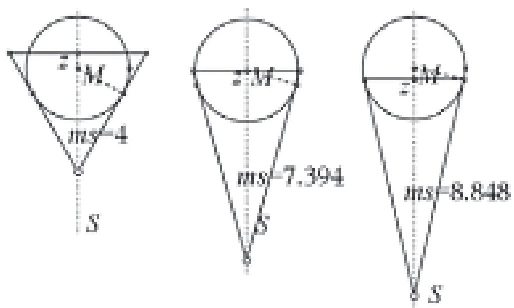
Die Graphik zeigt einen nicht a priori vorhersehbaren Verlauf: Die Funktion weist in dem für die Aufgabenstellung relevanten Ausschnitt 2 Nullstellen und ein lokales Maximum auf. Wie lässt sich dies nun interpretieren?



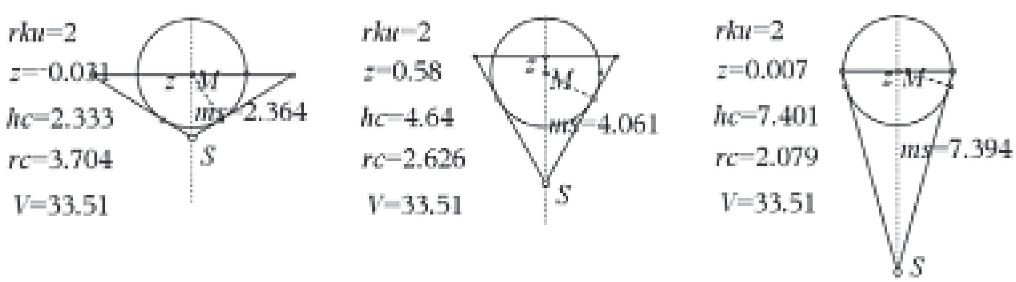
Die Koordinaten der markanten Punkte des Funktionsgraphen lassen sich auch analytisch in Abhängigkeit vom Kugelradius rku berechnen.



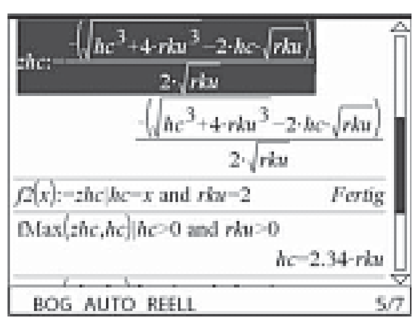
Erst die Kenntnisse der funktionalen Abhängigkeit der Strecke z von der Strecke $\overline{MS}$, macht die geometrische Konstruktion der Cornet-Höhe möglich, mit der interaktiv unterschiedliche Situationen simuliert werden können. Dabei wird der Funktionsterm numerisch berechnet und mittels Maßübertragung in die Strecke z umgesetzt.



Ein Blick auf den Funktionsgraphen zeigt jedoch, dass z nicht nur größer, gleich oder kleiner null sein kann, sondern dass auch ein Maximum und zwei Nullstellen auftreten.



Durch die Strecken z und $\overline{MS}$ ist auch die Cornet-Höhe hc definiert. Somit kann der Funktionsterm von z auch in Abhängigkeit von der Höhe hc ausgedrückt werden. Dadurch kann nebst z(ms) nun auch noch z(hc) grafisch dargestellt werden.



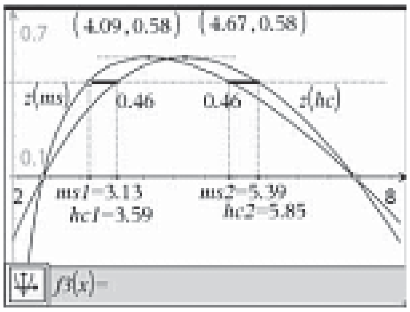
Damit sind die Fragen der Aufgaben 3 und 4 allgemein und auch für beliebige Kugelradien rku beantwortbar.

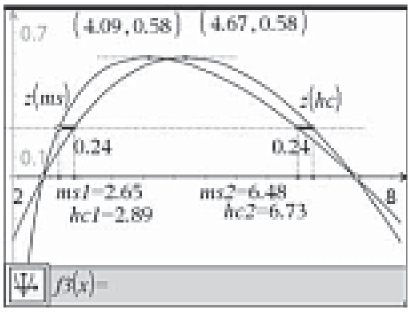
Allerdings drängen sich weitere Fragen zur Graphik der Funktionen z(ms) und z(hc) auf:

a) Weshalb haben beide Funktionsgraphen dieselben Nullstellen?

b) Wie lässt sich die Gleichheit der markierten Abstände, die die Funktionsgraphen aus einer horizontalen Gerade herausschneiden, interpretieren und begründen?

c) Welchen Abstand haben die Maxima der beiden dargestellten Funktionen?





Didaktischer Kommentar

Die gestellten Aufgaben und deren Lösungsvorschläge zeigen hervorragend die Stärken des TI-Nspire™ CAS. Die Beispiele zeigen einerseits die Möglichkeit, ein Problem (Aufgaben 1 und 2) von der Geometrie her über die Analysis zu lösen und andererseits mit Hilfe analytischer Erkenntnisse erst die Grundlagen für eine geometrische Simulation des Problems (Aufgaben 3 und 4) zu schaffen.

Das TI-Nspire™ CAS nimmt den Lernenden einen sehr großen Teil des Rechenaufwandes ab, respektive ermöglicht es ihnen erst, die komplexen Fragestellungen eines Problems zu analysieren und zu beantworten, ohne sich im Dschungel des Rechenaufwandes zu verlieren.

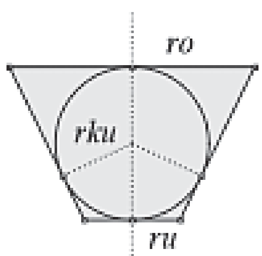
Die Möglichkeiten des TI-Nspire™ CAS, mit verschiedenen mathematischen Strukturen ein Problem abzubilden und diese Strukturen verknüpfen zu können, erleichtert den Lernenden den Zugang zu komplexen Aufgaben.

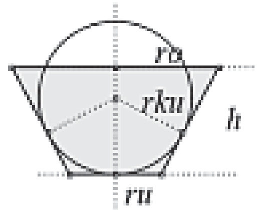
Je nach Stand der Lernenden bezüglich mathematischer Kenntnisse und der Handhabung des TI-Nspire™ CAS, sollten die Lernenden in Gruppen (2 bis 4 Personen) möglichst selbstständig Lösungsansätze entwickeln und anwenden können. Dabei sollte die Lehrperson nur helfend und eventuell lenkend einwirken, um möglichst eine breite Palette von Lösungsansätzen zu erhalten. Die anschließende Diskussion der unterschiedlichen Lösungen im Plenum darf nicht fehlen.

Während bei der Aufgabe 1 und 2 die Steuerung der Lehrperson relativ gering ausfällt, bedürfen die Aufgaben 3 und 4 einer sehr viel engeren Begleitung durch die Lehrperson.

Ergänzende Aufgaben

- Durch den Einbezug des Öffnungswinkels als Variable des Cornets erhält man weitere Varianten der Aufgabenstellung.
- Analoge Betrachtungen können unter der Vorgabe eines Bechers anstatt des Cornets gemacht werden.

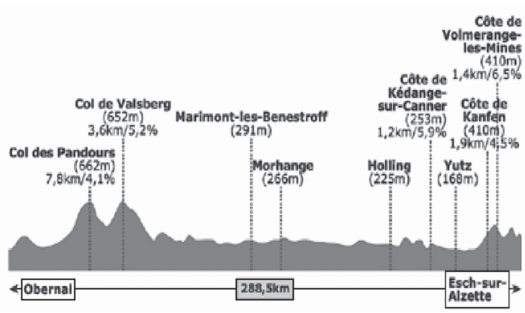




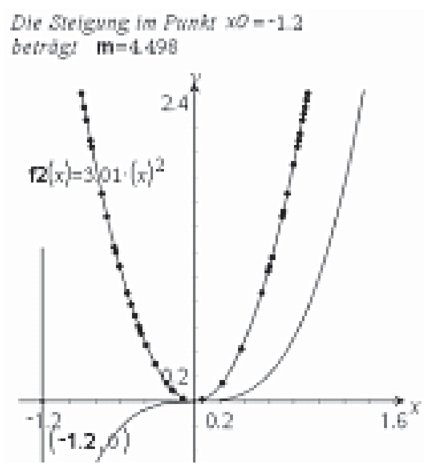
Von der Ableitung zur Ableitungsfunktion

Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß, Rainer Heinrich, Eberhard Lehmann

Tour de France



Wie erstellt man ein Steigungsprofil aus einem Höhenprofil?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis), GK oder LK
Dauer: 2-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler

- können Ableitungen an einer Stelle berechnen und wissen, dass die Ableitung an einer Stelle die Tangentensteigung der Funktion an dieser Stelle angibt
- besitzen grundlegende Werkzeugkompetenz und wissen insbesondere, wie die Tangente an einen Punkt eines Graphen konstruiert, ihre Steigung berechnet und die angezeigten Steigungen in eine Tabelle übertragen werden können

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler

- können zu einem Sachproblem ein mathematisches Modell entwickeln
- können das Modell auf das gegebene Problem anwenden, validieren und so zu einer verallgemeinerten mathematische Aussage kommen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Menge der Ableitungen $f'(x_i)$ an den Stellen x_i durch eine Funktion

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):

- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:

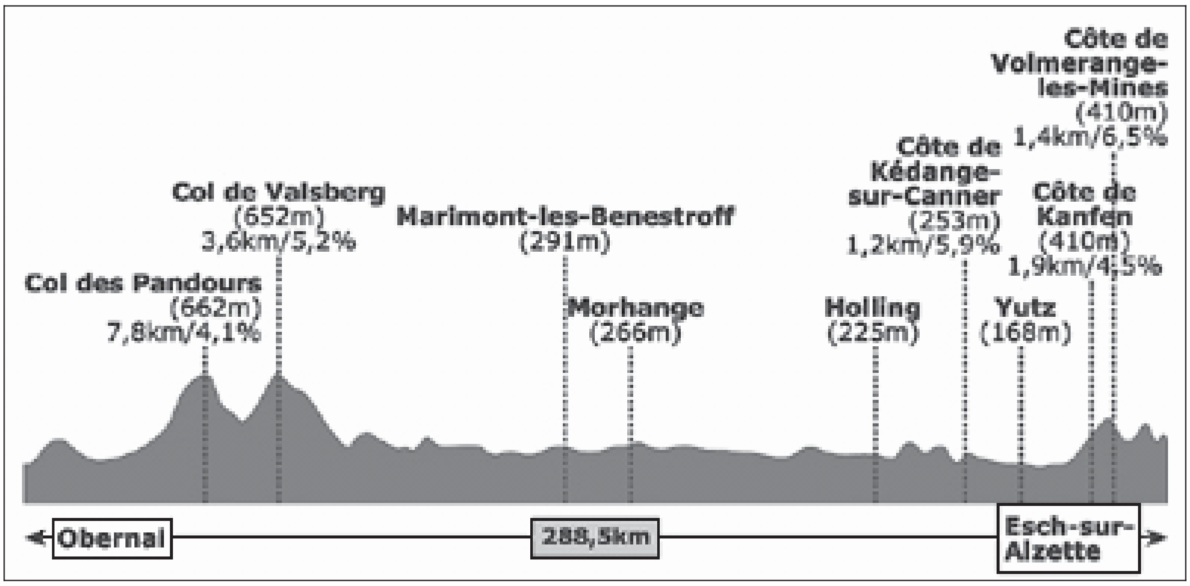
- Graphisch: Konstruieren von Tangenten,
- Numerisch: Berechnen von Steigungswerten

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Gruppenarbeit, evtl. unterschiedliche Höhenprofile für die einzelnen Gruppen. (vereinfachte Höhenprofile, die die Form einer Potenzfunktion, einer Sinusfunktion haben bis zu einer realistischen Darstellung einer Tour de France Etappe)

Vom Höhenprofil zum Steigungsprofil

Das Wintertraining von Radrennfahrern erfolgt auf so genannten Fahrradergometern. Damit wird für wichtige Rennen trainiert. Insbesondere sollen Bergetappen, wie die der Tour de France von Obernal nach Esch-sur-Alzette, durch entsprechende Einstellungen der Belastung auf den Ergometern simuliert werden.

Problem 1:
Entwickle Vorstellungen, wie eine Simulation in den Ergometern erfolgen kann.
Wähle Dir ein einfaches Profilstück und wende darauf Dein Verfahren an.



Problem 2:
Wenn das Profilstück durch eine Funktion gegeben ist, dann können die Steigungen an jeder Stelle berechnet werden. Entwickle Vorstellungen, wie eine Simulation in den Ergometern erfolgen kann. Wähle als Profil $f(x) = x^3$ und wende darauf Dein Verfahren an.

(Hinweis: Der TI-Nspire™ CAS bietet die Möglichkeit

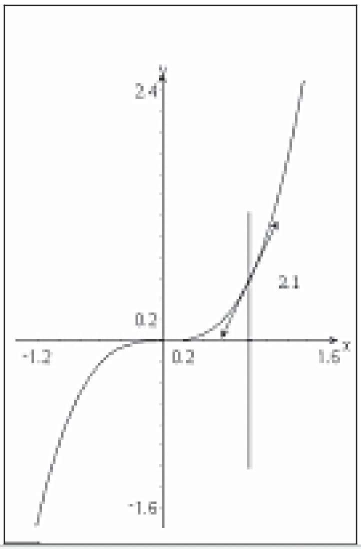
1. die Tangente an einem Punkt eines Graphen zu zeichnen, ihre Steigung zu berechnen (Funktionen ableiten: graphisch, Messen, Steigung)

    und

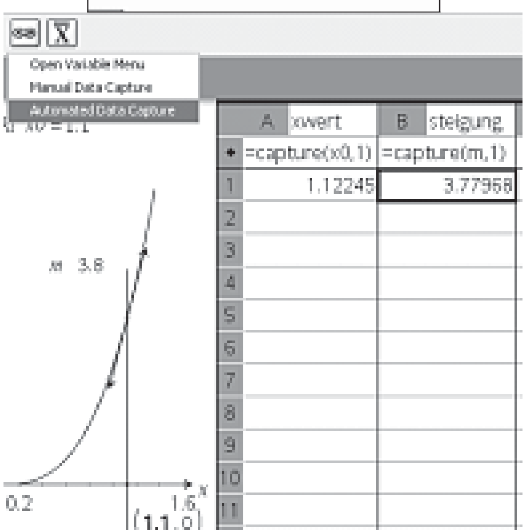
2. die angezeigten Steigungen in eine Tabelle übertragen zu lassen (Werte sammeln, in Tabelle übertragen)

Mögliche Lösungswege und -schritte:

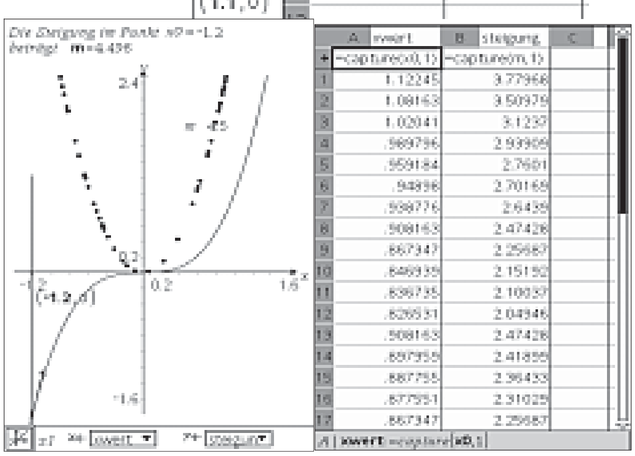
Es ist hier als vereinfachte Form des Höhenprofils der Graph von x^3 gewählt worden.



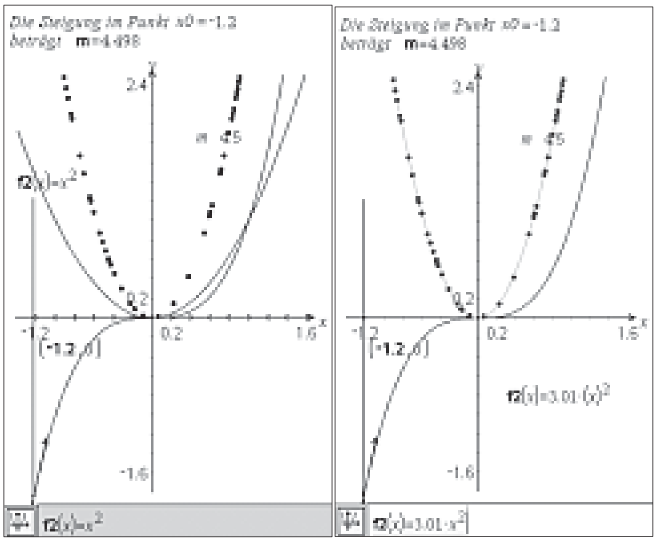
An einer Stelle x_0 auf der x-Achse wird der zugehörige Punkt auf dem Graphen (Graph zeichnen) als Schnittpunkt der Senkrechten (Linien, besondere) durch x_0 und dem Graphen konstruiert. Weiterhin ist die Tangente in diesem Punkt gezeichnet (Ableiten, graphisch) und deren Steigung gemessen worden.



Als zweite Applikation auf der Seite (Fenster teilen) ist **Lists & Spreadsheet** aufgerufen worden. Hier werden die gemessenen Werte in einer Tabelle gesammelt. In diesem Fall sind es x_0 und m.



Danach geht man in das Graphikfenster zurück. Durch Ziehen der Stelle x_0 entlang der x-Achse werden die angezeigten x-Werte und Steigungen in die Tabelle übertragen. Anschließend werden in dem Graphik-Fenster die Werte der Liste „steigung“ und „xwert“ (Spalte 1 und 2 in der Tabelle) paarweise als Punkte dargestellt. Anschließend können diese Listen graphisch dargestellt werden. Die Graphik zeigt, dass die Punkte auf dem Graphen einer Parabel liegen.



Modellieren der Ableitungsfunktion

Es gibt verschiedene Wege, um die zugehörige Funktionsgleichung herauszufinden:

- Regression,
- Bestimmen des Polynoms
- Verändern einer Normalparabel im Zugmodus (Graph, einer Funktion zeichnen).

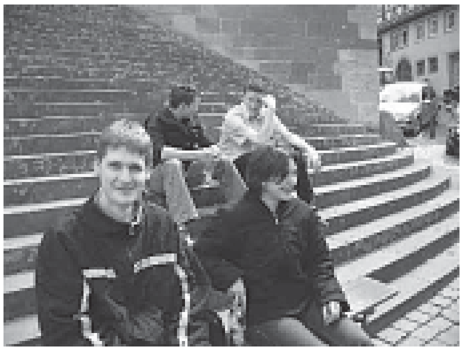
Im Folgenden wird die letzte Möglichkeit dargestellt.
Es wurde zunächst $f_2(x) = x^2$ gezeichnet (linke Abbildung). Der Graph der Parabel ist dann durch Ziehen so lange verändert worden, bis dieser so genau wie möglich durch die gegebenen Punkte verläuft. Dann ist im Graphik-Fenster $f_2(x) = 3{,}01 \cdot x^2$ zu sehen.
Nach diesem Ergebnis kann vermutet werden, dass $f_2(x) = 3 \cdot x^2$ die Ableitungsfunktion von $f_1(x) = x^3$ ist. Die leichte Abweichung macht nochmals deutlich, dass man nach dieser Untersuchung die Existenz einer Ableitungsfunktion nur vermuten kann. Der Nachweis fehlt noch.

Didaktischer Kommentar:

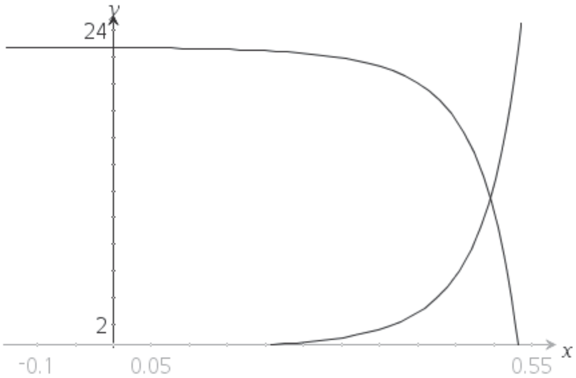
Im Mathematikunterricht der Oberstufe wird in der Regel viel Zeit aufgewendet, um die lokale Änderungsrate herzuleiten. Der Übergang von der Änderungsrate einer Funktion an einer Stelle x_0 zu der zugehörigen Ableitungsfunktion erfolgt häufig nur durch wenige Hinweise (z.B. Ersetze x_0 durch x und aus der Ableitung an einer Stelle wird die Ableitungsfunktion.).
Bei Bearbeitung dieser Aufgabe wird durch Nutzung der Technologie in einer graphischen Darstellung deutlich sichtbar, dass die lokalen Änderungsraten durch eine Funktion beschrieben werden können.
Wählen Sie entweder Problemstellung 1 oder Problemstellung 2 jeweils zusammen mit der Grafik. In Problemstellung 1 der Kopiervorlage wird die Problemstellung relativ offen formuliert. Dieses Vorgehen bietet sich an, wenn Schülerinnen und Schüler mit dem Modellieren vertraut sind. In Problemstellung 2 werden mehrere Schritte sowohl zum Modellieren als auch zur Nutzung des Werkzeugs vorgegeben. Dieser Vorschlag ist also besonders dann geeignet, wenn Schülerinnen und Schüler inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen erwerben sollen und der Umgang mit offenen Problemstellungen neu ist. Natürlich lassen sich auch einzelne Schritte von Problemstellung 2 mit Problemstellung 1 kombinieren, um den Arbeitsauftrag individuell auf die Vorerfahrungen der Lerngruppe anzupassen.
Der in diesem Beispiel beschriebene Lösungsweg illustriert einen möglichen Weg. Durch Vereinfachen der ursprünglichen Problemstellung und durch Probieren wird der mathematische Zusammenhang herausgefunden.
Mit dem Anwendungskontext „Fahrrad“ eröffnet sich auch die Möglichkeit, diesen mathematischen Inhalt in ein fächerverbindendes Projekt einzubinden. Denn die Themen „Fahrrad“ oder „Tour de France“ bieten zahlreiche Aspekte um Vernetzungen zur Geographie, zur Biologie, zur Physik,… herzustellen.

Auf in die Pause

Andreas Pallack, Soest



Kann man mit stochastischen Matrizen Messdaten beschreiben?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Stochastik)
Dauer: 2-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können mit stochastischen Matrizen modellieren
- können Sachzusammenhänge analysieren

Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- entwickeln die bereits bekannten Methoden (siehe Voraussetzungen) zur Erkundung von Situationen weiter und entwickeln Strategien für ihre Anwendung
- nutzen ein Werkzeug zur Analyse und zur Reflexion von Modellen basierend auf stochastischen Matrizen

Inhaltsbezogene Ziele/Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- passen stochastische Matrizen an eine gegebene Situation an

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Numerisch: Lösen durch Probieren
- Algebraisch: Erstellen eines Modells zu gegebenen Daten

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Ich empfehle die Einheit
- zur Übung oder Vertiefung im Unterricht
- als binnendifferenzierende Einheit für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler
- oder im Rahmen eines Referates

durchzuführen.

Auf in die Pause

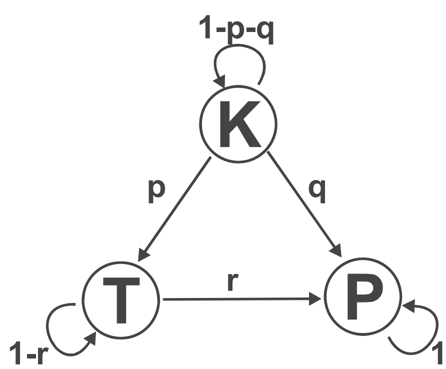
Der Weg von Schülerinnen und Schülern eines Mathematikkurses (23 Schüler) vom Klassenraum (K) zum Pausenhof (P) soll mithilfe von stochastischen Matrizen modelliert werden. Die Schülerinnen und Schüler können sich entweder im Klassenraum, auf der Toilette (T) oder auf dem Pausenhof (P) aufhalten. Das Modell soll die folgende Beobachtung beschreiben:

	K	T	P
0 min	23	0	0
2 min	2	7	14
5 min	0	0	23

Entwickeln und testen Sie ein solches Modell. Beschreibt es die Messdaten hinreichend gut?

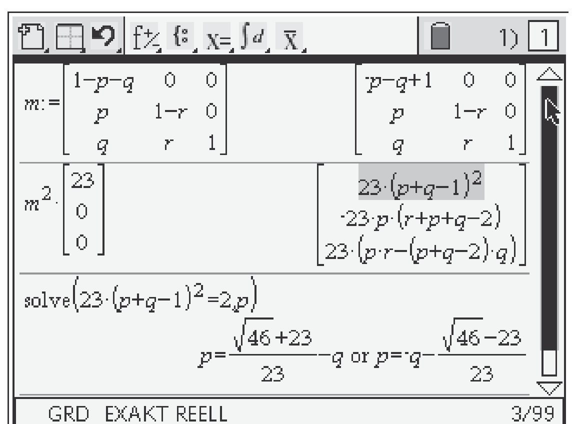
Auf in die Pause

Beim Modellieren mit stochastischen Matrizen (also Matrizen, deren Spaltensummen 1 ist) werden – im einfachsten Modell – Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen mit Hilfe eine Matrix (Übergangsmatrix) beschrieben. Durch Potenzieren der Matrix erhält man, unter der Voraussetzung, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten sich nicht verändern, Informationen darüber, wie sich die Zustände entwickeln. In dieser Aufgabe sind jedoch die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht gegeben. Das bedeutet, dass diese vorab mithilfe von Parametern beschrieben werden müssen. Sukzessive können dann die gegebenen Informationen zur Anpassung des Modells verwendet werden.
Der Weg von Schülerinnen und Schülern eines Mathematikkurses (23 Schüler) vom Klassenraum (K) zum Pausenhof (P) soll mithilfe von stochastischen Matrizen modelliert werden. Die Situation lässt sich mit folgendem Übergangsdiagramm bzw. stochastischen Matrix beschreiben:

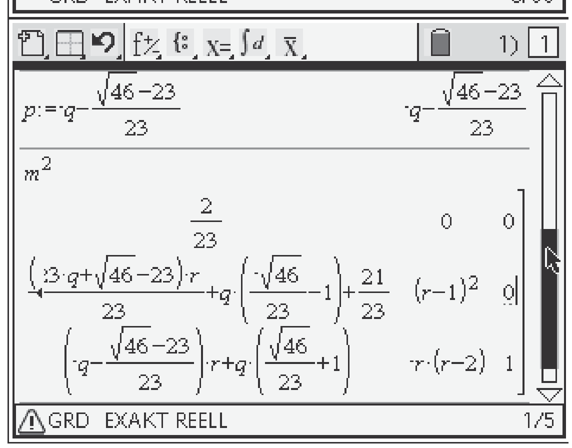


$$\left(\begin{array}{c|ccc} & K & T & P \\ \hline K & 1-p-q & 0 & 0 \\ T & p & 1-r & 0 \\ P & q & r & 1 \end{array}\right)$$

Wenn man die Matrix mit n potenziert, erhält man die Übergangsmatrix für den Zustand nach n Minuten. Durch Multiplikation dieser Matrix mit dem Zustandsvektor nach 0 Minuten berechnet man die Verteilung der Personen nach n Minuten. Die Verteilung der Personen nach 2 Minuten ist vorgegeben, so dass das Ergebnis dieser Rechnung den Forderungen aus der Aufgabe angepasst werden kann.
Dazu wird die erste Zeile des Vektors angepasst, d.h., dass die Beziehung zwischen p und q untersucht wird.

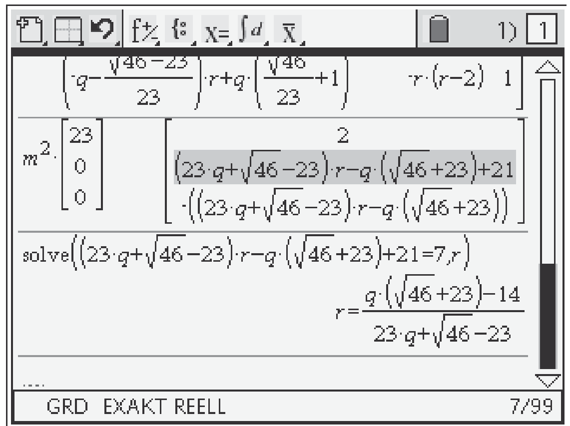


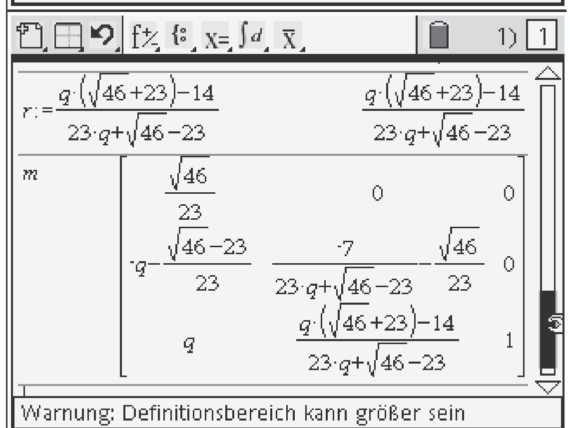
Dieses Ergebnis kann nun zur Vereinfachung des Zustandsvektors nach 2 Minuten genutzt werden. Im ersten Zugriff wird die zweite Lösung der quadratischen Gleichung verarbeitet.
Nun wird die zweite Zeile näher betrachtet. Analog zur ersten Zeile wird die Forderung aus der Aufgabe (Hier, dass nach 2 Minuten 7 Schülerinnen und Schüler auf der Toilette sein sollen) eingebracht.

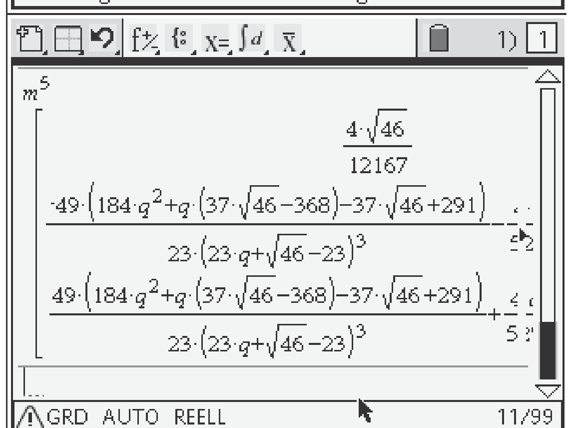


Auch dieses Ergebnis trägt zur Vereinfachung bei, da die Übergangsmatrix nun nur noch von einer Variablen (q) abhängig ist.

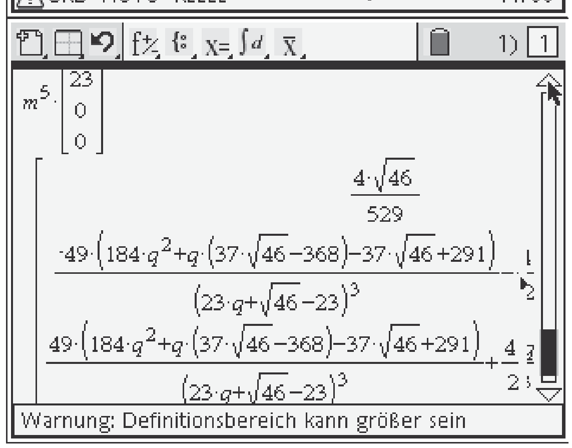
Die Matrix wird hier in zwei Schritten vereinfacht und schließlich wieder unter dem Namen m gespeichert.

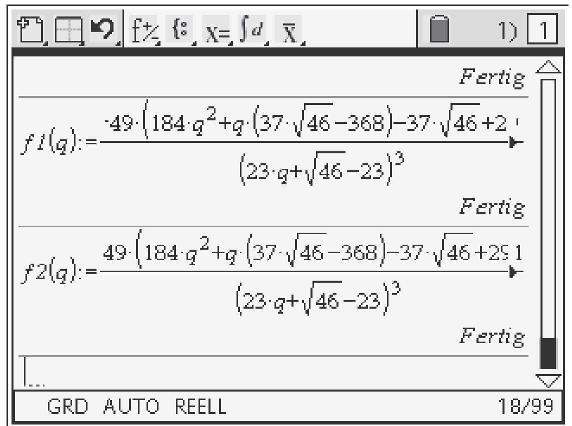




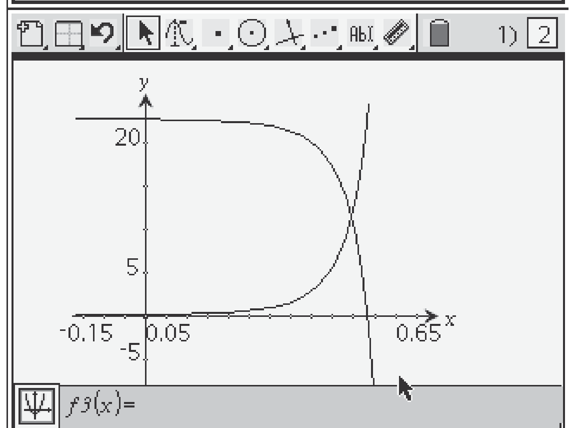


Die Aufgabenstellung fordert, dass die so entstandene stochastische Matrix so angepasst werden soll, dass nach 5 Minuten keine Schülerinnen und Schüler mehr auf der Toilette oder im Klassenraum sind. Dazu wird die entsprechende Übergangsmatrix berechnet.





Die Terme werden graphisch analysiert. Das Ergebnis ist gut interpretierbar: Auf der x-Achse ist die für q angenommene Wahrscheinlichkeit angetragen. Die Graphen repräsentieren die Anzahl der Schülerinnen und Schüler auf der Toilette (steigender Graph) bzw. auf dem Schulhof (fallender Graph). Umso kleiner q ist, umso mehr Schülerinnen und Schüler können auf dem Schulhof erwartet werden.

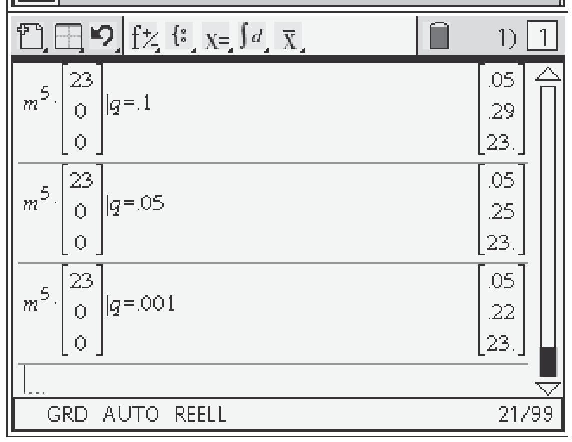


Wir versuchen das rechnerisch zu verifizieren, indem verschiedene Werte für q eingesetzt werden.

q=0,1

q=0,05

q=0,001



In allen drei Fällen passen die gerundeten Schülerzahlen zur Forderung der Aufgabe. Umso kleiner man q wählt, umso besser passen die Zahlen. In der Realität würde das aber bedeuten, dass nahezu alle Schülerinnen und Schüler (kurz) auf die Toilette gehen, bevor sie den Schulhof betreten:

Zeit / Minuten	1	2	3	4	5
Klassenraum	7	2	1	0	0
Toilette	16	7	2	1	0
Pausenhof	0	14	20	22	23

Abschließend ein Blick zurück: die zweite Lösung der quadratischen Gleichung zum Beginn dieses Lösungsvorschlags wurde noch nicht verfolgt. Hier ergibt sich nach Berechnung der Anzahl der Schülerinnen und Schüler im Klassenraum nach 5 Minuten eine negative Zahl, weswegen dieser Ansatz zu verwerfen ist.

Didaktischer Kommentar

Die schlicht wirkende Aufgabe hat es in sich: Bereits nach wenigen Schritten werden die Lernenden an ihre Grenzen stoßen und auf den gezielten Einsatz von Technologie angewiesen sein.

Um einige Schwierigkeiten abfedern zu können besteht die Möglichkeit, den Lernenden einige Tipps an die Hand zu gegeben:

Tipps zum Vorgehen:
- erstellt ein Übergangsdiagramm. Welche Kanten werden wirklich benötigt?
- minimiert die Anzahl der Variablen in dem Modell.
- passt das Modell auf die Situation nach 2 Minuten an. Welche Freiheitsgrade gibt es noch?
- minimiert die Anzahl der Variablen mithilfe der neu gewonnen Informationen.
- passt das Modell auf die Situation nach 5 Minuten an.

Die Bearbeitung würde dadurch allerdings sehr kleinschrittig gesteuert. Insofern sollte man wirklich abwägen, ob und wann man den Lernenden diese Hilfen gibt.

Der Kontext und die zugehörige Aufgabenstellung können nur angemessen bearbeitet werden, wenn das Modell immer wieder auf die reduzierte Realsituation übertragen wird. Einen zusätzlichen Reiz bekommt die Aufgabe durch die Tatsache, dass sich die Daten zwar sehr gut mithilfe von stochastischen Matrizen beschreiben lassen, die Konsequenzen aus dieser Beschreibung jedoch absolut an möglichen Realsituationen vorbeigehen. So kann – aus meiner Sicht – eindrucksvoll die Grenze dieser Art von Modellen abgestochen werden.

Um eine realistische Beschreibung zu erhalten, könnten die Übergangsmatrizen für jeden Zeitpunkt variiert werden. Allerdings werden die gegebenen Daten in diesem Fall lediglich in eine andere Form übertragen. Der Prognosecharakter – wenn man bei dieser Aufgabe von einem solchen sprechen kann – des Modells würde so karikiert.

Literatur/Quellenangaben

Das Beispiel wurde für Nspire™ adaptiert. Es stammt ursprünglich aus:

Pallack, Andreas (2006). Mit CAS zum Abitur. Schroedel Verlag, Braunschweig. S. 98-102.

Vorschlag für eine Klausuraufgabe:

Mathematik und Marktforschung

Ein Mobilfunkanbieter gibt ein Angebot heraus, das stark subventioniert werden muss. Alle Gespräche unter 20 Sekunden sind für Neukunden zwei Jahre kostenlos. Der Vorstand des Unternehmens geht davon aus, dass mithilfe des Angebotes viele neue und vor allem junge Dauerkunden gewonnen werden können. Die Verträge werden auf drei Jahre begrenzt; nach zwei Jahren können sie gekündigt werden.

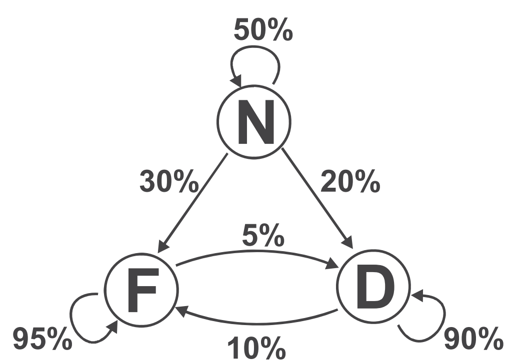
Die Gesprächsdauer der gewonnen Neukunden pro Telefonat lässt sich als Funktionswert einer Zufallsvariablen X auffassen. X wird so festgelegt, dass 1 Minute als eine Zeiteinheit dient. Die Dichtefunktion kann durch folgende Funktion approximiert werden:

$$d(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 144 \cdot x \cdot e^{-12 \cdot x} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d(x) den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt. Bestimmen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ. Welche Bedeutung hat der Erwartungswert in diesem Fall?
c) 13.000 neue Kunden konnten mit dem Angebot geködert werden. Sie führen im Monat 185.000 Telefonate. Wie viele der Gespräche sind erwartungsgemäß für Kunden kostenlos?

Nach zwei Jahren bekommen alle Kunden ein Schreiben, welches das Ende des Angebotes ankündigt. Die Kunden können nun monatlich kündigen und zu einem Fremdanbieter wechseln, sich für ein neues (attraktives) Angebot des Unternehmens entscheiden oder einfach abwarten. Nach Ablauf des Jahres werden die Verträge der Kunden, die nicht reagierten, automatisch und unwiderruflich gekündigt.

Ein Marktforschungsinstitut beobachtet die Kundenwanderungen. Dabei werden drei Kundengruppen betrachtet: (N) Neukunden, die bisher nicht auf die Anschreiben reagierten; (F) Neukunden, die gekündigt haben und wahrscheinlich zu einem Fremdunternehmen wechselten; (D) Neukunden, die sich für ein neues Angebot des Unternehmens entschieden haben und deswegen Dauerkunden geworden sind. Natürlich ist es möglich, dass Kunden, die zu einem Fremdunternehmen wechselten, sich später wieder für ein Angebot des Unternehmens entscheiden. Da die Namen der Firma bekannt sind, können auch diese Kundenbewegungen erfasst werden.



Die Kundenwanderung pro Monat wird durch den oben abgebildeten Übergangsgrafen prognostiziert.

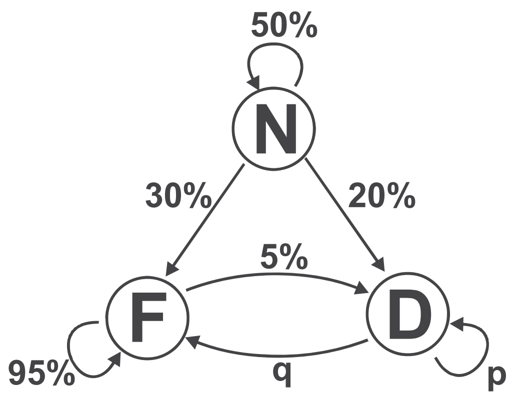
Gehen Sie davon aus, dass im „0. Monat“ 13.000 Kunden der Gruppe N angehören und 0 Kunden den Gruppen F und D.

d) Wie viele Dauerkunden hat das Unternehmen nach 1, 2 bzw. 3 Monaten gewonnen?
e) Nach 12 Monaten werden die Neukunden in der Gruppe N automatisch gekündigt. Wie viele Personen sind gemäß dem Modell von dieser Kündigung betroffen?

Der Vorstand befragt das Marktforschungsinstitut, ob es marktwirtschaftlich interessant ist, die Kündigungszeit auf 24 Monate zu verlängern. Grund ist die Aussage eines unabhängigen Marktbeobachters, der behauptet, dass sich die Kundenverteilung nach 12 Monaten noch nicht stabilisiert hat.

f) Gibt es gemäß diese Modells einen stabilen Zustand? Bestimmen Sie ihn ggf. und geben Sie an, wie sich dann die Neukunden auf die einzelnen Kundengruppen (N, F, D) verteilen. Ist es wirklich interessant, die Kündigungszeit zu verlängern?

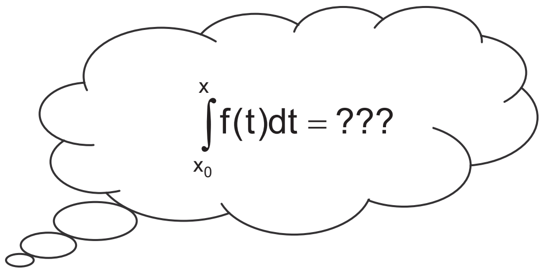
Nach drei Monaten stellt das Unternehmen fest, dass die gewählte Kundengewinnungsstrategie besser als gedacht funktionierte. So sind nach 3 Monaten bereits 4800 Kunden zu Dauerkunden geworden. Zur Beschreibung der Entwicklung muss das Modell nachgebessert werden. In seinen Grundzügen soll das Modell erhalten bleiben, da es die Entwicklung der Gruppe N sehr gut erfasst. Man betrachtet deswegen den hier abgebildeten Übergangsgraph:



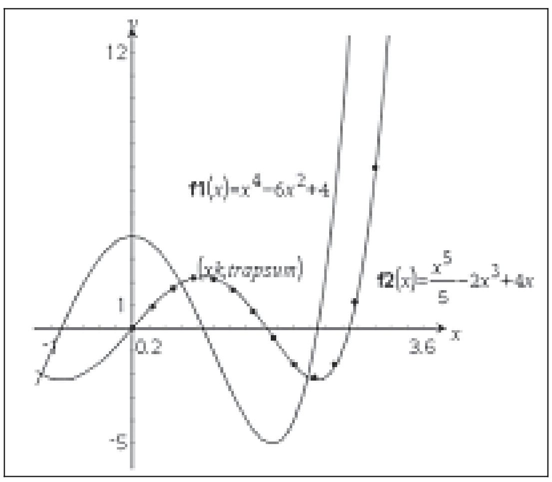
g) Passen Sie die Parameter p und q des Modells so an, dass es die Beobachtung des Unternehmens beschreibt.

Ein graphischer Zugang zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ursula Schmidt, Lünen



Gibt es eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Integralfunktion?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Integralrechnung)
Dauer: 2-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können ein Integral näherungsweise numerisch berechnen
  (…durch Rechtecke oder Trapeze approximieren, vgl. „Schadstoffemission“)
- können Stammfunktionen von Termen bilden

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- nutzen Werkzeuge zum Erkunden eines mathematischen Problems
- erkennen Strukturen und Zusammenhänge und stellen Vermutungen auf
- überprüfen ihre Vermutungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- entdecken den Hauptsatz der Integralrechnung und verfügen damit über ein Verfahren zur Berechnung von Integralen

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Die Schülerinnen und Schüler suchen Beziehungen zwischen den Graphen der Randfunktion und der Bestandsfunktion (Integralfunktion).
- Numerisch: Die Integralfunktion wird näherungsweise in der Tabellenkalkulation berechnet.
- Algebraisch: Zur Überprüfung wird die Stammfunktion über ihren Term definiert und mit dem Graphen und den numerischen Werten in der Tabelle verglichen.

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Partnerarbeit oder Kleingruppe
- Dokumentation im Forschungsheft
- Präsentation mit ViewScreen™

Gibt es Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Integralfunktion?

Bisher haben Sie Integrale numerisch durch Annäherung mit Trapezen oder Rechtecken berechnet. Hier können Sie Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrer Integralfunktion untersuchen. Dokumentieren Sie alle Graphen und Beobachtungen in Ihrem Forschungsheft.

Vorbereitung: Stellen Sie in **Graphs & Geometry** die Achsen in etwa folgendermaßen ein:

$-1 \leq x \leq 6{,}5$ und $-4 \leq y \leq 12$.

1. Vergleichen Sie den Graphen der Funktion $f_1(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 4$ mit einem Punkteplot der numerisch berechneten Integralfunktion I_0 von 0 bis zu der Obergrenze x. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $I_0(0) = 0$ (d.h. der Bestand ist zu Beginn = 0).

2. Überschreiben Sie jetzt $f_1(x)$ durch die Funktion $f_1(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2{,}5$. Aktualisieren Sie (falls erforderlich) die Graphen und Wertetabellen.

   Welche Beziehungen erkennen Sie zwischen den Graphen von f_1 und I_0?

   Testen Sie Ihre Ergebnisse noch auf einem anderen Weg:

   Geben Sie auf Grund Ihrer Vermutungen über die Zusammenhänge von f_1 und I_0 einen Term für $I_0(x)$ an?

   Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion $f_2(x)$ mit diesem Term. Was beobachten Sie?

3. Wiederholen Sie die Arbeitsaufträge aus 2. mit der Funktion $f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ und mit selbst gewählten Beispielen.

   Bestätigt sich Ihre Vermutung?

   Erklären Sie die Abweichungen in der Rechnung für $I_0(x)$ und $f_2(x)$. Was kann man tun um eine größere Übereinstimmung zu erhalten? Erproben Sie Ihre Idee.

✂ – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · – · –

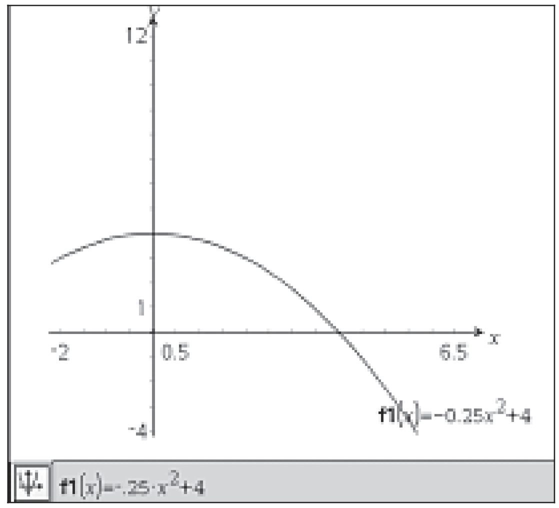
Hilfetipps:

zu 1. Erstellen Sie eine Wertetabelle in **Lists & Spreadsheet**. Approximieren Sie dabei das Integral z.B. durch orientierte Trapez- oder Rechteckflächen der Breite 0,25. Die Integralfunktion wird näherungsweise als Summenfunktion bestimmt.
Der Punkteplot der Summenfunktion wird in das gleiche Koordinatensystem gezeichnet wie der Graph der Funktion f_1.

Zu 3. Vergleichen Sie nicht nur die Graphen, sondern auch die Funktionswerte von $I_0(x)$ und $f_2(x)$.

zu 1.

In **Graphs & Geometry** wird die Funktion f_1 definiert und der Graph gezeichnet.



Eine Wertetabelle der Integralfunktion kann in Lists & Spreadsheet aufgestellt werden. Dazu erzeugt man zunächst einmal in Spalte A eine Folge (Listen) von Stützstellen auf der x-Achse. (Dafür steht auch ein Wizard zur Verfügung).

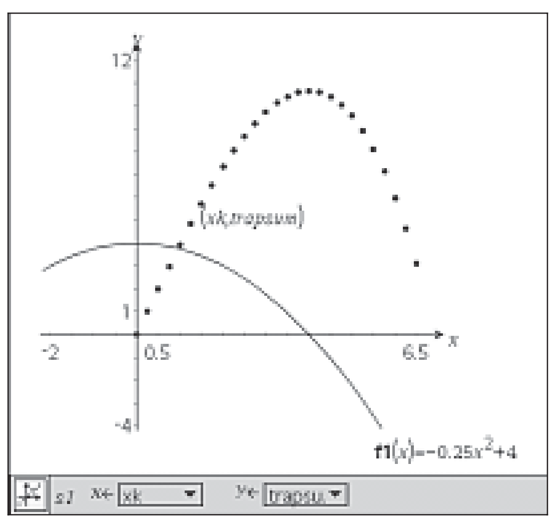
In Spalte B werden die zugehörigen Funktionswerte von f_1 berechnet.
Zwischen zwei Stützstellen wird der orientierte Flächeninhalt mit der Trapezformel angenähert. In dieser Spalte werden keine Listenformeln verwendet, sondern Zelladressierungen wie in einer Tabellenkalkulation. Die Spalte C wird durch Kopieren der Formel (Formel kopieren) aus C2 nach unten ausgefüllt.

	A xk	B yk	C trapez	D trapsum
•	=seqn(u(n−1)+0.25,	=f1(xk)		=cumSum(trapez)
1	0	4.	0	0
2	.25	3.98438	.998047	.998047
3	.5	3.9375	.990234	1.98828
4	.75	3.85938	.974609	2.96289
5	1.	3.75	.951172	3.91406
6	1.25	3.60938	.919922	4.83398
7	1.5	3.4375	.880859	5.71484
8	1.75	3.23438	.833984	6.54883
9	2.	3.	.779297	7.32813
10	2.25	2.73438	.716797	8.04492
11	2.5	2.4375	.646484	8.69141
12	2.75	2.10938	.568359	9.25977
13	3.	1.75	.482422	9.74219

C2 $= .5 \cdot (b1+b2) \cdot (a2-a1)$

Eine Annäherung an das Integral bis zur Grenze xk bekommt man dann durch Aufsummieren der Trapeze. Der Anfangswert in D1 ist nach Voraussetzung 0.

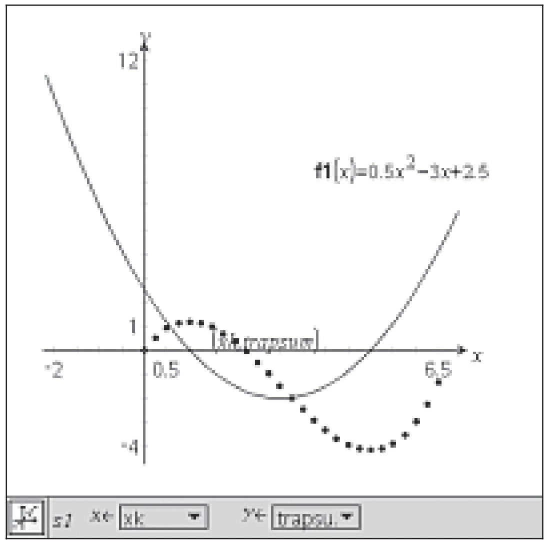
Zu den Wertepaaren in den Spalten A und D wird ein Punkteplot (Listen, graphisch darstellen) gezeichnet.



Das Punktediagramm hat ein Maximum an der Nullstelle von f_1.
Wenn x größer ist als die Nullstelle, ist der Graph der Integralfunktion streng monoton fallend und $f_1(x)$ nimmt negative Werte an.
Wenn x kleiner ist als die Nullstelle, ist der Graph der Integralfunktion streng monoton steigend und $f_1(x)$ nimmt positive Werte an.

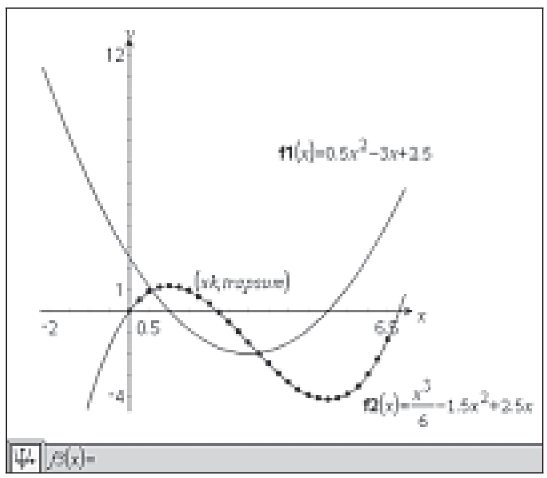
Vermutung: f_1 ist die erste Ableitung der Integralfunktion I_0.

zu 2.



In **Graphs & Geometry** überschreibt man den Term von $f_1(x)$ durch den neuen Funktionsterm.
Der Graph der Funktion f_1 wird automatisch aktualisiert, ebenso alle Berechnungen in Lists & Spreadsheet. Nur der Punkteplot der Integralfunktion musste in **Graphs & Geometry** noch einmal definiert werden.

Die Beobachtungen beim Vergleich der Graphen entsprechen denen aus Teil 1, zusätzlich gilt: An der Stelle, wo f_1 ein Minimum hat, liegt bei I_0 eine Wendestelle vor.

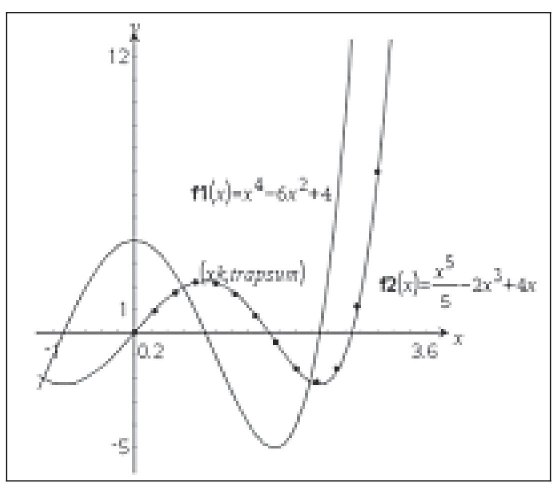


Die Vermutung, dass f_1 die erste Ableitung der Integralfunktion I_0 ist, lässt sich dadurch überprüfen, dass man den Term der Stammfunktionen bildet und den zugehörigen Graphen zeichnet:

$$f_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5 \cdot x + c\,,$$

Da $I_0(0) = 0$ ist, muss hier auch $c = 0$ gewählt werden. Die Stammfunktion für $c=0$ ist dann identisch mit der Integralfunktion I_0 Es ergibt sich neben-stehendes Bild.
Die Punkte von I_0 liegen in sehr guter Übereinstimmung auf dem Graphen von f_2, so dass die Vermutung aus Teil 1 hier zumindest bestätigt wird.

zu 3.



Wieder wird der Term zu $f_1(x)$ durch den neuen Funktionsterm überschrieben.
Die Berechnungen in der Tabelle werden automatisch aktualisiert, das Punktediagramm auch, nur der Term für die Stammfunktion $f_2(x)$ muss überschrieben werden.
Es kann sein, dass die Achsen etwas korrigiert werden müssen.
An den letzten Punkten sieht man kleine Abweichungen vom Graphen der Stammfunktion.

Diese lassen sich dadurch erklären, dass die Rechnung mit den Trapezen nur eine Annäherung an das Integral darstellt.
Die Approximation wird besser, wenn der Abstand der Stützstellen verkleinert wird.

Dieser Zusammenhang lässt sich gut in **Lists & Spreadsheet** untersuchen. Dazu wird noch eine Spalte eingefügt, in der die Funktionswerte von $f_2(x)$ berechnet werden.

	A xk	B yk	C trapez	D trapsum	E
◆	=seqn(u(n−1)+0.25,	=f1(xk)		=cumSum(trapez)	=f2(xk)
16	3.75	117.379	24.7427	58.7104	57.8467
17	4.	164.	35.1724	93.8828	92.8
18	4.25	221.879	48.2349	142.118	140.785
19	4.5	292.563	64.3052	206.423	204.806
20	4.75	377.691	83.7817	290.205	288.269
21	5.	479.	107.086	397.291	395.
22	5.25	598.316	134.665	531.956	529.27
23	5.5	737.563	166.985	698.94	695.819
24	5.75	898.754	204.54	903.48	899.879
25	6.	1084.	247.844	1151.32	1147.2
26	6.25	1295.5	297.438	1448.76	1444.07
27	6.5	1535.56	353.883	1802.65	1797.33
28					
29					

E | =f2(xk)

Bei einem kleineren Abstand der Stützstellen wird die Übereinstimmung der Werte in den Spalten D und E besser. Der Screenshot zeigt die Ergebnisse für $\Delta x = 0{,}1$.

	A xk	B yk	C trapez	D trapsum	E
◆	=seqn(u(n−1)+.1,{0}	=f1(xk)		=cumSum(trapez)	=f2(xk)
57	5.6	799.29	76.8426	773.161	772.632
58	5.7	864.66	83.1975	856.358	855.798
59	5.8	933.81	89.9235	946.282	945.69
60	5.9	1006.88	97.0343	1043.32	1042.69
61	6.	1084.	104.544	1147.86	1147.2
62	6.1	1165.32	112.466	1260.33	1259.63
63	6.2	1250.99	120.816	1381.14	1380.41
64	6.3	1341.16	129.607	1510.75	1509.98
65	6.4	1435.96	138.856	1649.61	1648.8
66	6.5	1535.56	148.576	1798.18	1797.33

Fazit: Es sieht so aus, als ob folgender Zusammenhang gilt:

Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der gegebenen Randfunktion.

Literatur/Quellenangaben

www.sinus.nrw.de

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial

Didaktischer Kommentar

Das Material zeigt einen Weg, wie man von einem anwendungsbezogenen Einstieg in die Integralrechung zum Hauptsatz der Integralrechnung gelangen kann, ohne die Schülerinnen und Schüler durch komplizierte algebraische Umformungen zu verwirren. Die Basis an Beispielen ist sehr schnell auf viele Funktionsklassen erweiterbar.

Die Aufgabe setzt voraus, dass die Lernenden in einer Einführungsphase bereits die Idee der Kumulation einer Größe erfasst haben und eine numerische Methode zur Berechnung des Bestands entwickelt haben. Dies kann über die Approximation mit Rechtecken oder auch mit Trapezen erfolgen. Meine Schülerinnen und Schüler haben immer Trapeze vorgezogen, da sie diese Annäherung als genauer empfunden haben. Deshalb wird hier auch ein Zugang mit Trapezsummen vorgestellt. In den Anwendungsaufgaben ist die untere Grenze häufig 0, dies wird hier übernommen.

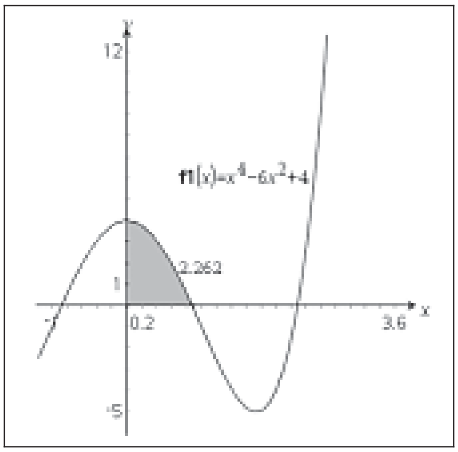
In der Differenzialrechnung skizzieren die Lernenden Graphen von Ableitungsfunktionen und bearbeiten auch die umgekehrte Aufgabe: sie rekonstruieren zum Graphen einer Ableitungsfunktion den Funktionsgraphen. Wenn mit den Funktionstermen entsprechend verfahren wurde, kennen die Lernenden bereits vor der Einführung in die Integralrechnung den Begriff Stammfunktion.

Da das Material im Unterricht im Anschluss an die Einführungsphase zur Integralrechnung bearbeitet wird, können die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben selbständig in Partnerarbeit oder Kleingruppen lösen. Beim Argumentieren müssen sie Zusammenhänge aus der Differenzialrechnung reaktivieren, so dass das Material auch einen Beitrag zur Vernetzung leistet. Die Lernenden achten mitunter nur auf charakteristische Punkte. Um auch Monotonie- und Vorzeichenüberlegungen einzubeziehen bedarf es meist eines Hinweises durch die Lehrer. Für den Ergebnisvergleich werden einige Lösungen zum Schluss vor der Klasse präsentiert. Dabei reicht es, die Handhelds an ein ViewScreen™ anzuschließen.

Zusatzmaterial

Erkunden Sie die Möglichkeiten, die Ihnen der Rechner zur Integration bietet!

1. In **Graphs & Geometry** gibt es einen Menüpunkt, mit dem man Integrale unter Funktionen bestimmen kann. Mit der Funktion aus Teil 3 des Arbeitsblatts sieht ein mögliches Beispiel so aus:



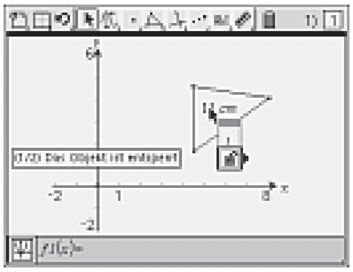
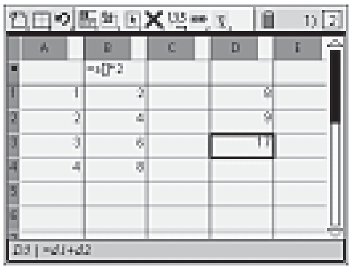
Rechnen Sie so einige Ergebnisse aus der Tabelle nach.

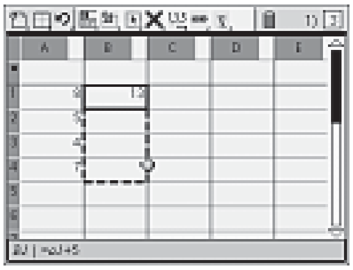
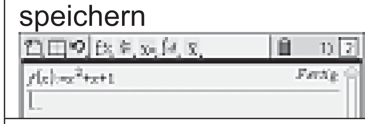
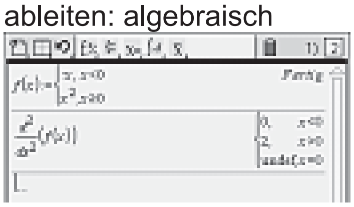
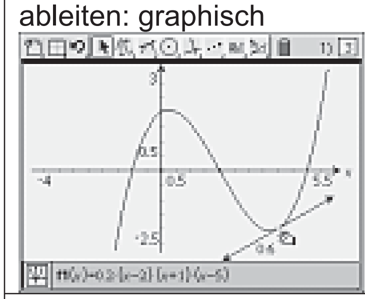
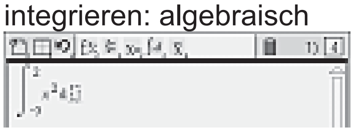
2. Im **Calculator** gibt es ebenfalls Möglichkeiten, Integrale und Stammfunktionen zu berechnen. Informieren Sie sich darüber im Handbuch und lösen Sie damit einige Aufgaben aus Ihrem Schulbuch.

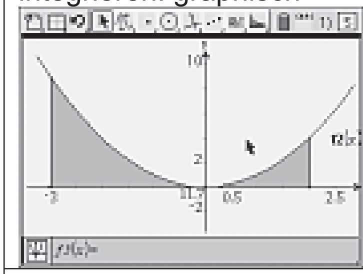
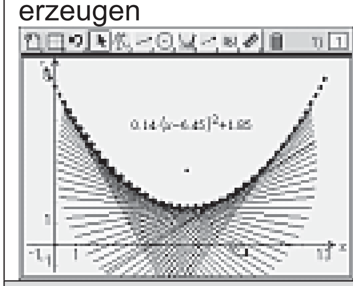
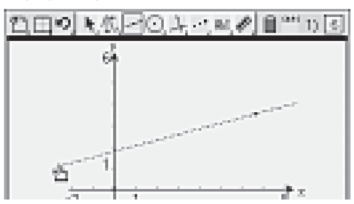
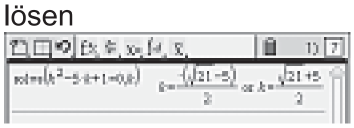
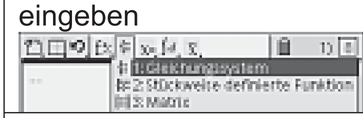
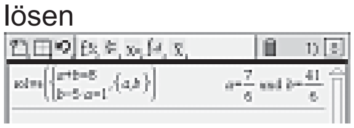
Glossar

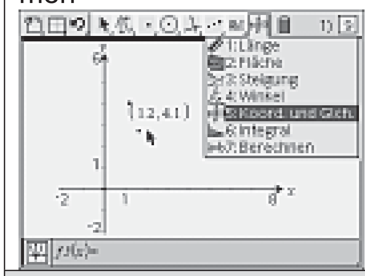
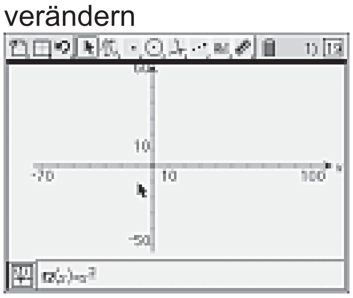
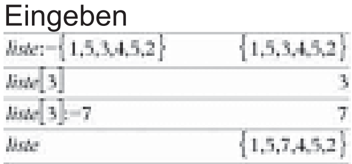
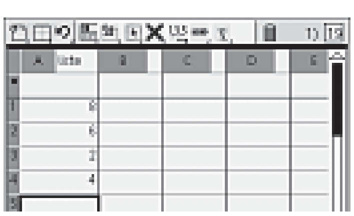
Im Glossar finden Sie Erläuterungen zu den in den Materialien grau unterlegten Begriffen, wie z. B. Applikationen. Hier einige Lesehilfen:

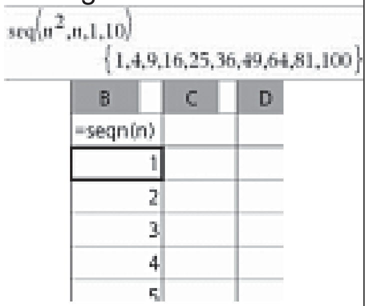
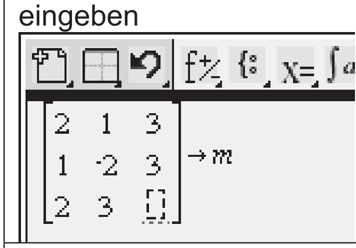
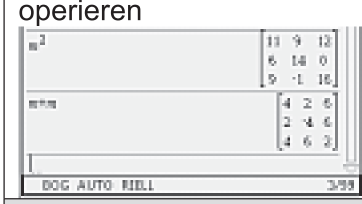
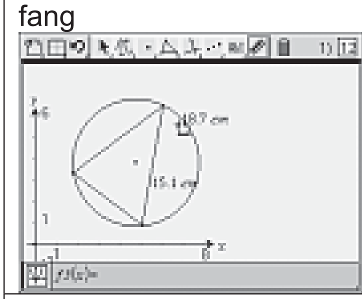
- In der linken Spalte stehen die jeweils in den Einheiten genannten Begriffe. Teilweise sind diese zusammenzusetzen, wie z. B. „Applikationen aufrufen“
- Zum Beginn jeder Erläuterung **stehen** die Applikationen, bei denen die jeweiligen Beschreibungen gelten, **fett** gedruckt. Die Applikationen sind immer **fett gedruckt.**.
- TI-Nspire™ CAS spezifische Begriffe, wie z. B. *Sperren* werden *kursiv* gedruckt. So soll verhindert werden, dass diese Begriffe mit alltäglichen Begriffen verwechselt werden.
- Soll ein Text oder ein Befehl über die Tastatur eingegeben werden, so werden die für das Handheld typischen Tasten (u.a. menu, 1, …) in eckigen Klammern [.] abgebildet. Zusätzlich enthalten die eckigen Klammern Bezeichnungen von Menüpunkten, die angesteuert werden können (z. B. 3: Attribute).
- Befehle oder Texte, die über die Tastatur eingegeben werden sollen sind unterstrichen. Beispiel: =a[ ]*2
- … ist ein Auslassungszeichen. Hier wären ausführliche Beschreibungen nicht angebracht. Es geht unmittelbar aus dem Bedienungskontext hervor, wie zu verfahren ist.

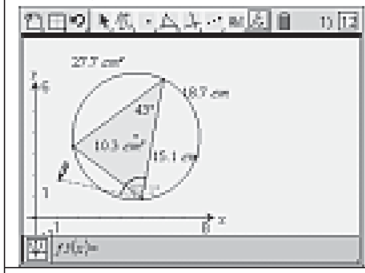
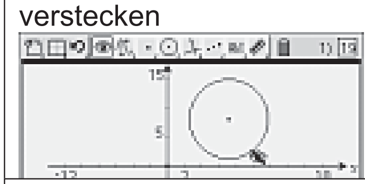
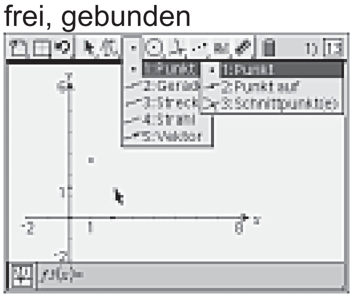
Applikationen	
aufrufen	**Alle Applikationen** Jeder leeren Seite können die *Applikationen* zugeordnet werden. Soll dem aktuellen *Dokument* eine neue *Seite* mit einer *Applikation* zugeordnet werden, so erreicht man das über [menu, ·, …].
Attribute	
verändern 	**Graphs & Geometry** [menu, 1, 3: Attribute] Nahezu alle grafischen Objekte haben *Attribute*, die verändert werden können, z.B. um Objekte hervorzuheben werden. Besonders zu erwähnen ist das *Sperren*, da mit ihm z.B. Längen- oder Flächenmaße fixiert werden können. Versuchen Sie beispielsweise, die Fläche eines Dreiecks (Linien, besondere) zu messen, zu *sperren* und anschließend die Punkte des Dreiecks zu verschieben.
Formeln	
eingeben 	**Lists & Spreadsheet** Möglichkeiten: • Spaltenformeln werden in der zweiten Zeile eingegeben. • Bezüge zu anderen Spalten erhält man, indem der Spaltenbezeichnung [ ] anhängt wird. • In einer Zelle können Formeln eingegeben werden, die Bezüge zu anderen Zellen herstellen (z.B. =d1+d2). Die Eingaben werden jeweils mit [enter] abgeschlossen. Dabei kann auch auf fest implementierte Formeln (z. B. die Formel zur Berechnung von Summen (=sum(.:.)) zurückgegriffen werden.

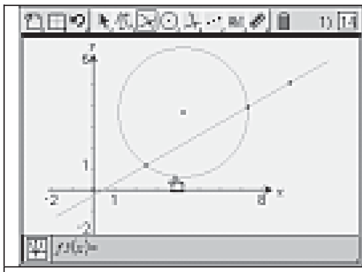
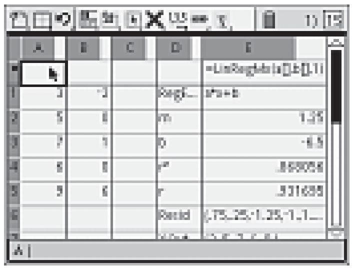
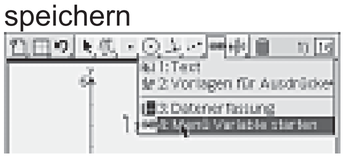
kopieren 	**Calculator** Formeln können mit Hilfe der Cursortasten (◀▶▲▼) oder der Maus angesteuert, kopiert und durch Drücken von [enter] kopiert werden. **Lists & Spreadsheet** Formeln in Zellen können auf verschiedene Weisen kopiert werden. Die einfachste Variante ist es, eine Zelle zu markieren, durch [ctrl, C] in den Zwischenspeicher zu kopieren, die Zielzelle zu markieren und mit [ctrl, V] einzufügen. Soll eine Formel in einer Spalte durchgängig kopiert werden, so kann man mit der Maus an den unteren rechten Rand der Zelle gehen und die Formel durch Ziehen (mit [click]) vervielfältigen.
Werte einsetzen	**Calculator** Hinter die Formel | setzen. Das erreicht man beim Handheld mit [ctrl, sto→]. Dann dem Variablennamen Werte zuordnen (z.B. $a^2+a\|a=2$). **Graphs & Geometrie** [menu, 8, 7: Berechnen] Die als Text eingegebene Formel anklicken; anschließend die einzusetzenden Werte anklicken. Welche Variable jeweils gesucht ist, wird angezeigt.
Funktionen	
Betrag	**Alle Applikationen** Beträge |.| können mithilfe der Funktion ABS(.) eingegeben werden.
Ganzzahl	**Alle Applikationen** Die Nachkommastellen von Dezimalzahlen können mithilfe der Funktion INT(.) abgeschnitten werden.
speichern 	**Calculator** z. B. durch Eingabe von f(x):=…
abschnittsweise 	**Calculator** [menu, 2, 2: Stückweise definierte Funktion] Um Funktionen abschnittsweise zu definieren, steht eine Maske bereit. Neben den einzelnen Funktionstermen müssen auch deren Geltungsbereiche festgelegt werden.
ableiten: algebraisch  ableiten: graphisch 	**Calculator** [menu, 4, 1: Ableitung] Den abzuleitenden Term eingeben. Die Variable, nach der abgeleitet werden soll, im Nenner des Quotienten einsetzen. Evtl. ergänzen, die wievielte Ableitung berechnet werden soll. **Graphs & Geometry** Zeichnen Sie zuerst den Graphen einer Funktion. Anschließend wählen Sie die Tangente [menu, 3, 2: Gerade, 2: Tangente] aus dem Menü. Klicken Sie auf den Graphen. Es erscheint eine Tangente an dem Graphen. Messen Sie die Steigung dieser Tangente. Mithilfe der Maus kann die Tangente gezogen und auf dem Graphen abgefahren werden.
integrieren: algebraisch 	**Calculator** [menu, 4, 2: Integral] Integrale werden in der für die Schule üblichen Notation eingegeben.

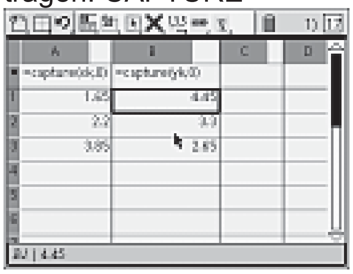
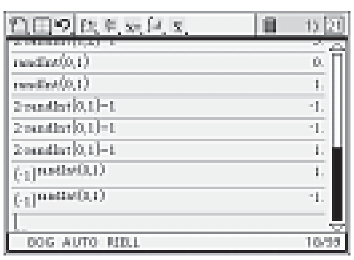
integrieren: graphisch 	**Graphs & Geometry** Auch Integrieren kann graphisch geschehen. Zeichnen Sie zuerst den Graphen einer Funktion. Anschließend wählen Sie [menu, 8, 6: Integral]. Wählen Sie zuerst den Graphen und dann die linke und rechte Grenze. Die Fläche zwischen Graph und x-Achse wird schattiert. Beachten Sie, dass nicht die Fläche, sondern das Integral bestimmt wird.
Zeichnen	**Graphs & Geometry** Graph zeichnen
Geometrischer Ort	
erzeugen 	**Graphs & Geometry** [menu, 5, 6: Geometrischer Ort] Wenn ein geometrisches Objekt (z. B. ein Punkt oder eine Gerade) mithilfe eines variablen Punktes gesteuert werden kann, so kann man sich den *geometrischen Ort* (z. B. die Ortskurve oder die Hüllkurve des geometrischen Objektes) anzeigen lassen. Dazu zuerst auf das betreffende geometrische Objekt und dann auf den variablen Punkt klicken.
Geraden	
zeichnen 	**Graphs & Geometry** [menu, 3, 2: Gerade] Eine Gerade wird durch zwei Punkte definiert. Wählen Sie den Menüpunkt Gerade aus und anschließend zwei Punkte. Die Gerade wird unmittelbar im Anschluss gezeichnet. Die Gerade ist nicht fix. So kann die Steigung oder auch die Länge des gezeichneten Ausschnitts dadurch verändert werden, dass an einem Punkt der Geraden mit der Maus gezogen wird.
Gitter	
anzeigen	**Graphs & Geometry** [menu, 2, 5: Gitter anzeigen]
Gleichungen	
lösen 	**Calculator** Zum Lösen von Gleichungen kann der Befehl <u>SOLVE</u> verwendet werden. Er benötigt zwei Argumente: Die Gleichung, die gelöst, und die Variable, nach der die Gleichung aufgelöst werden soll.
Gleichungssysteme	
eingeben 	**Calculator** [menu, 2, 1: Gleichungssystem] Gleichungssysteme können mithilfe einer Maske eingegeben werden.
lösen 	**Calculator** Um Gleichungssysteme zu lösen, kann der Befehl <u>SOLVE</u> genutzt werden. Als zweites Argument werden die Variablen in einer Liste ergänzt (Hier <u>{a,b}</u>).
Graph	
einer Funktion zeichnen 	**Graphs & Geometry** Klicken Sie in der *Eingabezeile* so lange auf den Button, bis der *Funktionenmodus* erscheint. Die Funktion kann hier direkt eingegeben und durch Bestätigen mit [enter] gezeichnet werden. Hinweis: Nach dem Zeichnen von Geraden und Parabeln können diese interaktiv verändert werden, indem man an dem Graphen zieht.
einer Funktion in Para-	**Graphs & Geometry**

meterdarstellung zeichnen	Klicken Sie in der *Eingabezeile* so lange auf den Button, bis der *Parametermodus* erscheint.
Zoomen	**Graphs & Geometry** Eine direkte Zoommöglichkeit gibt es in TI-Nspire™ CAS nicht (Stand 01.09.2006). Jedoch können alle Bildschirmausschnitte durch Verändern der Koordinatenachsen realisiert werden.
Koordinaten	
bestim- men 	**Graphs & Geometry** [menu, 7, 5: Koordinaten und Gleichungen] Man kann sich die Koordinaten von Punkten direkt auf dem Bildschirm anzeigen lassen. Die x- und y-Koordinate können wie normale Maßzahlen gespeichert (Werte speichern) werden.
Koordinatenachsen	
verändern 	**Graphs & Geometry** Die Einstellungen der Koordinatenachsen können mit der Maus durch Ziehen (wird durch [hand] aktiviert) an den Achsen oder durch die Eingabe von Werten verändert werden. Zieht man an den Enden der dargestellten Achsen, so werden diese verlängert oder verkürzt. Zieht man an den Skalenpunkten, so verändern sich die die Bereiche der beiden Achsen synchron. Wird vor dem Verändern der Achsen [shift] gedrückt, so verändert sich nur eine Achse (Beim PC Shift gedrückt halten). Die Einstellung der Koordinatenachsen können auch durch Einstellen der Attribute verändert werden.
Linien, besondere	
Strecke, Strahl, Vektor	**Graphs & Geometry** [menu, 3, …]
Dreieck, Polygone, Kreis	**Graphs & Geometry** [menu, 4, …]
Senkrechte, Parallele, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende	**Graphs & Geometry** [menu, 4, …]
Listen	
Eingeben  	**Calculator** Listen bestehen aus mehreren Elementen (oft aus Zahlen). Listen kann man festlegen, indem man z.B. die Elemente in { }-Klammern und durch Komma getrennt eingibt. Einzelne Elemente lassen sich aufrufen oder verändern, indem man den Listennamen um [ ]-Klammern und die Nummer der entsprechenden Elements ergänzt. **Lists & Spreadsheet** Eleganter können Listen in dieser Applikation definiert werden: Den Namen der Liste in der obersten Zeile festlegen und anschließend Werte in die Zellen der Tabellenkalkulation eingeben.

Erzeugen 	**Calculator, Lists & Spreadsheet** Weisen Listen ein bestimmtes Muster auf, so ist es – vor allem bei langen Listen – mühselig, diese durch Eingabe zu definieren. Einfacher ist es mit seq-Befehl zu nutzen. Dieser benötigt insgesamt 4 Argumente: Eine Folge, die Laufvariable der Folge, den ganzzahligen Startwert für die Laufvariable und den ganzzahligen Endwert für die Laufvariable. Häufig benötigt werden Listen, die die Zahlen von 1 bis n enthalten (Also Folgen der Art seq(n,n,1,50)). In **Lists & Spreadsheets** kann dafür die vereinfachte Formel seqn(n) verwendet werden.
verarbeiten: CumSum	**Calculator, Lists & Spreadsheet** Oft ist es notwendig, die Elemente einer Liste sukzessive zu addieren (z.B. {1,2,3,4} → {1,3,6,10}). Das leistet der Befehl cumsum(.). Als Argument wird die betreffende Liste angegeben.
graphisch darstellen 	**Graphs & Geometry** Klicken Sie so lange auf den Button in der *Eingabezeile*, bis der *Streudiagrammmodus* erscheint. Anschließend geben Sie die Namen der beiden Listen an, die als Punkte abgetragen werden sollen. Es erscheint ein Streudiagramm. Das Aussehen des Diagramms (z.B. das Verbinden von Punkten miteinander) kann über das Verändern der Attribute erreicht werden.
Maßübertragung	
durchführen	**Graphs & Geometry** [menu, 5, 7: Maßübertragung] Klicken Sie zuerst auf den Wert, den Sie gerne auf eine Achse oder ein anderes geeignetes Objekt übertragen möchten und anschließend auf das Objekt (z. B. die Koordinatenachsen).
Matrizen	
eingeben 	**Calculator** [menu, 2, 2: Matrix] Zuerst die Anzahl der Spalten und Zeilen der Matrix angeben. Anschließend wird eine Maske bereitgestellt, in der die Matrix direkt eingegeben werden kann. Auch Vektoren können auch mithilfe von Matrizen definiert werden.
operieren 	**Calculator** Mit Matrizen können die Operationen +, – und × ausgeführt werden. Dabei gelten die bekannten mathematischen Regeln.
Messen	
Abstände, Längen, Umfang 	**Graphs & Geometry** [menu, 8] Hier stehen mehrere Messwerkzeuge zur Verfügung. Mit dem Werkzeug „Länge“ können Abstände, Längen und Umfänge gemessen werden. Dazu werden die Objekte einfach nacheinander angeklickt.
Flächeninhalt	**Graphs & Geometry** [menu, 8, 2: Fläche] Ebenso bestimmt man den Flächeninhalt …

Winkel 	**Graphs & Geometry** [menu, 8, 4: Winkel] … oder Winkel.
Steigung	**Graphs & Geometry** [menu, 8, 3: Steigung] Von Geraden oder Tangenten kann die Steigung gemessen und angezeigt werden.
Objekte (graphische):	
benennen	**Graphs & Geometry** [menu, 7, 1: Text] Auf das graphische Objekt klicken und zugehörigen Text eingeben. Objekt und Text sind dann gekoppelt.
hervorheben: Kurven stricheln	**Graphs & Geometry** Die Attribute von Graphen und anderen Kurven können verändert werden. So ist es z.B. möglich Graphen zu stricheln.
hervorheben: Fläche schattieren	**Graphs & Geometry** Ebenso können die Attribute von Flächen verändert werden, um diese z.B. zu schattieren.
verstecken 	**Graphs & Geometry** [menu, 1, 2: Markieren/Anzeigen] Klicken Sie dann auf die Objekte, die versteckt werden sollen.
spiegeln	**Graphs & Geometry** [menu, 6, …] Wählen Sie die gewünschte Spiegelung (Punkt-, Achsenspiegelung), dann das Objekt und den Spiegelpunkt, bzw. die Spiegelachse.
Punkt	
frei, gebunden 	**Graphs & Geometry** [menu, 3, 1: Punkt, 1: Punkt] Einen freien Punkt kann man durch Auswahl des entsprechenden Menüpunktes und anschließende Festlegung der Position mit der Maus definieren. Dabei ist zu beachten, dass Punkte, die auf Objekten (z.B. den Koordinatenachsen) platziert werden, nicht mehr frei beweglich sind. Freie Punkte liegen – sozusagen – über den Koordinatenachsen und sind nicht mit ihm verbunden. Am leichtesten erkennt man die Funktionsweise, indem man einige Punkte auf den Achsen und einige außerhalb der Koordinatenachsen platziert. Verändern Sie dann die Einstellungen der Achsen und achten Sie auf das Verhalten der definierten Punkte.
auf Objekt	**Graphs & Geometry** [menu, 3, 1: Punkt, 2: Punkt auf] Mit Bezug auf die meisten Objekte in **Graphs & Geometry** können weitere Objekte – wie zum Beispiel Punkte – definiert werden.
neu definieren	[menu, 1, 5: Neu definieren] Klicken Sie auf den Punkt, den Sie mit einem anderen Objekt verknüpfen wollen und anschließend auf das gewünschte Objekt.
Schnittpunkte	**Graphs & Geometry** [menu, 3, 1: Punkt, 2: Punkt auf] Wann immer zwei Objekte Punkte gemeinsam haben, ist es möglich, diese Punkte zu markieren und als neue Punkte zu definieren. Dazu einfach die

	betreffenden Objekte nacheinander anklicken.
Mittelpunkt	**Graphs & Geometry** [menu, 5, 5: Mittelpunkt] Klicken Sie auf die beiden Punkte, deren Mittelpunkt Sie bestimmen möchten.
Regression	
durchführen 	**Lists & Spreadsheet** [menu, 7, 3: Regressionen, … (z. B. 2: Lineare Regression (mx+b))] Die notwendigen Listen können in Spalten eingegeben werden. Die Ergebnisse werden ebenfalls in Zellen von **Lists & Spreadsheet** angezeigt. Diese Regression ist interaktiv, d.h., dass sich das Ergebnis der Regression verändert, wenn man deren Berechnungsgrundlage, also die Listen, verändert. Auf diese Weise lassen sich auch andere Regressionsmethoden (quadratische, …) realisieren.
Seiten	
teilen	**Alle Applikationen** [menu, ·, 5: Seitenlayout] *Seiten* können – z. B. durch *Seiten* teilen – verschiedene *Layouts* erhalten.
Text	
eingeben	**Graphs & Geometry** [menu, 7, 1: Text] Den Mauszeiger positionieren [enter], drücken und den Text eingeben. Mit [enter] die Texteingabe abschließen. **Notes** Diese *Applikation* ist eine kleine Textverarbeitung. Texte können über die Tastatur eingegeben werden.
Umlaute	**Alle Applikationen** Geben Sie den Buchstaben ein, zu dem Sie den zugehörigen Umlaut benötigen. Anschließend drücken Sie [⚐].
Variablen	
aufrufen	**Calculator** Variable eingeben und [enter] drücken.
verknüpfen	**Graphs & Geometry** Die Maus auf eine Koordinate oder ein anderes variables Zahlenobjekt bewegen. Mit [ctrl, ☝] wird das *Variablen Menü* aufgerufen. Hier können Sie Zahlenobjekte mit unter Variablennamen gespeicherten Werten *verknüpfen*; die Variablennamen werden angezeigt und können dann ausgewählt werden. Verändert sich die Variable, so verändert sich auch das *verknüpfte Zahlenobjekt* und umgekehrt. **Lists & Spreadsheet** Ähnlich wie in **Graphs & Geometry**. Hier sind die Zahlenobjekte jedoch die Inhalte von Zellen.
Werte	
speichern 	**Lists & Spreadsheet, Graphs & Geometry** In diesen *Applikationen* können Werte mithilfe des *Variablen-Menüs* (Menü Variable starten) oder der Tastenkombination [ctrl, ☝, Variable speichern] gespeichert werden. Werte in Zellen, Koordinaten oder auch Maßzahlen können unter Variablennamen gespeichert werden, die dann von jeder Applikation im

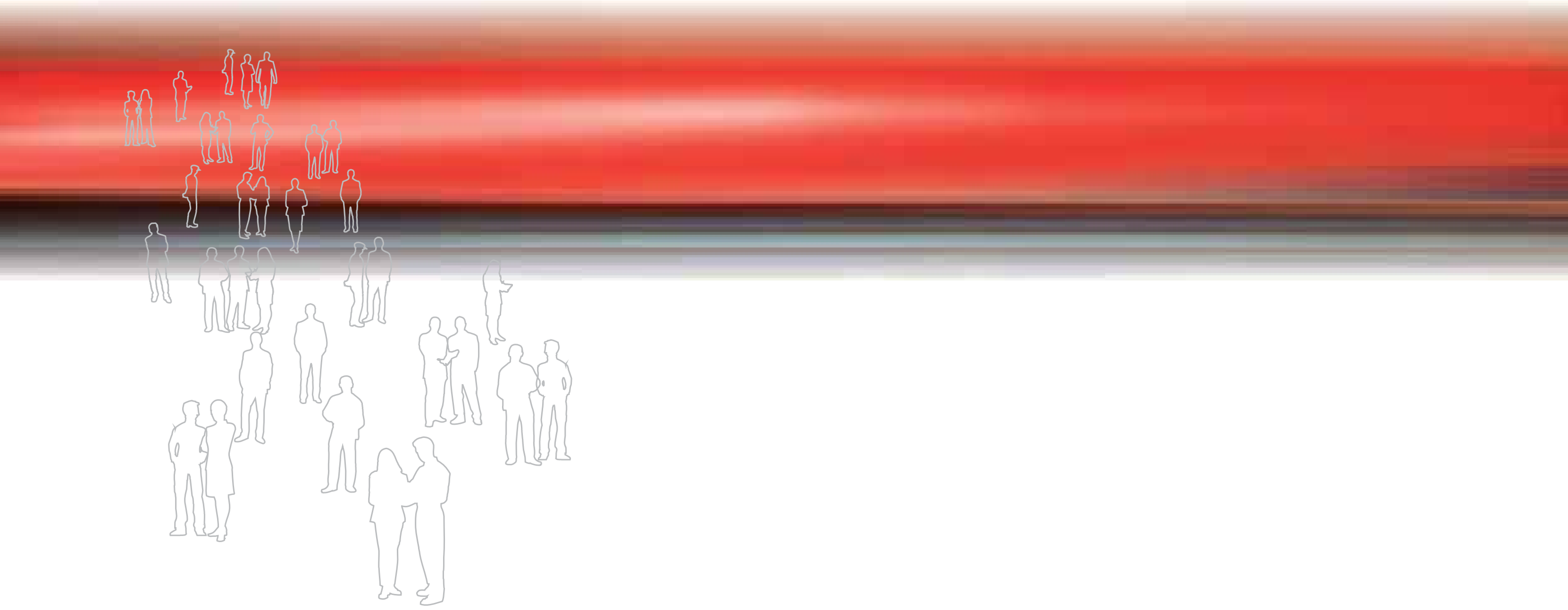
	gleichen *Problem* verwendet werden können. Dazu einfach mit dem Kettensymbol die gewünschte Zahl anklicken. **Calculator** Hier gibt es zwei Möglichkeiten, Werten Variablen zuzuordnen: Entweder mithilfe von Store (z. B. [3, sto, A]). oder durch := (z.B. a:=3).
sammeln, in Tabelle übertragen: CAPTURE 	**Lists & Spreadsheet** Hier können Listen eingerichtet werden, in der sich die Werte von Variablen speichern lassen. Mit dem Kommando =capture(.,0) mit der zugehörigen Variablen wird die Liste angelegt. Nach jedem Drücken von Strg+TAB, bzw. ctrl+tab (Beim Handheld müssen die Tasten nacheinander gedrückt werden!) wird ein Wert bzw. werden die festgelegten Werte gespeichert. Die Liste verlängert sich automatisch. Dabei können mehrere Variablen gleichzeitig verarbeitet werden. Ändert man das Argument zu 1 (also =capture(.,1)) so werden die Daten bei jeder Veränderung der Variablen aufgenommen.
Zellen	
Füllen	**Lists & Spreadheet** Zellen können mit Werten oder Formeln gefüllt werden.
Kopieren	Formeln kopieren
Zufallszahlen	
erzeugen  	**Calculator** Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Zufallszahlen zu erzeugen: rand() liefert Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Entsprechend können andere Zahlbereiche durch Multiplikation und Addition generiert werden. Für ganzzahlige Zufallszahlen kann die etwas elegantere Anweisung randint(a,e) verwendet werden, wobei a die kleinste und b die größte mögliche erzeugte Zufallszahl ist. Der Befehl randseed setzt den Zufallsgenerator zurück, bzw. – wenn eine Zahl angegeben wird – an eine bestimmte Stelle. Oft ist es zweckmäßig direkt mehrere Zufallszahlen zu erzeugen. Das kann mit einem weiteren Argument in den jeweiligen Anweisungen realisiert werden. Die Daten werden in Listen gespeichert. Um Zufallszahlen zu erzeugen, die nicht unmittelbar nebeneinander liegen (z.B. -1 und 1), kann man zusätzlich Rechenoperationen anwenden. Im Screenshot werden dafür zwei verschiedene Möglichkeiten präsentiert.

Notizen:

Notizen:

Notizen:

Notizen:



T^3-AKZENTE

Aufgaben mit TI-Nspire™ CAS

T³ DEUTSCHLAND
T³ ÖSTERREICH
T³ SCHWEIZ

www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

CL2006NSPIRECASHR1/D
NSCAS+/SL/1E5/M
ISBN 3-934064-68-X