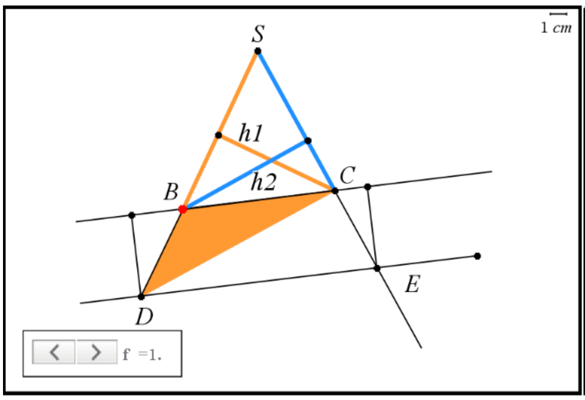
Strahlensätze und zentrische Streckung
mit Hilfe der Geometry-Applikation der TI-Nspire™ CX CAS Technologie erarbeiten

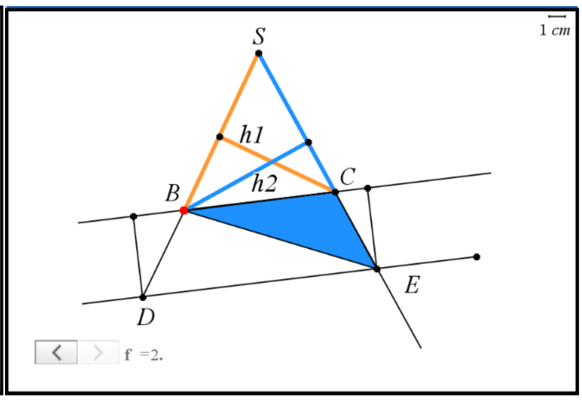
Wolfgang Häfner

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Behandlung der Strahlensätze und der zentrischen Streckung.
Die Aussagen in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss lassen hinsichtlich der Behandlung der zentrischen Streckung, der Strahlensätze und der Ähnlichkeit geometrischer Objekte einen erheblichen Interpretationsspielraum zu und sind eher anwendungsorientiert.
Nachdem ich mir auch einige Lehrpläne und Lehrbücher zu diesem Stoffgebiet angesehen hatte, habe ich Überlegungen angestellt, wie man die Behandlung der zentrischen Streckung und der Strahlensätze umsetzen könnte.
Grund dafür war, dass das Vorgehen in den mir zur Verfügung stehenden Lehrbüchern nicht immer meinen Vorstellungen entsprach.
Hier wurde mit der zentrischen Streckung begonnen und deren Eigenschaften mehr oder weniger vollständig aus Bespielen und aus der Anschauung heraus gewonnen.
Die Strahlensätze wurden danach auf die Eigenschaften der zentrischen Streckung zurückgeführt, also auf nicht wirklich bewiesene Erkenntnisse.

Mein Vorschlag besteht nun darin, den Mangel an Beweisen und Begründungen dadurch zu beseitigen, dass man zuerst die Strahlensätze beweist und danach die zentrische Streckung behandelt, deren Eigenschaften mit Hilfe der Strahlensätze bewiesen werden können.
Nutzt man dabei vor allem die Möglichkeiten der Applikation ‚Geometry', so lassen sich auch die anfangs für manche SuS nicht trivialen Beweise relativ gut realisieren.
Die Beantwortung der Frage, wann man den Begriff der Ähnlichkeit und dessen Behandlung erstmals und abschließend im Unterricht einbringt, überlasse ich, auch weil man hier durchaus unterschiedlicher Ansicht sein wird, dem Leser.
Die hier dargestellte Vorgehensweise ist bewusst nicht vollständig und ist daher, falls sie angenommen wird, entsprechend zu komplettieren. Es kommt mir vor allem darauf an, die oben beschriebene Idee zu erläutern. Deshalb habe ich auch darauf verzichtet, manche Definitionen bzw. Sätze, die ja auch hinlänglich bekannt sind, extra oder ausformuliert zu notieren.

Der erste Strahlensatz





Zugrunde gelegt wird die in den beiden Abbildungen ersichtliche ‚Geometry'-Seite.
Der Schieberegler für die Variable f ist auf die Schrittweite 1, Minimum 0, Maximum 2 eingestellt.

f=0: Die Dreiecke ΔECB und ΔDCB (unvollständig) werden eingeblendet.
f=1: Das Dreieck ΔDCB wird eingeblendet.
f2=: Das Dreieck ΔECB wird eingeblendet.
Die Punkte B und S und der Strahl SE können bewegt werden.

Die SuS sollen erkennen und begründen, dass die Dreiecke ΔECB und ΔDCB den gleichen Flächeninhalt haben. Sie sollen außerdem die Dreiecke finden, deren eine Höhe h_1 bzw. h_2 ist.
h_1: $\Delta BCS\,, \Delta DCB, (\Delta DCS)$
h_2: $\Delta BCS\,, \Delta BEC, (\Delta BES)$

Auf der Basis dieser Erkenntnisse ergibt sich folgende Herleitung:
$A_{DCB} = A_{ECB}$ (gleiche Grundseite $\overline{BC}$, gleiche Höhe, parallele Geraden-Abstand)

$$A_{DCB} = A_{ECB} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot h_1 = \frac{1}{2}\overline{CE}\cdot h_2 \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}\cdot h_1 = \overline{CE}\cdot h_2$$

$$A_{BCS} = \frac{1}{2}\overline{SB}\cdot h_1 = \frac{1}{2}\overline{SC}\cdot h_2 \quad\Rightarrow\quad \overline{SB}\cdot h_1 = \overline{SC}\cdot h_2$$

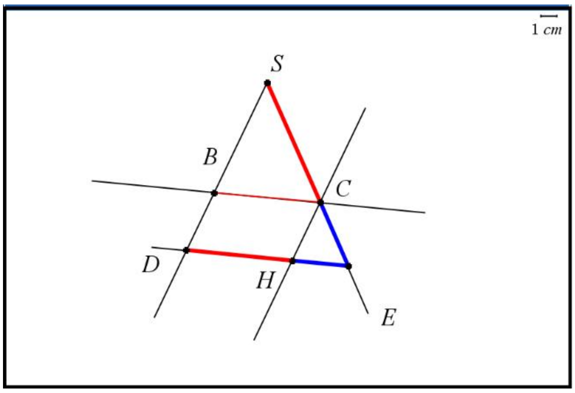
$$\Rightarrow\quad \frac{\overline{SB}\cdot h_1}{\overline{BD}\cdot h_1} = \frac{\overline{SC}\cdot h_2}{\overline{CE}\cdot h_2} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\frac{\overline{SB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CE}}}$$

Damit gilt dann auch:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{SC}} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{SD}-\overline{SB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}-\overline{SC}}{\overline{SC}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} - 1 = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}} - 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\overline{SB}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SE}}}$$

Der zweite Strahlensatz



Die Strahlensatzfigur wird durch die Gerade CH parallel zur Geraden SD ergänzt.
Dadurch erhält man eine zusätzliche Strahlensatzfigur mit den Strahlen ES und ED, die von den Parallelen SD und CH geschnitten werden.
Auf diese wendet man nun den ersten Strahlensatz wie folgt an:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{CS}}$$

Die folgende Umformung dieser Verhältnisgleichung ergibt den zweiten Strahlensatz.
Dabei wird verwendet, dass $\overline{HD} = \overline{CB}$ ist, da DHCB ein Parallelogramm ist.

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{HD}} + 1 = \frac{\overline{EC}}{\overline{CS}} + 1$$

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{HD}} + \frac{\overline{HD}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{CS}} + \frac{\overline{CS}}{\overline{CS}}$$

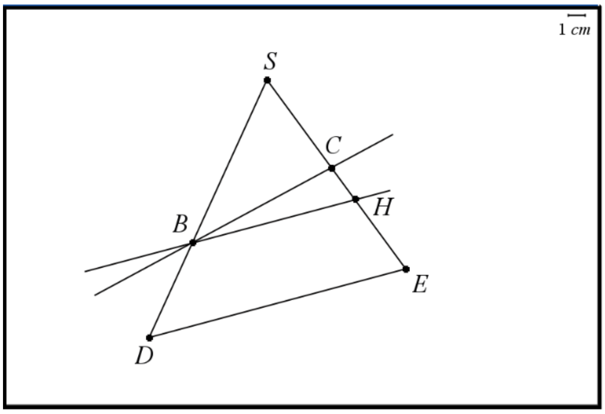
$$\frac{\overline{ED}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{ES}}{\overline{CS}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CB}}$$

Umkehrung 1. Strahlensatz

$\overline{SD} \nparallel \overline{SE}$, $B \in \overline{SD}$; $C \in \overline{SE}$

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BC} \parallel \mathrm{DE}$$

Beweis (indirekt):



Voraussetzung:

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}}$$

Annahme:

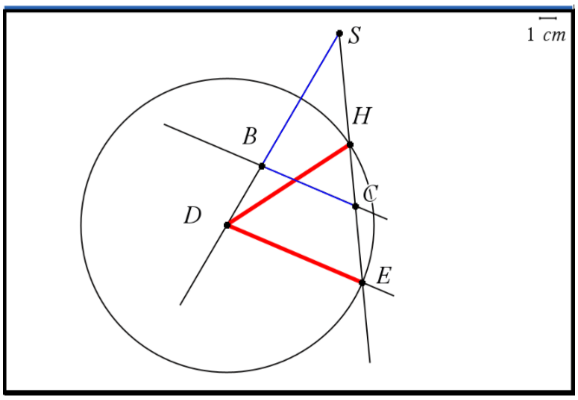
$\mathrm{BC} \nparallel \mathrm{DE}$

Es sei BH eine Gerade parallel zu DE und $H \in SE$.
Nach dem 1. Strahlensatz gilt dann

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SC} = \overline{SH} \quad \Rightarrow \quad C = H \quad \Rightarrow \overline{BC} = \overline{BH} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BC} \parallel \mathrm{DE}$$

Widerspruch zur Annahme
Die Annahme ist falsch. Es gilt $\mathrm{BC} \parallel \mathrm{DE}$.

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar
Mit Hilfe der folgenden Zeichnung kann bewiesen werden, dass der 2. Strahlensatz nicht umkehrbar ist (Gegenbeispiel)

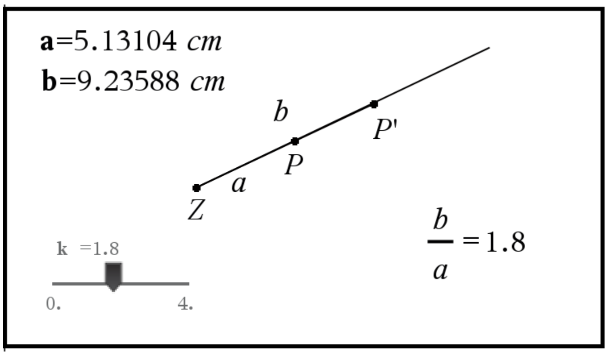


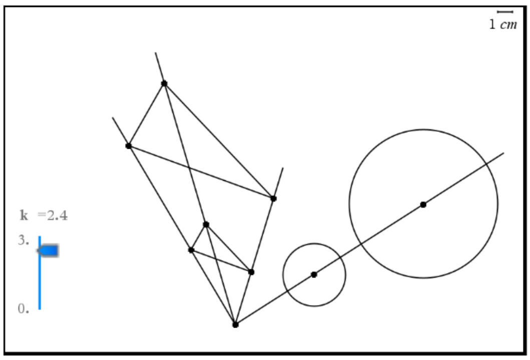
Zentrische Streckung

Nun sind wir nicht nur in der Lage die zentrische Streckung zu definieren, sondern auch ihre Eigenschaften mit Hilfe der Strahlensätze zu begründen.
Die Eigenschaften nur aus der Anschauung heraus zu ergründen, kann letztlich nicht zufriedenstellend sein.
Der Weg, bei dem anschaulichem Erkennen der Eigenschaften der zentrischen Streckung deren Begründung folgt, genügt den Ansprüchen des Faches Mathematik bestimmt besser.

Die Definition der zentrischen Streckung könnte man vielleicht erarbeiten über die Möglichkeit eine solche Abbildung mit Hilfe der Applikation ‚Geometry' über ‚Abbildung', ‚Streckung' zu konstruieren.
Dabei sollte man positive Streckfaktoren verwenden und später, an geeigneter Stelle nachholen, was bei negativen Streckfaktoren passiert, falls dies im Lehrplan vorgesehen ist.

Man beginnt auf einer ‚Geometry-Seite' damit, den Schieberegler für den Streckfaktor k zu erstellen. Danach zeichnet man die Punkte Z (Streckzentrum) und P. Mit dem Werkzeug ‚Streckung' erzeugt man das Bild P' des Punktes P bei einer Streckung mit dem Streckfaktor k und dem Streckzentrum Z. Anschließend zeichnet man den Strahl ZP und misst die Längen von $\overline{ZP'} = b$ und $\overline{ZP} = a$ und speichert diese als Variable a und b. Nun gibt man den Text $\frac{b}{a}$ ein und berechnet $\frac{b}{a}$. Mit Hilfe des Schiebereglers untersucht man, wie die Abbildung erfolgt und welche Bedeutung der Streckfaktor auf die Abbildung hat. Auf der Basis dieser Untersuchung definiert man den Begriff der Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k. Die Streckung eines Dreiecks und eines Kreises festigt die Vorstellung von der neu eingeführten Abbildung.



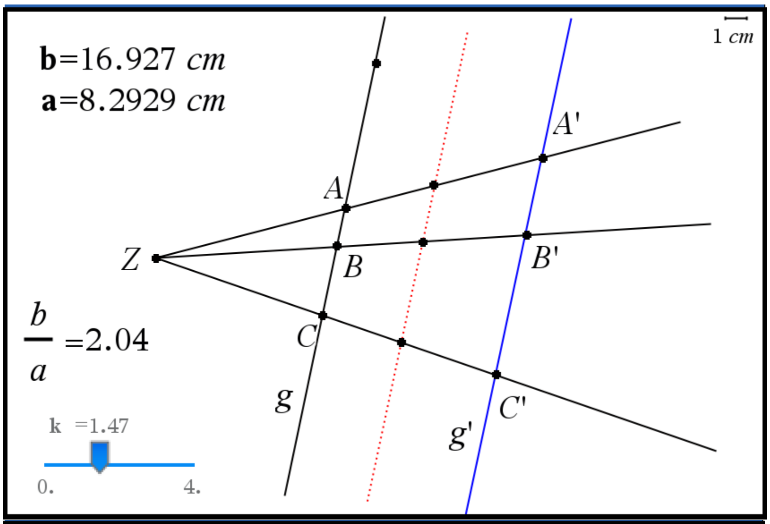


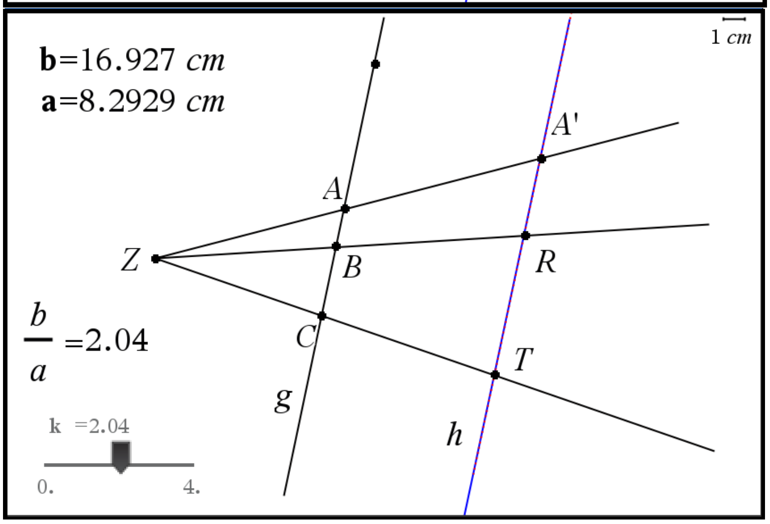
Zu Eigenschaften der zentrischen Streckung

Dass es genau einen Fixpunkt, das Streckzentrum, gibt, und dass Geraden, die durch das Streckzentrum gehen, auf sich selbst abgebildet werden, also Fixgeraden sind, geht unmittelbar aus der Definition der zentrischen Streckung hervor.

Wir wenden uns daher gleich weiteren Eigenschaften zu:

- Das Bild einer nicht durch das Streckzentrum verlaufenden Geraden ist eine zur Originalgeraden parallele Gerade.
  Für die Herleitung wird die nachfolgende ‚Geometry-Seite' erstellt.
  Hier ist $a = \overline{ZA}$ und $b = \overline{ZA'}$.
  Die Erstellung dieser und weiterer ‚Geometry-Seiten' erfolgt prinzipiell wie zuletzt.





Für das zweite Bild gilt nun:
A, B und C sind Punkte der Gerade g. A' ist das Bild von A bei der zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k. Also gilt:

$$\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}, also\ k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$$

Die Gerade h geht durch den Punkt A' und ist parallel zu g: Die Strahlen ZB und ZC schneiden h in den Punkten R bzw. T.

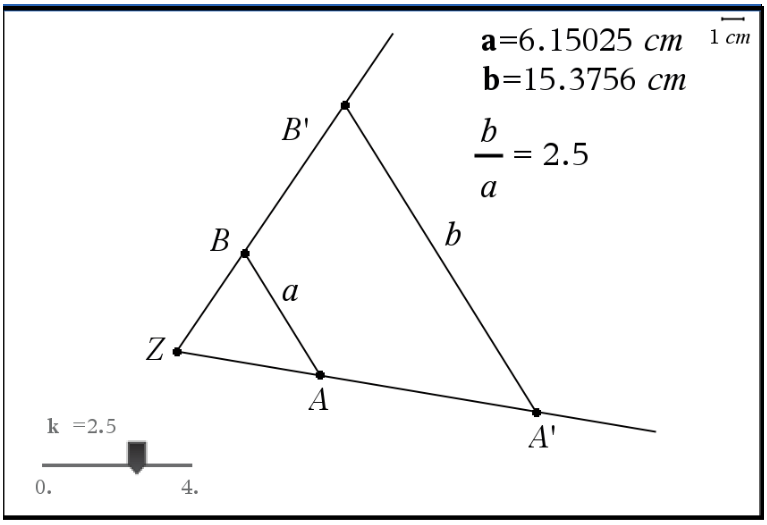
Aus dem 1. Strahlensatz folgt:
$$\frac{\overline{ZT}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZR}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = k$$
Daraus folgt $\overline{ZT} = k \cdot \overline{ZC}$ und $\overline{ZR} = k \cdot \overline{ZB}$.
R ist also der Bildpunkt von B und T der von C bei der zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k und dem Streckzentrum Z.
Die Bildpunkte von drei auf einer Gerade liegenden Punkte sind also ebenfalls Punkte ein und derselben Gerade, die zur Originalgeraden parallel ist.
Und jeder Punkt P der Gerade h ist Bild des Schnittpunktes von ZP und g.
Die Gerade h ist daher die Bildgerade von g bei dieser zentrischen Streckung.

- Das Bild einer Geraden ist bei einer zentrischen Streckung eine zur Originalgeraden parallele Gerade oder identisch mit der Originalgerade.

- Die Länge einer Bildstrecke bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k ist das k-fache der Originalstrecke.

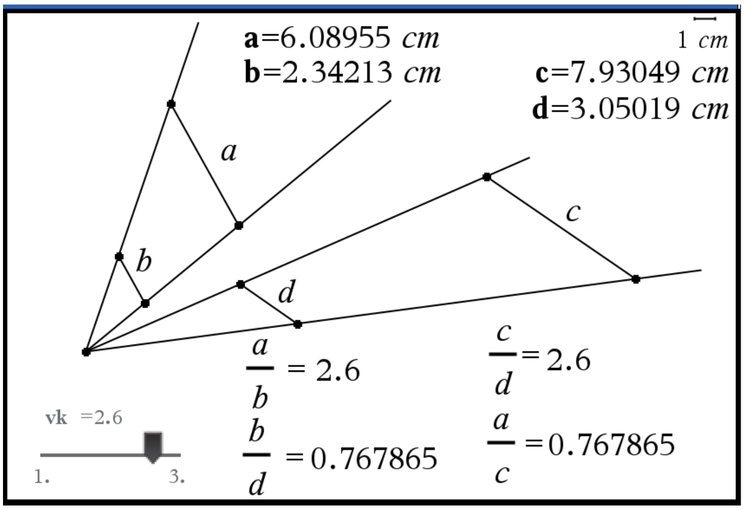
  Wenn die Strecke $\overline{AB}$ auf einer Fixgeraden liegt und wenn o.B.d.A. $\overline{ZA} < \overline{ZB}$, so folgt:
  $\overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}, \overline{ZA'} = k \cdot ZA$
  $\Rightarrow \quad \overline{A'B'} = \overline{ZB'} - \overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZB} - k \cdot ZA = k \cdot (\overline{ZB} - \overline{ZA}) = k \cdot \overline{AB}$

  Wenn $\overline{AB}$ auf keiner Fixgeraden liegt, ergibt sich folgendes Bild.



Da AB und $A'B'$ parallele Gerade sind, können wir den zweiten Strahlensatz anwenden und es gilt:
$$\frac{\overline{ZA'}}{ZA} = k = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = k \cdot a$$

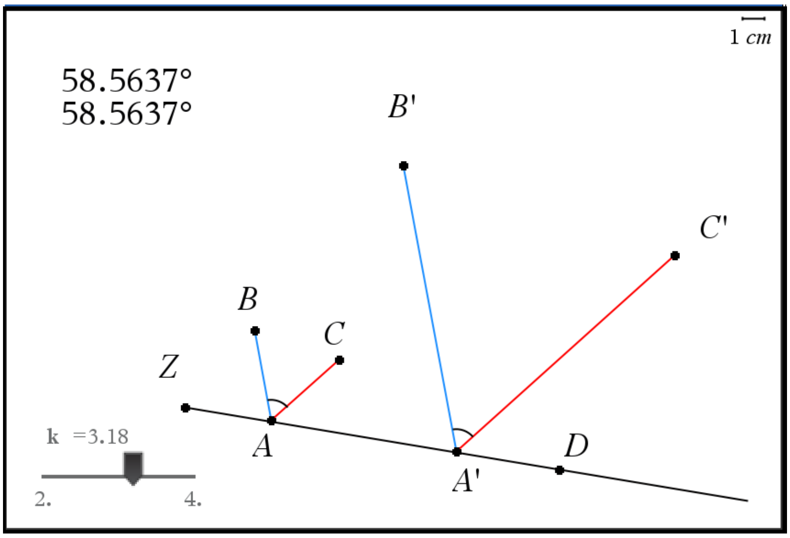
- Das Längenverhältnis einer Bildstrecke zu ihrer Originalstrecke ist der Streckfaktor k.
- Bei einer zentrischen Streckung ist das Längenverhältnis von zwei Originalstrecken genauso groß wie das Längenverhältnis der zugehörigen Bildstrecken.



- Es gilt:

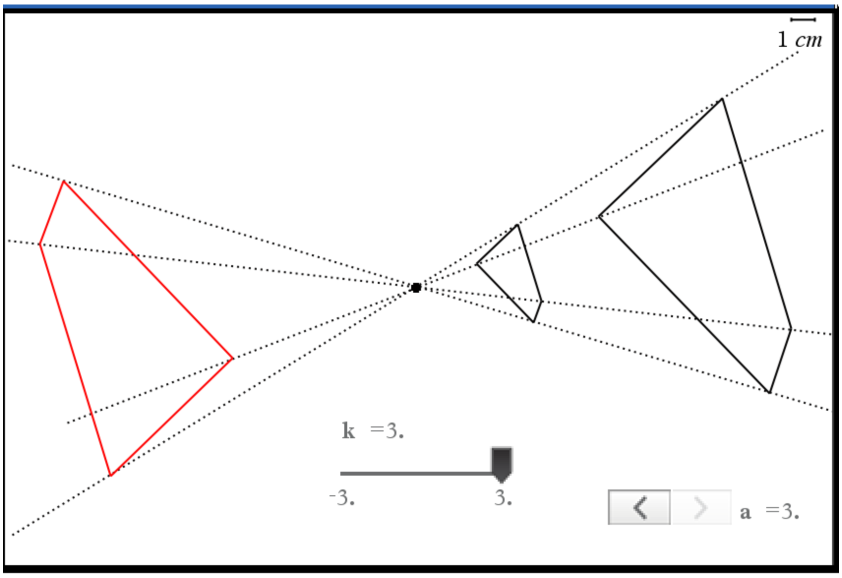
  $a = k \cdot b \text{ und } c = k \cdot d \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{k \cdot b}{k \cdot d} = \frac{b}{d}$

- Winkelgrößen bleiben bei einer zentrischen Streckung erhalten.



Da Bild- und Originalgerade bei einer zentrischen Streckung identisch oder parallel sind, schließen die parallelen Geraden mit einer durch Z gehenden Gerade Stufenwinkel gleicher Größe ein.
Es gilt:
$\sphericalangle DA'C' \cong \sphericalangle DAC \text{ und } \sphericalangle DA'B' \cong \sphericalangle DAB$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle C'A'B' \cong \sphericalangle CAB$

Da die zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor k und dem Streckzentrum Z die Hintereinanderausführung einer Streckung mit dem Streckfaktor $|k|$ und gleichem Streckzentrum und einer Punktspiegelung an Z entspricht, gelten auch für diesen Fall die besprochenen Gesetzmäßigkeiten, denn die Punktspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, weshalb die Längen und die Winkelgrößen bei der Spiegelung konstant bleiben und außerdem ist die Punktspiegelung geraden- und paralleltreu.



Quelle:
Veronika Kollmann, „Einführung der zentrischen Streckung“,
Einfuehrung_der_zentrischen_Streckung.pdf (uni-stuttgart.de)