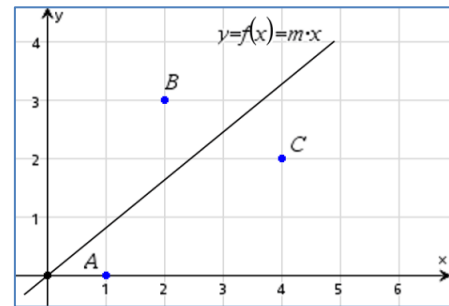


Proportionale Regression mit dem TI-30X Plus MathPrint

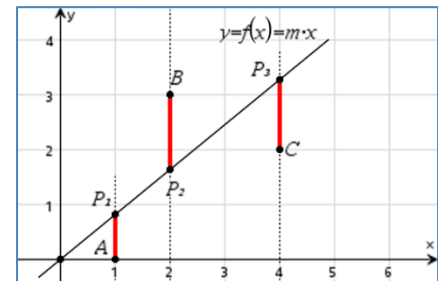
Die Grundidee an einem einfachen Beispiel erklärt:

Gegeben sind die Punkte $A(1; 0)$, $B(2; 3)$ und $C(4; 2)$. Gesucht ist die Gleichung $y = f(x) = m \cdot x$ einer Ursprungsgeraden, die einen vermuteten proportionalen Zusammenhang zwischen den x -Werten und den y -Werten möglichst optimal beschreibt.

Bei einem solchen Sachverhalt liegen die gegebenen Punkte meistens nicht auf einer Ursprungsgeraden. Sie streuen mehr oder weniger um jede der denkbaren Ursprungsgeraden. Unter denen soll nun diese gefunden werden, bei der die Summe der Abweichungen am geringsten ist. Wir erklären am Beispiel, was das bedeutet.



Die Abweichungen der gegebenen Punkte zur gesuchten optimalen Ursprungsgeraden lassen sich z. B. durch die rot markierten Strecken beschreiben. Dabei wollen wir uns vor Augen halten, dass der Anstieg m der gesuchten optimalen Ursprungsgeraden noch unbekannt ist. Unser Ziel besteht gerade darin, diesen Wert von m zu bestimmen.



Der Abstand von A zu P_1 entspricht dem Abstand d_1 der y -Werte von $A(1; 0)$ und $P_1(1; m \cdot 1)$. Damit gilt: $d_1 = 0 - m \cdot 1$.

Der Abstand von B zu P_2 entspricht dem Abstand d_2 der y -Werte von $B(2; 3)$ und $P_2(2; m \cdot 2)$. Damit gilt: $d_2 = 3 - m \cdot 2$.

Der Abstand von C zu P_3 entspricht dem Abstand d_3 der y -Werte von $C(4; 2)$ und $P_3(4; m \cdot 4)$. Damit gilt: $d_3 = 2 - m \cdot 4$.

Weil nun diese Differenzen positiv oder negativ sein können (je nachdem, ob die Punkte unter- oder oberhalb der Geraden liegen) und damit größere Abstände mehr und kleinere weniger ins Gewicht fallen, betrachtet man die Summe der Quadrate der Differenzen:

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2$$

Nun bestimmt man den Anstieg m der Ursprungsgeraden so, dass diese Summe möglichst klein wird.

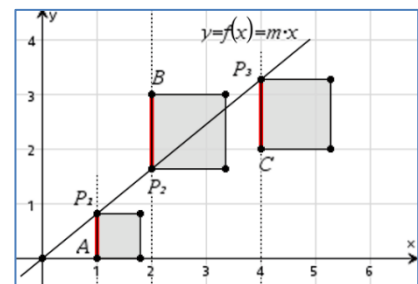
Für unser Beispiel heißt das:

$$(0 - m \cdot 1)^2 + (3 - m \cdot 2)^2 + (2 - m \cdot 4)^2$$

Dieser von m abhängige Term soll minimal werden. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich der Term einer quadratischen Funktion in m :

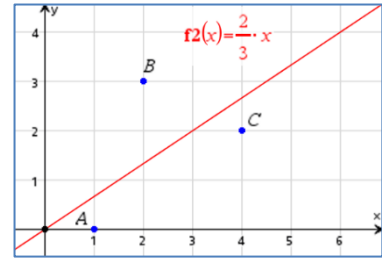
$$21 \cdot m^2 - 28 \cdot m + 13 \rightarrow \text{Minimum}$$

Durch quadratische Ergänzung entsteht daraus: $21 \cdot \left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \rightarrow \text{Minimum}$



Dies ist der Funktionsterm für eine nach oben geöffnete, gestreckte Parabel mit dem Scheitelpunkt $S\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$. Diese Funktion hat ihr Minimum bei $m = \frac{2}{3}$.

Die optimale Ursprungsgerade hat in diesem Falle also die Gleichung $y = f(x) = \frac{2}{3} \cdot x$.



Hinweis:

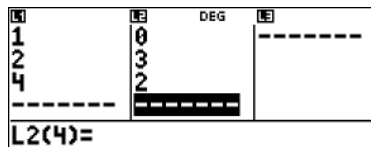
Wird auch für eine andere Anzahl von Punkten $P_k(x_k; y_k)$ begründet eine optimale Ursprungsgerade gesucht, so gilt diejenige Ursprungsgerade als optimal, für die die Summe $\sum_{k=1}^n ((y_k - f(x_k))^2)$ ein Minimum wird. Dieser Ansatz führt immer auf einen quadratischen Term einer nach oben geöffneten Parabel, die ihr Minimum am Scheitelpunkt annimmt.

Anmerkung: Die Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate hatte Gauß schon 1795 im Alter von 18 Jahren entwickelt.¹

Übertragung auf dem TI-30X Plus MathPrint™

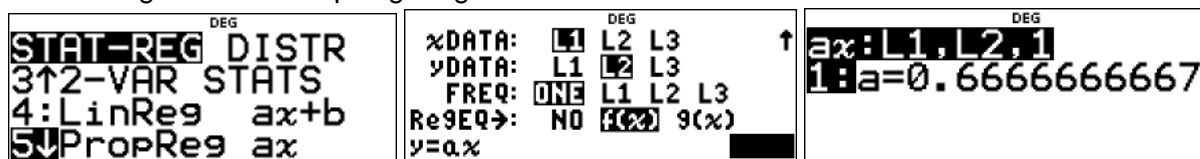
Dieses im Grunde ziemlich elementare Vorgehen kann der TI-30 X Plus MathPrint™ mithilfe der Proportionalen Regression (PropReg) ganz rasch erledigen. Dieses soll am obigen Beispiel gezeigt werden.

Die Daten werden im Listenmodul gespeichert:



data 1 2 4 0 3 2

Mit stat-reg/distr wird PropReg aufgerufen:



2nd data 2 4 0 3 2 enter enter enter

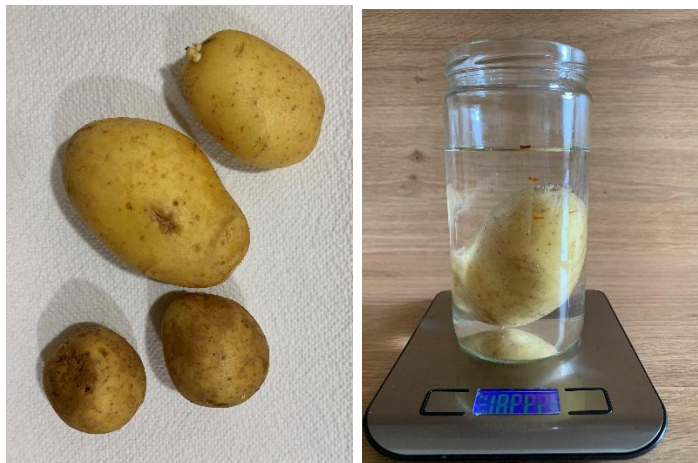
Auch hier wird als Regressionsgerade $y \approx 0,667x = \frac{2}{3}x$ zurückgegeben.

¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Methode_der_kleinsten_Quadrate

Praxisbeispiel („Küchenphysik“):

Gibt es zwischen Volumen und Masse von Kartoffeln einen proportionalen Zusammenhang?

Für vier Kartoffeln einer bestimmten Sorte wurden Volumen und Masse mit einer Küchenwaage und einem ausgedienten zylindrischen Konservenglas bestimmt. Für die Volumenbestimmung wurde die Höhendifferenz des Wasserspiegels vor und nach dem Hereingeben der Kartoffel in das etwa halb mit Wasser gefüllte Glas mit einem Lineal gemessen. Das Volumen der verdrängten Wassermenge ist ein Maß für das Volumen der Kartoffel. Der Durchmesser der Grundfläche des zylindrischen Glases beträgt 8,0 cm, sodass mit $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ das Volumen bestimmt werden kann.



Es ergaben sich folgende Messwerte:

Masse m in g	Höhendifferenz h in cm
55	1,0
74	1,4
97	1,9
178	3,5

Zunächst muss die Frage geklärt werden, ob die Suche nach einem proportionalen Zusammenhang sinnvoll ist.

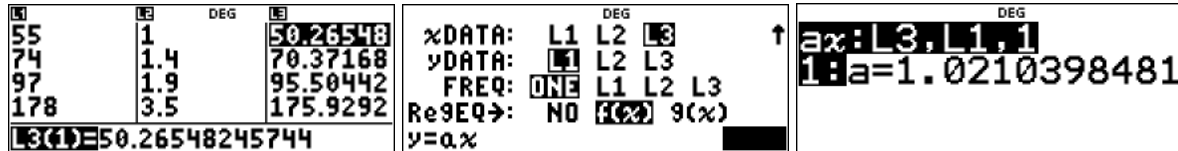
- Je mehr Volumen, desto größere Masse darf man wohl für gesunde Kartoffeln annehmen.
- Zu einem Volumen von 0 cm³ gehört auch eine Masse von 0 g.
- Die Quotienten der Messwertpaare sind (annähernd) gleich groß.

FIR	DEG	↕
55/1.		55
74/1.4		52.9
97/1.9		51.1
178/3.5		50.9

Im Folgenden wird exemplarisch dargestellt, wie eine Auswertung mit dem wissenschaftlich-technischen Taschenrechner TI-30X Plus MathPrint™ erfolgen kann.

Mit dem WTR TI-30X Plus MathPrint™ werden zunächst über `[data]` die Messwerte für Masse und Höhe in den Listen L1 bzw. L2 gespeichert. In der Liste L3 wird über `[data]` Formula das Volumen $V = 4.0^2 \cdot \pi \cdot h$ berechnet.

`[data]` `[1]` `[4]` `[.]` `[0]` `[x2]` `[x]` `[π]` `[i]` `[x]` `[data]` `[2]` `[enter]`

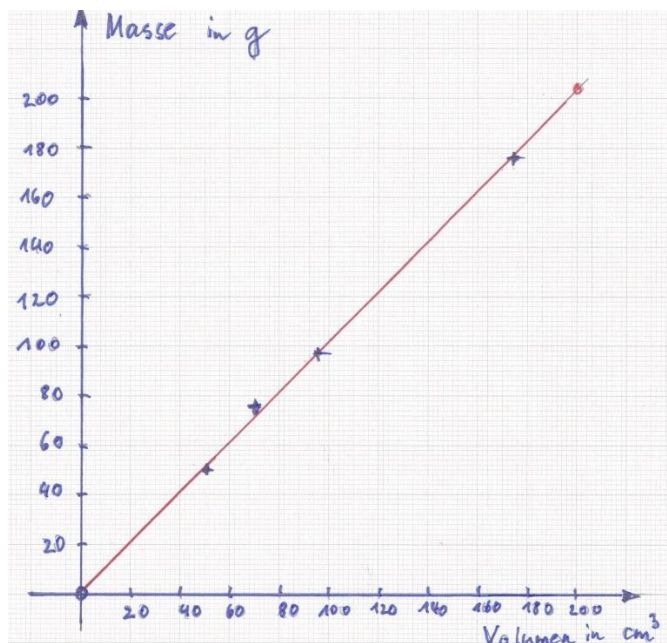


Stellt man die Daten grafisch dar mit dem Volumen auf der waagerechten und der Masse auf der senkrechten Achse, dann wird deutlich, dass die Vermutung eines linearen, sogar proportionalen Zusammenhangs durch die Lage der Punkte gestützt wird.

Eine Gleichung für einen proportionalen Zusammenhang $y = a \cdot x$ lässt sich rasch mit dem WTR erstellen. Es ergibt sich $m \approx 1,02 \cdot V$.

`[2nd]` `[data]` `[<]` `[<]` `[<]` `[<]` `[enter]` `[>]` `[>]` `[enter]` `[<]` `[enter]` `[>]` `[enter]` `[enter]`

Mit dieser Gleichung kann rasch noch ein Punkt, z. B. P(200; 204) berechnet werden, der zusammen mit dem Ursprung die zugehörige Ursprungsgerade bestimmt. Nach dem Einzeichnen der Ursprungsgeraden wird noch deutlicher, wie gut sich die Punkte, die die Messwerte repräsentieren, an die Regressionsgerade „anschmiegen“.



Der Anstieg $m = 1,02$ der Regressionsgeraden gibt in diesem Zusammenhang die Dichte der untersuchten Kartoffeln an. Da sie knapp über $1,0 \text{ g/cm}^3$ liegt, schwimmen die Kartoffeln nicht im Wasser, sondern sinken nach unten auf den Topfboden. Eine Beobachtung, die man beim Kochen oft treffen kann.

Anmerkungen

Ich habe mich hier auf vier Messungen beschränkt, weil damit das Wesentliche gezeigt werden kann und weil der Bildschirm des TI-30X Plus MathPrint™ gerade vier Zeilen gleichzeitig anzeigen kann.

Für ein genaueres Ergebnis wäre es sinnvoll, mehr Messwerte zu ermitteln, z. B. von zehn Kartoffeln. Auch sollten die Kartoffeln nicht zu klein ausfallen, damit der Messfehler beim Ablesen nicht zu groß wird. Hierbei ist nämlich zu berücksichtigen, dass der Wasserspiegel an der Innenwand des Glases durch Adhäsionskräfte etwas nach oben gebogen ist. Das begünstigt Ablesefehler, die bei geringen Höhendifferenzen schwerer ins Gewicht fallen als bei größeren Höhendifferenzen, wie sie bei größeren Kartoffeln zu erwarten sind.

Es muss auch darauf geachtet werden, dass für eine Messreihe Kartoffeln der gleichen Sorte verwendet werden. Bedingt durch eventuellen unterschiedlichen Stärkegehalt bei verschiedenen Sorten können die Dichten unterschiedlich ausfallen.

Autor:

Dr. Wilfried Zappe