„Die letzte Antwort“ – Gleichungen lösen mit ANS

Moderne wissenschaftlich-technische Taschenrechner (WTR), wie sie z. B. in Baden-Württemberg für die Schulen zugelassen sind, verfügen über die Möglichkeit, Rechenoperationen mit der zuletzt vom Rechner zurückgegebenen Antwort durchzuführen. Dazu dient die Anweisung „answer“, kurz ANS.
Hier wird der WTR TI-30X Plus MathPrint™ [1] zugrunde gelegt, bei dem diese Anweisung als Zweitbelegung der Vorzeichenwechseltaste implementiert ist.

Technische Handhabung von ANS und TABLE am Beispiel:

Die Anzahl der Infizierten bei einer ansteckenden Krankheit folgt in der Anfangszeit einer Epidemie häufig dem mathematischen Modell, dass sich nach erstmaligem Beobachten der Krankheit bei n Personen die Anzahl der Erkrankten täglich um einen bestimmten Prozentsatz p erhöht. Für n = 100 und p = 10%, also p = 0,1 kann dieser Sachverhalt u. a. auch so ausgedrückt werden:
Startwert 100,
neuer Wert = alter Wert + 0,1*alter Wert bzw.
neuer Wert = 1,1*alter Wert.

Tag 0 Startwert	100
Tag 1: $100 \cdot 1{,}1$	110
Tag 2: $110 \cdot 1{,}1$	121
Tag 3: $121 \cdot 1{,}1$	133,1
…	…
…usw.	…

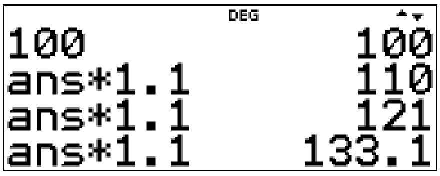
Aus dieser iterativen Vorschrift lässt sich auch leicht eine direkte Bildungsvorschrift für die Anzahl der Infizierten nach n Tagen herleiten: $f(x) = 100 \cdot 1{,}1^x$.

Umsetzung der iterativen Bildungsvorschrift mit dem WTR:

Variante 1:

– Startwert eingegeben und mit enter bestätigen,
– einmalig über die Tastatur $\times$ **1.1** eingeben.
– Nach jedem Drücken von enter wird dann ein neuer Wert der Zahlenfolge erzeugt.

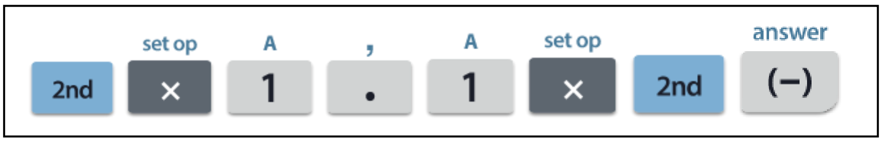
Der Rechner zeigt links neben dem aktuellen Ergebnis auch jedes Mal **ans*1.1** an.
Beim WTR TI-30X Plus MathPrint sieht der Anfang der Tastenfolge so aus:

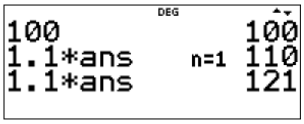


[1] https://education.ti.com/-/media/ti/education/images/products/product-details/hero/product-30x-plus-mp-comenius-hero-de.png?rev=41e32ada-005c-4670-9633-79dc0b8d7924&h=320&w=380&la=de&hash=DCC2A8C5FBEDA5C2B11E5884681F45D67AE99C8F

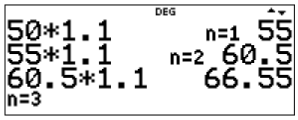
Variante 2:
Die Variante 1 hat den Nachteil, dass die Iteration mit gleicher Vorschrift, aber anderem Startwert eine Neueingabe der Bildungsvorschrift verlangt. Dies ist bei umfangreicheren Bildungsvorschriften etwas umständlich und kann beim WTR TI-30X Plus MathPrint durch die Anweisungen **set op** (Operation speichern/ löschen) und **op** (Operation ausführen) vermieden werden.

– **set op** öffnen und eingeben der Operation **1.1*ans**,





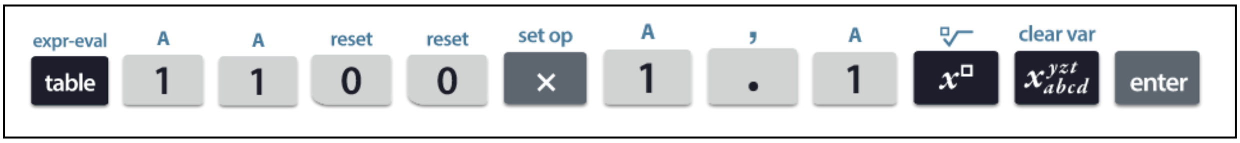
–
– mit enter abschließen,
– mit clear den Bildschirm löschen,
– Startwert eingeben und mit enter bestätigen,
– **op** aufrufen und mit enter bestätigen,

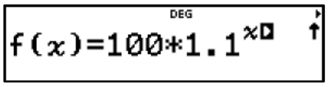


Jedes Drücken von enter oder alternativ von 2nd op ergibt einen neuen Iterationswert.
– Um die Iteration mit gleicher Vorschrift und mit einem neuen Startwert zu beginnen, wird der neue Startwert eingegeben und mit enter bestätigt.
– Nach erneutem Aufruf der Operation mit der Anweisung **op** und enter wird eine neue Iteration für diese neuen Startwert begonnen.
– Der Neubeginn der Iteration ist daran erkennbar, dass n = 1 angezeigt wird.

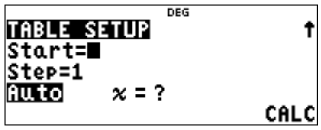
Umsetzung der direkten Bildungsvorschrift mit dem WTR:

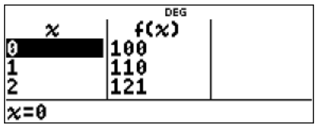
- Taste table drücken und 1 wählen,
- Funktionsterm eingeben, mit enter abschließen,





- Die Eingabe für eine zweite Funktion g(x) kann hier mit der Pfeiltaste nach unten übersprungen werden.
- Das Table Setup übernehmen oder nach eigenen Vorstellungen ändern.
- Mit der Pfeiltaste nach unten auf CALC gehen und enter drücken. Die Wertetabelle wird angezeigt. In der Tabelle kann mit den Pfeiltasten „geblättert“ werden.





Lösen von Gleichungen durch das Newtonverfahren.

Bemerkungen zu den Bildungsstandards:

In den Bildungsstandards zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife heißt es u. a. in der Leitidee „Algorithmus und Zahl“:

„… Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind….

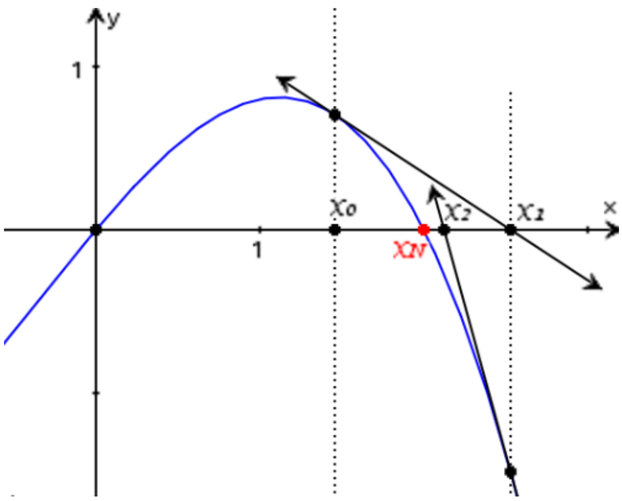
Die Schülerinnen und Schüler können …

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen…“[1]

neben den allgemein üblichen Verfahren zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen bietet auch das m. E. häufig unterschätzte näherungsweise Lösen von Gleichungen z. B. mit dem Newtonverfahren einen Sachverhalt, an dem diese und weitere Bildungsstandards mit Leben erfüllt werden können. Die Anwendung des Newtonverfahrens kann sehr hilfreich durch den WTR unterstützt werden.

Das Grundprinzip des Newtonverfahrens:

Gesucht ist die Nullstelle x_N einer Funktion f. Man sucht sich eine in der Nähe der vermuteten Nullstelle x_N gelegene Stelle x_0, legt dort die Tangente an den Graphen von f und bestimmt die Nullstelle x_1 dieser Tangente. An der Stelle x_1 wird wieder eine Tangente an den Graphen von f gelegt, welche die x-Achse an einer Stelle x_2 schneidet. Unter gewissen Bedingungen rücken die Nullstellen der Tangenten immer näher an die gesuchte Nullstelle x_N heran (siehe Bild rechts). Dieses Verfahren wird so lange fortgeführt, bis die beiden letzten benachbarten Tangentennullstellen einen vorher definierten Abstand unterschreiten.



Dieses Verfahren wird nun rechnerisch beschrieben:
Die Gleichung einer Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_k(x_k;\ f(x_k))$ kann durch die Punktrichtungsgleichung einer Geraden beschrieben werden:
$\frac{y-f(x_k)}{x-x_k} = f'(x_k)$. Die Nullstelle x_{k+1} dieser Tangente wird berechnet, indem y = 0

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012); Seite 22

gesetzt wird: $\frac{0-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}=f'(x_k)$. Diese Gleichung ergibt – nach x_{k+1} umgestellt – die Gleichung $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Dabei muss $f'(x_k)\neq 0$ sein, d. h., dass es dürfen keine Tangenten vorkommen, die waagerecht zur x-Achse sind.

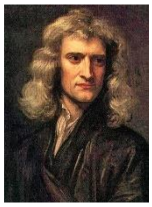
Zusammengefasst ergibt sich für das Newton-Verfahren folgender Algorithmus:

Gesucht wird eine Nullstelle x_N einer Funktion f.

1. Wählen Sie einen Startwert x_0 mit $f'(x_0)\neq 0$ in der Nähe der gesuchten Nullstelle x_N.
2. Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitungsfunktion $f'(x)$.
3. Legen Sie eine (kleine positive) Zahl ε als Abbruchbedingung fest.
4. Berechnen Sie für k = 0, 1, 2, 3, 4, …

   $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ bis $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$
5. Ausgabe: $x_N\approx x_k$
6. Formulieren Sie einen Antwortsatz.

Ein solches Verfahren wird „Iteration“ genannt. Dabei kann man sich „unter günstigen Bedingungen“ schrittweise der Lösung einer Gleichung unter Anwendung des immer gleichen Rechenvorgangs annähern. Wenn das gelingt, spricht man davon, dass die Iteration konvergiert. Anderenfalls liegt ein divergenter Prozess vor. Beispiele für beide Fälle werden in den Übungsaufgaben untersucht.



Der englische Mathematiker, Physiker und Astronom ISAAC NEWTON (1643 – 1727) legte den Grundstein für dieses nach ihm benannte Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen.[1]

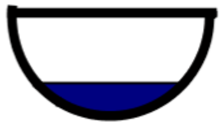
Hinweis:

Im Folgenden gibt es Anregungen zur Realisierung des Newtonverfahrens im Mathematikunterricht der Gymnasialen Oberstufe unter ausschließlicher Verwendung eines WTR.

In einem ergänzenden Beitrag beschreiben meine Kollegen Dr. Hubert Langlotz, Sebastian Rauh und Veit Berger, wie man den TI-Nspire[TM] CX CAS mit seinen Applikationen Notes, Graphs, TI-Basic-Programmierung und Python-Programmierung unterstützend bei dieser Thematik verwenden kann.

[1] https://klexikon.zum.de/images/thumb/3/39/GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg/300px-GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

Beispiel 1:
In eine halbkugelförmige Schale wird ½ Liter Wasser gegossen. Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem tiefsten Punkt der Kugel der Wasserspiegel steht, wenn der Kugelradius 8 cm beträgt.



Lösung:
Das Wasser nimmt die Form einer Kugelkappe an, deren Volumen mit der Formel $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet wird. Dabei steht h für die Höhe der Kugelkappe und r für den Kugelradius. Werden die gegebenen Größen eingesetzt, so ist die folgende Gleichung zu lösen, wenn die Höhe h zu bestimmen ist:

$500 = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3 \cdot 8 - h) \;\Rightarrow\; 500 = 8\pi \cdot h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$ (½ Liter Wasser= 500 cm³).

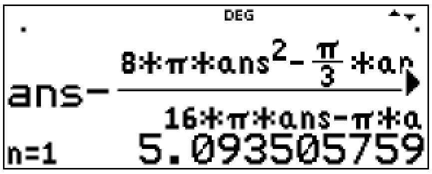
Die Gleichung $500 = 8\pi \cdot h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$ wird so umgestellt, dass die gesuchte Lösung als eine Nullstelle der Funktion $f(x) = 8\pi \cdot x^2 - \frac{\pi}{3} \cdot x^3 - 500$ vorkommt. Diese Nullstelle wird mit dem Newtonverfahren durch die Iterationsvorschrift $x_{k+1} = x_k - \frac{8\pi \cdot x_k^2 - \frac{\pi}{3} \cdot x_k^3 - 500}{16\pi \cdot x_k - \pi \cdot x_k^2}$ näherungsweise ermittelt.

1. Um einen Startwert sinnvoll festzulegen, kann man sich zunächst klarmachen, dass die Höhe h des Wasserspiegels zwischen 0 cm und 8 cm liegen muss, denn h kann nicht größer als der Radius r der Halbkugel sein. Als Startwert wäre z. B. der Mittelwert 4 cm eine vermutlich sinnvolle Variante. (Vorausgesetzt, dort liegt keine waagerechte Tangente vor.)
2. 1. Ableitung: $f'(x) = 16\pi \cdot x - \pi \cdot x^2$
3. Abbruchbedingung: $|x_{k+1} - x_k| < 0{,}01$
4. Iteration mit WTR unter Verwendung der ANS-Anweisung:

   – Iterationsgleichung in **set op** eingeben und mit enter bestätigen:

   $$ans - \frac{8 * \pi * ans^2 - \frac{\pi}{3} * ans^3 - 500}{16 * \pi * ans - \pi * ans^2}$$

   – Startzahl 4 und enter eingeben.
   – ***op*** wählen und so lange enter drücken, bis die Abbruchbedingung erfüllt ist.
   – Brechen Sie ab, wenn sich die zweite Nachkommastelle nicht mehr ändert.
   Dies ist der Fall nach dreimal enter und ergibt den Wert 5,01.



5. Antwortsatz:
   Der Wasserspiegel in der Halbkugel steht ca. 5,01 cm über dem tiefsten Punkt.

Hinweise zur Verwendung des WTR:

1. Sie können die Glieder der Zahlenfolge auch nachträglich auf dem WTR anschauen und ggf. notieren, wenn Sie mit den Pfeiltasten den Bildschirm „durchblättern“.

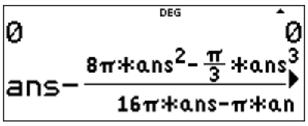
2. Stellen Sie unter mode im Untermenü FLOAT die Genauigkeit z. B. auf 3 ein, wenn Ihnen drei Nachkommastellen genügen. Wenn sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert, haben Sie einen Näherungswert auf Tausendstel genau.

Vertiefung:

Im gegebenen Kontext ist, wie oben beschrieben, für die Gleichung $500 = 8\pi \cdot h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$ nur die Lösung $x \approx 5{,}01\,cm$ sinnvoll, die wir mit dem Newtonverfahren unter Verwendung eines geeigneten Startwertes finden konnten. Eine ganzrationale Gleichung dritten Grades kann aber bis zu drei Lösungen haben. Sollen mit dem Newtonschen Näherungsverfahren mögliche andere Lösungen ermittelt werden, kommt es auf eine geeignete Wahl der Startwerte an.
Nutzen Sie die Möglichkeiten des WTR zum raschen Tabellieren von Funktionswerten mit table. So können z. B. folgende Wertepaare tabelliert werden.

x	-5	0	5	10	15	20	25
y (gerundet)	259	-500	-3	966	1620	1176	-1154

Wegen des Vorzeichenwechsels von Funktionswerten und der Stetigkeit der Funktion f kann man davon ausgehen, dass sowohl zwischen – 5 und 0 als auch zwischen 20 und 25 jeweils eine Nullstelle existieren muss. (Mehr als drei Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht haben.) Mit den Startwerten z. B. x = 0 bzw. x = 25 können mit dem Newtonverfahren Näherungswerte dieser Nullstellen gesucht werden. Beginnen wir allerdings mit dem Startwert x = 0, so wird eine Fehlermeldung zurückgegeben:



Die Ursache wird nach kurzem Nachdenken klar, denn für x = 0 wird der Nenner der Iterationsgleichung den Wert null annehmen, weil $f'(0) = 0$ ist. Dort muss also eine waagerechte Tangente vorliegen, die keinen Schnittpunkt mit der x-Achse erzeugt.
Wir ersetzen den Startwert x = 0 durch x = – 5 und starten eine neue Iteration nochmals wie auf der Seite 2 beschrieben. Als Abbruchbedingung soll wieder gelten : $|x_{k+1} - x_k| < 0{,}01$. Die dritte Nullstelle wird mit dem Startwert x = 25 gesucht.

Ergebnisse:

Weitere Nullstellen von $f(x) = 8\pi \cdot x^2 - \frac{\pi}{3} \cdot x^3 - 500$ liegen näherungsweise bei x = – 4,12 und x = 23,11.

Beispiel 2:
Die Funktion f mit $f(x) = x - \sin(x) - 1$ besitzt keine lokalen Extrempunkte, aber Sattelpunkte für $x = k \cdot 2\pi$:

$f'(x) = 1 - \cos(x)$; $f''(x) = \sin(x)$; $f'''(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 1 - \cos(x) = 0$; mögliche Extremstellen bei $x = k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

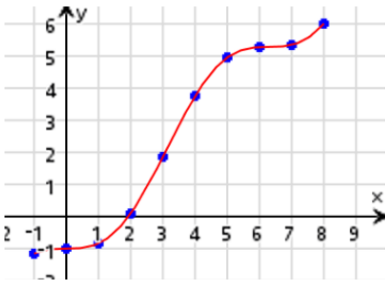
$f''(k \cdot 2\pi) = \sin(k \cdot 2\pi) = 0$; keine Entscheidung für lokale Extrema möglich

$f'''(k \cdot 2\pi) = \cos(k \cdot 2\pi) = 1$; Sattelpunkte, keine lokalen Extrempunkte

Weil $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ ist, verläuft der Graph von f monoton steigend und mit Funktionswerten von $-\infty$ bis ∞. Da die Funktion f überdies stetig ist, hat sie genau eine Nullstelle.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-1,98	-1	-0,02	0,97	1,95	2,93	3,91	4,90	5,88	6,86

Skizze (mit TI-Nspire erstellt):



Abgelesener Näherungswert der Nullstelle: $x \approx 2$
Näherungswerte mit Newtonverfahren:

Iterationsvorschrift: $ANS - \frac{ANS - \sin(ANS) - 1}{1 - \cos(ANS)}$

Rechner auf Bogenmaß einstellen!

Schritt Nr.	Startwert x = 2	Startwert $x = 2\pi$	Startwert x = 6,2
1	1,935951152	Error	-1521,63
2	1,934563874	Division by 0	1265,25
3	1,934563211		515,79
4	1,934563211		-2791,26
5			117,36

Je nach dem gewählten Startwert kann die Iteration ganz unterschiedlich verlaufen.

– Mit x = 2 stabilisieren sich die Ergebnisse bereits mit dem vierten Schritt.
– Mit $x = 2\pi$ ergibt sich eine Fehlermeldung ($f'(x) = 0$).
– Mit x = 6,2, also nahe bei $x = 2\pi$, scheint die Folge „wild“ zu divergieren, aber etwa mit dem 51. Schritt stabilisiert sich die Folge auf den Näherungswert x = 1,934563211.

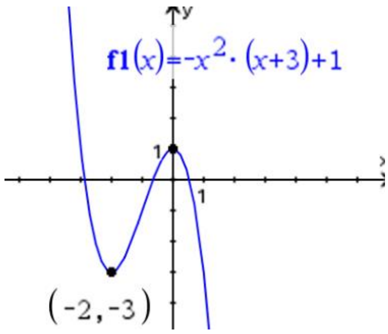
Ob das Newtonverfahren zum Ziel führt, hängt von der Wahl des Startwertes ab. Die Folge der berechneten Werte konvergiert, wenn der Startpunkt ausreichend nahe an der gesuchten Nullstelle liegt. Liegt der Startwert zu weit weg, so kann die Folge divergieren, oszillieren oder auch gegen eine andere Nullstelle der Funktion konvergieren.

Für den Schulunterricht sind m. E. weitergehende Untersuchungen zur Konvergenz des Newtonverfahrens nicht relevant. Dies sollte der Hochschule vorbehalten bleiben.

Übungen:

1. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion
   $f(x) = x - 3 + \sqrt[3]{x}$.
   Begründen Sie, weshalb diese Funktion nur genau eine Nullstelle hat.

2. Beschreiben Sie ausführlich, wie die Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2(x+3)+1$ mit dem Newtonverfahren bestimmt werden können.
   Begründen Sie, welche Startwerte ausgeschlossen werden müssen.
   Ermitteln Sie Näherungswerte der Nullstellen mithilfe des Newtonverfahrens.



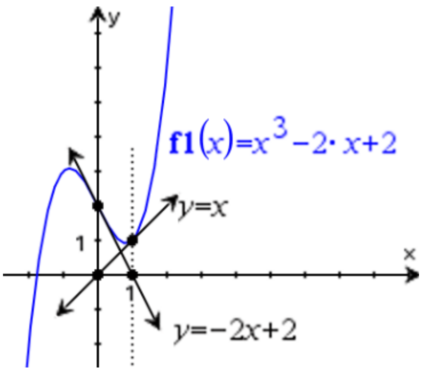
3. Für die Berechnung von $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ ist eine Iterationsvorschrift bekannt, die nach HERON VON ALEXANDRIA benannt ist:
   $$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$
   Weisen Sie nach, dass es sich um einen Spezialfall des Newtonverfahrens handelt. Bereiten Sie einen kurzen Vortrag dazu vor, und gehen Sie dabei auch kurz auf HERON VON ALEXANDRIA ein.

4. Für die Berechnung der Nullstellen folgender Funktionen bei den gegebenen Startwerten führt die Anwendung des Newtonverfahrens nicht zum Ziel:

   (1) $f(x) = 0,2 \cdot (3+x) \cdot (x-1)^2$ mit dem Startwert $x_0 = 1$,
   (2) $f(x) = \cos(x)$ mit $-1 < x < 5$ und mit dem Startwert $x_0 = 0$.

   Begründen Sie, weshalb das Newtonverfahren in diesen Fällen nicht realisiert werden kann. Geben Sie für jede der Funktionen einen weiteren x-Wert an, den man als Startwert ausschließen muss.

5. Angenommen, Sie wollen die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ mit dem Startwert x = 0 durch das Newtonverfahren näherungsweise ermitteln. Erläutern Sie anhand der Abbildung, weshalb das Verfahren mit diesem Startwert nicht konvergiert. Überprüfen Sie durch Realisierung des Näherungsverfahrens mit dem WTR Ihre Erklärung. Gibt es weitere Stellen, die nicht als Startwerte in Frage kommen? Wenn ja, welche sind das?
   Ermitteln Sie die Nullstelle auf Tausendstel genau mit einem geeigneten Startwert.



6. Wenden Sie das Newtonverfahren für die näherungsweise Berechnung der Nullstelle von $f(x) = x - 2 \cdot \cos(x)$ an.
   a) Startwert x = 100
   b) Startwert x = 2

7. Der WTR TI-30X Plus MathPrint™ verfügt nicht über eine Tabellenkalkulation. Die bisherigen Überlegungen zur Verwendung der ANS-Anweisung bilden aber eine gute Möglichkeit, das Verständnis für das algorithmische Vorgehen beim Newtonverfahren mithilfe einer Tabellenkalkulation zu erleichtern.
   Im Folgenden ist eine solche einfache Umsetzung des Newton-Algorithmus für die Funktion $f(x) = x - \cos(x)$ mit Excel im Modus „Formeln anzeigen“ anhand eines Screenshots abgebildet.
   Erläutern Sie diese Realisierung.
   Inwiefern finden Sie die Idee „der letzten Antwort“ hierbei realisiert?

	A	**B**
1	1	2
2	=A1+1	=B1-(B1-COS(B1))/(1+SIN(B1))
3	=A2+1	=B2-(B2-COS(B2))/(1+SIN(B2))
4	=A3+1	=B3-(B3-COS(B3))/(1+SIN(B3))

Lösungshinweise:

1. $x \approx 1,78659$ $x \approx 1,78659$.

   Weil die 1. Ableitung $f'(x) = 1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ für alle reellen Zahlen x $(x \neq 0)$ stets positiv ist, ist die Funktion f streng monoton steigend und besitzt nur genau eine Nullstelle.

2. Die Iterationsvorschrift lautet $ans - \frac{-ans^3 - 3ans^2 + 1}{3ans^2 - 6ans}$

   Für die Nullstelle zwischen 0 und 1 könnte man den Startwert x = 1 versuchen. Mit ihm ergibt sich die Zahlenfolge 1; 0,6667; 0,5486, 0,5324; 0,5321; 0,5321; ….

   Für die Nullstelle zwischen 0 und –1 könnte man den Startwert x = –1 versuchen. Mit ihm ergibt sich die Zahlenfolge –1; –0,6667; –0,6528, –0,6527; –0,6527; …

   Für die Nullstelle zwischen -2 und –3 könnte man den Startwert x = –3 versuchen. Mit ihm ergibt sich die Zahlenfolge
   –3; –2,8889; –2,8795, –2,8794; –2,8794; …

   Die Startwerte x = -2 und x = 0 dürfen nicht verwendet werden, weil dort waagerechte Tangenten vorliegen.

   Näherungswerte für die Nullstellen sind –2,8794; –0,6527 und 0,5321.

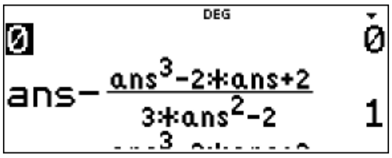
3. Der Term $\sqrt{a}; a \geq 0$ kommt als Nullstelle der Gleichung $x^2 - a = 0$ vor. Für die Iterationsvorschrift nach dem Newtonverfahren gilt damit

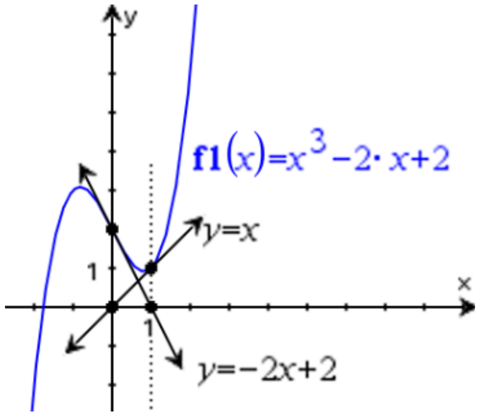
   $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$.

   Zu Heron von Alexandria vergleiche z. B.
   https://de.wikipedia.org/wiki/Heron_von_Alexandria

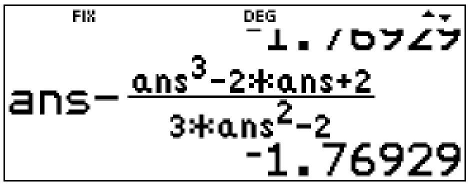
4. Die Funktion (1) $f(x) = 0,2 \cdot (3 + x) \cdot (x - 1)^2$ besitzt bei $x_0 = 1$ eine doppelte Nullstelle, d. h., ihr Graph berührt dort die x – Achse in einem lokalen Extrempunkt. Demzufolge liegt dort eine waagerechte Tangente vor, die Iteration führt wegen $f'(x_0) = 0$ zu einem Fehler. Der Graph von f besitzt darüber hinaus bei $x = -\frac{5}{3}$ einen weiteren lokalen Extrempunkt mit waagerechter Tangente, weshalb dieser Wert ebenfalls nicht als Startwert einer Iteration in Frage kommt.
   Analog kann für (2) $\mathrm{f(x) = cos(x)} \mid -1 < \mathrm{x} < 5$ mit dem Startwert $\mathrm{x_0} = 0$ argumentiert werden (lokales Maximum bei x = 0 und lokales Minimum bei $x = \pi$).

5. Die Tangente an den Graphen von f bei x = 0 schneidet die x-Achse bei x = 1. Die Tangente an den Graphen von f schneidet die x-Achse bei x = 0, also wieder beim Startwert.
   So entsteht eine zyklische Zahlenfolge {0; 1; 0; 1; 0; 1; …}, die nicht konvergiert.





Dort, wo der Funktionsgraph lokale Extrema hat, darf man ebenfalls nicht starten. Dies ist bei $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ der Fall.
Mit dem Startwert x = - 1 erhält man als Näherungswert für die Nullstelle $x \approx -1{,}76929$.



6. Mit dem Startwert x = 100 scheint die Folge der durch das Newtonverfahren erzeugten ersten fünf Zahlen zu divergieren. Auch nach dem hundertsten Schritt ist noch keine Stabilisierung zu erkennen.
   Mit dem Startwert x = 2 konvergiert die Folge sehr rasch und nähert sich dem Wert x = 1,029866529 an.

Schritt Nr.	Startwert x = 100	Startwert x = 2
1	7819,203813	0,995139841
2	2376,690546	1,030107307
3	1582,894248	1,02986654
4	-14718,26552	1,029866529
5	3491,159975	1,029866529

7. In der Spalte A wird die Nummer der Iteration zurückgegeben. In die Zelle B1 kommt der Startwert 2. In der Zelle B2 wird die Iterationsformel
   $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \cos(x_k)}{x_k + \sin(x_k)}$ verwendet.
   Statt x_k bzw. ANS wird hier der relative Zellbezug auf die Zelle B1 verwendet.
   In der Zelle A2 wird der Nummerierungswert gegenüber A1 um 1 erhöht.
   Hinweise:
   – Die Zellen A2 und B2 werden markiert und die in ihnen enthaltenen Anweisungen als relative Zellbezüge nach unten kopiert.
   – Um die Iteration mit einem anderen Startwert auszuführen, muss der neue Startwert in die Zelle B1 eingegeben und mit ENTER bestätigt werden.

Autor:
Wilfried Zappe