Kepler und das Volumen eines Ostereies

Zugegeben, die Überschrift und die Karikatur (s. Abb.1) scheinen etwas weit hergeholt, aber es lässt sich eine Verbindung zwischen dem Wissenschaftler Johannes Kepler und der Berechnung des Volumens eines eiförmigen Körpers durchaus herstellen.
In diesem Beitrag soll informiert werden, wie die Keplersche Fassregel zum Berechnen von Volumina genutzt werden kann. Unter anderem wird auch das Volumen eines Ostereies auf diesem Wege ohne Integralrechnung näherungsweise bestimmt. [1] Die benötigten mathematischen Vorkenntnisse sind alle der Sekundarstufe I zuzuordnen.

Abb.1

Zudem wird gezeigt, wie der Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ dabei verwendet werden kann. Insbesondere geht es hier um den Einsatz der Anwendungen [expr-eval] und [data].

Die Keplersche Fassregel

Im Jahr 1615, also vor etwas mehr als 410 Jahren, hatte der Mathematiker und Astronom Johannes Kepler beobachtet, wie das Volumen von Weinfässern bestimmt wurde:
Mit einem Messstab, den man durch das mittig gelegene Spundloch bis zum gegenüberliegenden unteren Rand schob, wurde das Volumen des Fasses abgelesen, ohne dass man die Form des Fasses berücksichtigte. Kepler fand diese Methode sehr ungenau. Er schrieb deshalb im Jahr 1615, die „Neue Raummesskunst für Weinfässer“. Zu diesem Zeitpunkt war die Integralrechnung noch nicht bekannt! Ein wesentliches Ergebnis seiner Untersuchungen lässt sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

„Die Keplersche Fassregel besagt, dass ein Fass der Höhe h sowie der Grundfläche A_G, der in der Mitte gemessenen Querschnittsfläche A_S und der Deckfläche A_D (s. Abb.2) etwa folgendes Volumen hat:

$$V \approx \frac{h}{6} \cdot (A_G + 4 \cdot A_S + A_D)$$

Diese Näherungsformel liefert selbst dann noch gute Ergebnisse, wenn die Querschnittsflächen keine Kreise sind.
Für bestimmte Rotationskörper wie Zylinder, Kugel, Kugelkappe, Kegel, Kegelstumpf und Rotationsparaboloid gibt diese Formel sogar das genaue Volumen an.“ [DUDEN]

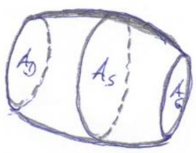


Abb.2

Eine Herleitung dieser Näherungsformel soll hier nicht erfolgen. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, dass diese Formel für Zylinder und Kugel tatsächlich die exakten Ergebnisse liefert.

[1] Ich verweise auf meinen Artikel „Mathematische Betrachtungen zum Ei“, der TI-Materialiendatenbank erschienen ist. Dort werden u.a. Methoden der Volumenberechnung von Eiern mit dem bestimmten Integral beschrieben.

Für ein fassähnliches Weinglas wird das Volumen mit der Keplerschen Fassregel näherungsweise bestimmt und das Ergebnis durch Nachmessen verifiziert.
Schließlich wird die Keplersche Fassregel mehrfach auf das Modell eines Ostereies angewendet. Auch für diese Rechnung wird die Probe durch eine Messung realisiert werden.

Zylinder und Kugel
Für Zylinder und Kugel werden die exakten Ergebnisse geliefert:
Zylinder: Die Querschnittsflächen sind Kreise mit dem gleichen Radius r.
$A_G = A_S = A_D = \pi \cdot r^2$; h
$V = \frac{h}{6} \cdot (\pi \cdot r^2 + 4 \cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2) = \frac{h}{6} \cdot (6 \cdot \pi \cdot r^2) = \pi \cdot r^2 \cdot h$

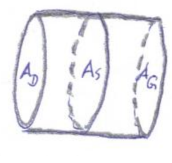


Abb. 3

Kugel: Die kreisförmige Querschnittsfläche durch den Mittelpunkt hat den gleichen Radius wie die Kugel. Die Querschnittsflächen A_D und A_G werden als Kreise mit dem Radius r = 0 angenommen.
$A_G = A_D = 0$; $A_S = \pi \cdot r^2$; $h = 2r$
$V = \frac{2r}{6} \cdot (0 + 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

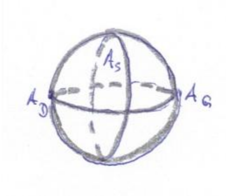


Abb. 4

Das schwäbische Viertelesglas
Ein schwäbisches Viertelesglas hat einen oberen und unteren inneren Durchmesser von 6,0 cm. Der innere Durchmesser in der halben Höhe beträgt 7,4 cm. Die innere Höhe wurde mit 8,0 cm gemessen.
Wir berechnen näherungsweise das innere Volumen des Glases mit der Keplerschen Fassregel.
Die Querschnittsflächen sind Kreise mit den Radien 3,0 cm und 3,7 cm mit den Flächeninhalten $A = \pi \cdot r^2$. Die innere Höhe beträgt 8,0 cm.


Abb. 5

$V \approx \frac{h}{6} \cdot (A_G + 4 \cdot A_S + A_D)$
$V = \frac{8}{6} \cdot (\pi \cdot 3{,}0^2 + 4 \cdot \pi \cdot 3{,}7^2 + \pi \cdot 3{,}0^2) \approx 305\ cm^3$
Messung: Das Glas wurde fast randvoll mit ca. 300 ml Wasser befüllt. Dies ist eine recht gute Übereinstimmung zum rechnerischen Ergebnis.

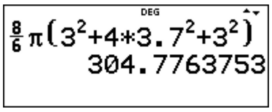


Abb. 6

Das Osterei
Das abgebildete Osterei aus Pappe hat eine Länge von 15,0 cm. Um sein Volumen möglichst genau zu ermitteln, wird die Keplersche Fassregel mehrfach angewendet. Damit der Rechenaufwand mit dem Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ überschaubar bleibt, wird zunächst die Anwendung [expr-eval] genutzt. Sie ist als Zweitbelegung der Taste [table] zu finden.
Unser Osterei kann in Längsrichtung in zwei fast kongruente Teilkörper zerlegt werden. Nur ein kleiner Rand an einer der Hälften stört diese Symmetrie. Er wird für den Zusammenhalt beider Teile benötigt, wenn beide Hälften zu einem vollständigen Ei zusammengesteckt werden.


Abb. 7

Die Eihälfte ohne diesen Rand wird genutzt, um den Umriss des Eies auf Papier zu übertragen. Mittig wird die Längsachse des Umrisses eingezeichnet. In Abständen von 1,5 cm werden die zur Mittellinie senkrechten Entfernungen zur Eilinie gemessen und notiert.
Diese Messwerte lassen sich als Radien der Querschnittskreise durch den Eierkörper interpretieren.

Man stelle sich das Osterei vor wie ein Ei, dass durch einen Eierschneider in fünf gleich breite Teilkörper zerlegt wird. Die Keplersche Fassregel wird nun auf jedes der 3,0 cm langen Teilintervalle angewendet.
Für jedes der Teilintervalle wird damit ein Näherungswert für das Volumen des zugehörigen Drehkörpers mit der Keplerschen Fassregel ermittelt. Die Höhe h für jedes Teilintervall beträgt 3,0 cm. Die Querschnittsflächen sind Kreisflächen mit den Radien a, b und c. Für jedes Teilintervall kann der Näherungswert für das zugehörige Volumen berechnet werden durch den Term
$\frac{3}{6} \cdot \pi \cdot (a^2 + 4 \cdot b^2 + c^2) = \frac{\pi}{2} \cdot (a^2 + 4 \cdot b^2 + c^2)$.
Die Teilergebnisse werden notiert und abschließend addiert.

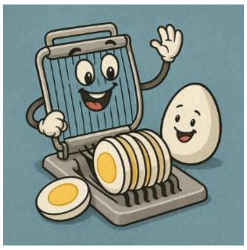


Abb. 8

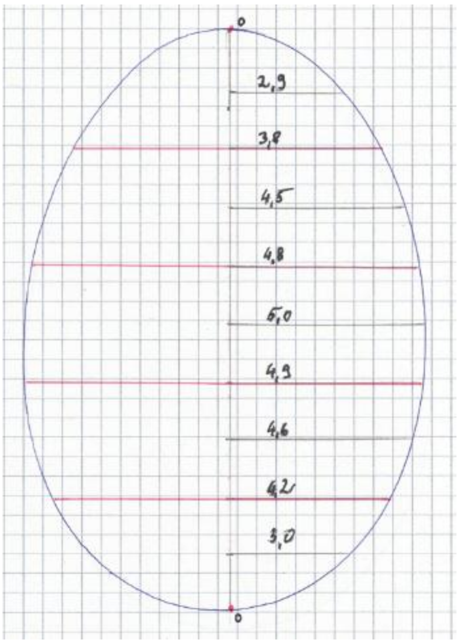


Abb. 9

Start: Mit 2nd table wird die Anwendung [expr-eval] geöffnet. Der Term $\frac{\pi}{2}(a^2 + 4b^2 + c^2)$ wird eingegeben und mit enter bestätigt. Der Rechner schlägt für jede der Variablen a, b und c einen Wert vor, der auf die im jeweiligen Teilintervall gemessenen Werte korrigiert und ebenfalls jeweils mit enter bestätigt werden muss. Nachdem c mit enter bestätigt wurde, wird der Term zusammen mit dem jeweiligen Termwert angezeigt. Dieser wird – auf Zehntel gerundet – notiert und entspricht dem Volumen des zum verwendeten Teilintervall gehörenden Teilkörpers des Eies.

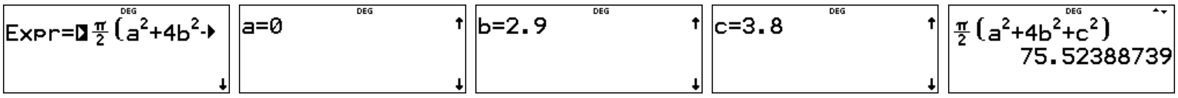


Abb. 10

Nun geht es beim Start mit 2nd table wieder los. Der Term $\frac{\pi}{2}(a^2 + 4b^2 + c^2)$ wird angezeigt, muss also nicht neu eingegeben, aber mit enter bestätigt werden. Die Werte für a, b und c sind dann für das nächste Teilintervall neu einzutragen und mit enter zu bestätigen. Auf der folgenden Seite wird das Vorgehen in einem Diagramm veranschaulicht. Der dort dargestellte Prozess wird hier fünfmal durchlaufen. In der nachstehenden Tabelle werden die Ergebnisse angezeigt.

Teilintervall	Wert für a	Wert für b	Wert für c	Wert für $\frac{\pi}{2}(a^2+4b^2+c^2)$
[0; 3]	0	2,9	3,8	75,5
[3; 6]	3,8	4,5	4,8	186,1
[6; 9]	4,8	5,0	4,9	231,0
[9; 12]	4,9	4,6	4,2	198,4
[12; 15]	4,2	3,0	0	84,3
Summe				**775,3**

Nach dieser Näherungsrechnung müsste das Volumen des Ostereies ca. 775,3 cm³ betragen.

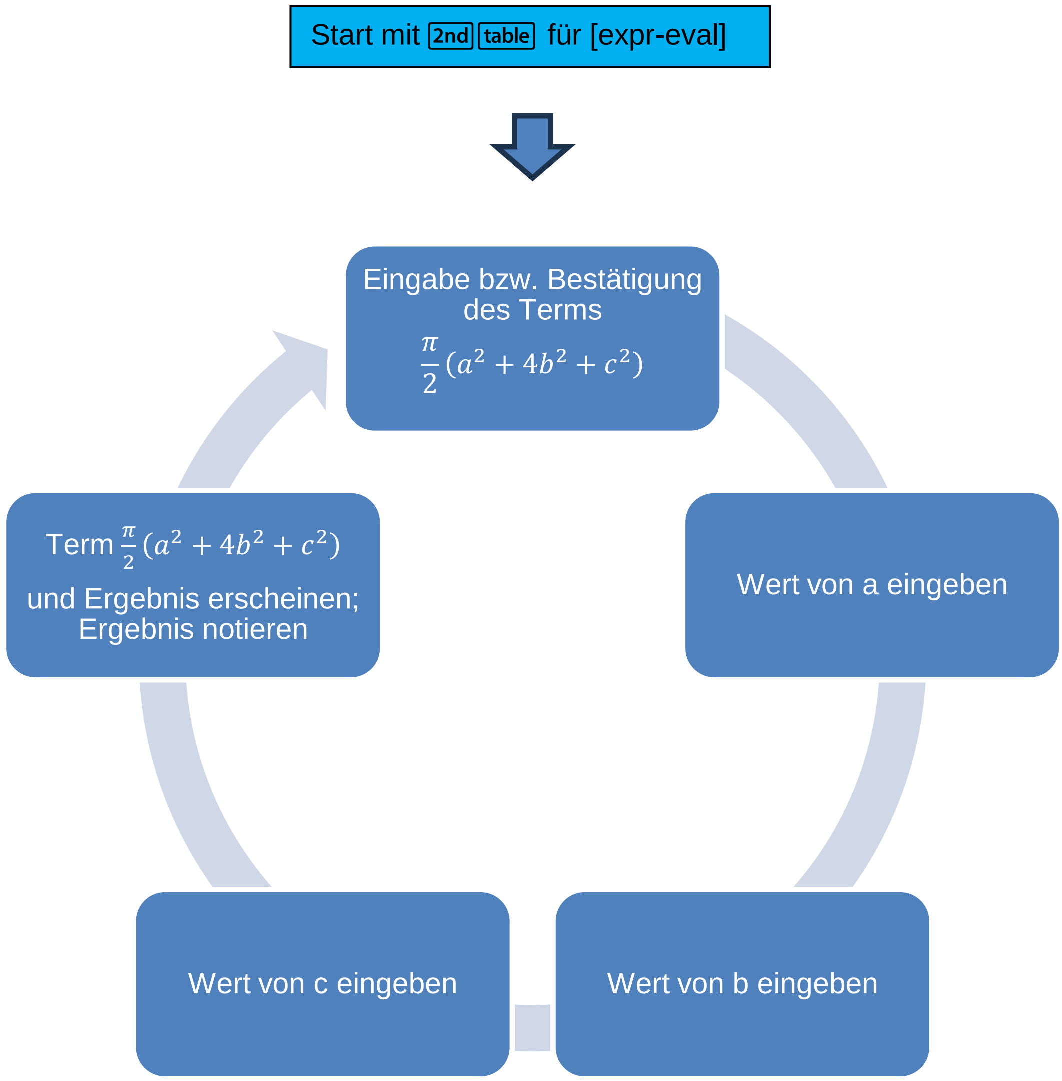


Abb. 11

© T3 Deutschland 2026

Zur experimentellen Überprüfung wurde die obere Hälfte des Ostereies mit einem farbigen Pulver gefüllt und dessen Volumen in einem Messbecher zu ca. 390 ml ermittelt. Dies entspricht dem halben Volumen des ganzen Ostereies, das deshalb ca.780 cm³ beträgt und somit in der Größenordnung des ermittelten Näherungswertes liegt. Bei diesem Vergleich können systematische und zufällige Fehler entstehen, z. B. durch Ungenauigkeiten beim Ablesen der Messwerte, beim Einfüllen des Pulvers oder durch die Fortpflanzung von Rundungsfehlern.

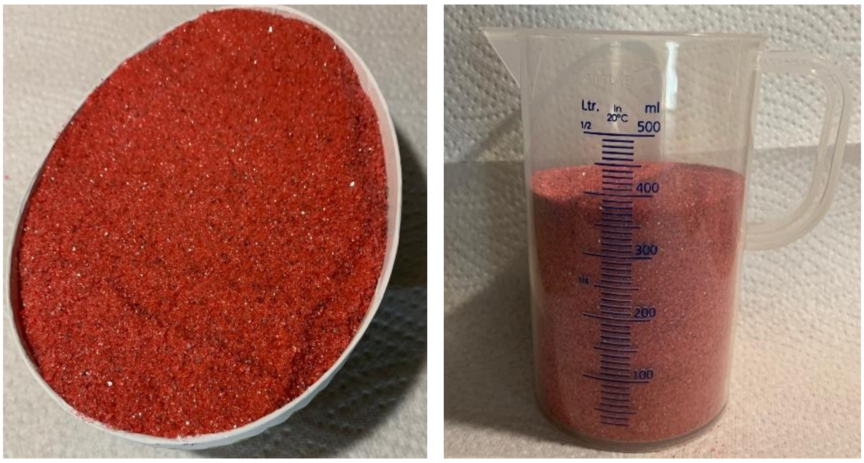


Abb. 12

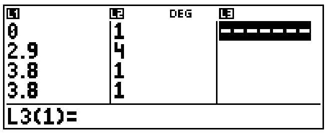
© T3 Deutschland 2026

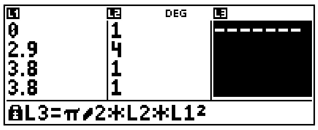
Ergänzung

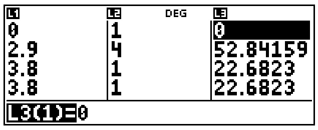
Alternativ kann die Volumenberechnung des Ostereies auch mit der Anwendung [data] des TI-30X Prio MathPrint™ erfolgen.
In der Liste L1 werden die Radien der Querschnittskreise eingetragen. Jeder dritte Wert muss doppelt berücksichtig werden, weil er einmal ein Teilintervall abschließt und das folgende öffnet.
In der Liste L2 werden gemäß der Fassregel die „Faktoren 1 – 4 - 1“ für jeden Radius pro Teilintervall eingetragen.
In der Liste L3 werden die Teilvolumina mit [data] Formula 1 gemäß der Formel $\frac{\pi}{2} \cdot L_2 \cdot L_1^2$ automatisch berechnet und abschließend wird mit [data] OPS 4 ihre Summe gebildet.

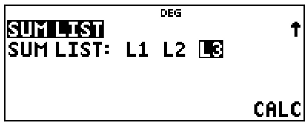
Die Tabelle zeigt die Übersicht der Einträge in den Listen L1 und L2.

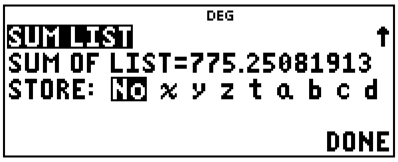
L1	L2	L3 = $\frac{\pi}{2} \cdot L_2 \cdot L_1^2$
0	1	
2,9	4	
3,8	1	
3,8	1	
4,5	4	
4,8	1	
4,8	1	
5,0	4	
4,9	1	
4,9	1	
4,6	4	
4,2	1	
4,2	1	
3,0	4	
0	1	











Auch mit diesem Verfahren ergibt sich als Näherungswert für das Volumen ca. 775,3 cm³.

Literaturquelle

DUDEN: Duden Lernanattack GmbH, 2026:
https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/johannes-kepler
(zuletzt eingesehen am 10.03.2026)

Bildnachweis

Abb.1 und Abb. 8 sind mit KI generiert.
Abb. 5: https://www.weingut-zaiss.de/web/image/product.image/11/image_1024/
(zuletzt eingesehen am 10.03.2026)
Alle weiteren Abbildungen sind vom Autor erstellt.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe