


Mit leistungssteigernden Substanzen durch die Prüfung?

20% der Studierenden konsumieren leistungssteigernde Substanzen, wie z. B. Ritalin. Sicher ist, dass all diese Präparate auch Nebenwirkungen haben. Kopfschmerzen und Persönlichkeitsveränderungen wie emotionale Abstumpfung gehören dazu. Zudem können sich Abhängigkeit etablieren.

(Quelle: <https://www.gesundheitsforschung-bmbf.de/de/hirndoping-lernen-leicht-gemacht-mit-pillen-6120.php>; veröffentlicht: Mai 2017)

Anhand dieses Kontextes sollen Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen unter Nutzung des TI-30X Prio MathPrint™¹ gelöst werden.

Optionen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen sind auf dem TI-30X Prio MathPrint™ als Zweitbelegung der Taste [data] unter der Option [DISTR] (Distribution = Verteilung) zu finden:

2nd **[data]** 



Mit „Binomialpdf“ können Einzelwahrscheinlichkeiten, mit „Binomialcdf“ Summenwahrscheinlichkeiten berechnet werden.



Im Folgenden soll der Umgang mit diesen Befehlen gezeigt werden.

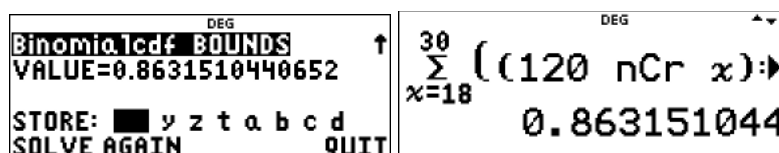
Dazu beschreibe die Zufallsgröße X die Anzahl von k unter insgesamt n Studierenden, die leistungssteigernde Substanzen konsumieren.

Wir nehmen hier zunächst an, dass diese Zufallsgröße X binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0,2$.

1. Summenwahrscheinlichkeit mit der Option [BinomialCdf BOUNDS]:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 120 Studierende wenigstens 18 und höchstens 30 angetroffen werden, die leistungssteigernde Substanzen konsumieren.

$$P(18 \leq X \leq 30) = \sum_{k=18}^{30} \binom{120}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{120-k} \approx 0,8632$$



¹ Der wissenschaftlich-technische Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ wurde nach den Vorgaben des IQB Berlin entwickelt und ist von der KMK zertifiziert.

2. Dreimal-mindestens-Aufgabe mit der Option [table]:

Ermitteln Sie, wie viele zufällig ausgewählte Studierende man anonym mindestens befragen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85% mindestens eine Person zu finden, die leistungssteigernde Substanzen verwendet. (Vorausgesetzt, es gibt nur ehrliche Antworten und es gilt in der Gesamtheit $p = 0,20$.)

$P(X_{n;p} \geq 1)$ wird zurückgeführt auf $1 - P(X_{n;p} = 0)$, d.h.

$P(\text{mindestens eine Person}) = 1 - P(\text{keine Person}) = 1 - P(X_{n;0,2} = 0) \geq 0,85$, also

$P(X_{n;0,2} = 0) < 0,15$.

Definieren Sie mit der Option [table] unter der Funktion $f(x)$ den Term

$f(n) = \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{n-0} = \binom{n}{0} \cdot 0,8^n$ mit $x = n$, und suchen Sie unter den Funktionswerten den ersten Wert, der kleiner als 0,15 ist.

x	f(x)
7	0.209715
8	0.167772
9	0.134218

Man muss mindestens neun Personen befragen.

3. Prognoseintervall bestimmen:

Ermitteln Sie ein 2σ – Prognoseintervall für die Anzahl der Studierenden, die leistungssteigernde Substanzen konsumieren, wenn 600 zufällig ausgewählte Studierende befragt werden und man von 20% „Dopern“ ausgeht..

Es gilt nach den Sigma-Regeln: $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954$

Setzt man hier die Parameter $n = 600$ und $p = 0,2$ ein, so ergibt sich mit $\mu = n \cdot p$: und

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ als Erwartungswert $\mu = 120$ (als Variable a gespeichert) und als Standardabweichung $\sigma \approx 9,8$ (als Variable b gespeichert).

600*0.2 → a 120
 $\sqrt{a \cdot 0.8} \rightarrow b$
 9.797958971

Damit kann das Prognoseintervall berechnet werden:

$$120 - 2 \cdot 9,8 \leq X \leq 120 + 2 \cdot 9,8$$

$$100,4 \leq X \leq 139,6$$

a-2*b 100.4040821
 a+2*b 139.5959179

Mit ca. 95,4 %iger Sicherheit werden bei der Befragung

von 600 Studierenden mindestens 101 und höchstens 139 Studierende ermittelt, die leistungssteigernde Substanzen konsumieren, falls $p = 0,20$ zutrifft. (Rundung in Richtung der Relationszeichen)

Probe:

Binomialcdf BOUNDS
 TRIALS=n=600
 P(SUCCESS)=0.2

Binomialcdf BOUNDS
 LOWERBnd=101
 UPPERBnd=139

Binomialcdf BOUNDS
 VALUE=0.9536261248918
 STORE: NO y z t a b c d
 SOLVE AGAIN QUIT

4. Konfidenzintervall ermitteln:

Bei einer Befragung von 1200 Studierenden geben 300 Personen an, leistungssteigernde Substanzen zu konsumieren. Untersuchen Sie, mit welchem Anteil an „Dopern“ bei allen Studierenden man rechnen kann, wenn ein Konfidenzniveau von 95,4% zu Grunde gelegt wird. Beurteilen Sie, ob das Ergebnis Anlass gibt, $p = 0,20$ in Zweifel zu ziehen.

Stichprobenumfang $n = 1200$; Konfidenzniveau 95,4% $\rightarrow c = 2$

Stichprobenergebnis: 300 \rightarrow relative Häufigkeit: $h = \frac{300}{1200} = 0,25$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{1200 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 15 > 3$

Die Lösung der Doppelungleichung $p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{1200}} \leq 0,25 \leq p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{1200}}$

ergibt das Konfidenzintervall.

Rechte Intervallgrenze:

Eine Lösung für die Ungleichung $p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{1200}} \leq 0,25$ wird ermittelt, indem die Funktion

$f(x) = x - 2 \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{\sqrt{1200}} - 0,25 = 0$ auf Nullstellen untersucht wird. Als Näherungsverfahren kann die fortgesetzte Verfeinerung der Intervalle, in denen es Vorzeichenwechsel der Funktionswerte gibt, verwendet werden.

$f(x) = x - 2 \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{\sqrt{1200}}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{300} - 0,25$																
<table border="1"> <tr><th colspan="2">TABLE SETUP</th></tr> <tr><td>Start=0</td><td></td></tr> <tr><td>Step=0.1</td><td></td></tr> <tr><td>Auto</td><td>x = ?</td></tr> </table>	TABLE SETUP		Start=0		Step=0.1		Auto	x = ?	<table border="1"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.1</td><td>-0.16732</td></tr> <tr><td>0.2</td><td>-0.07309</td></tr> <tr><td>0.3</td><td>0.023542</td></tr> </table>	x	f(x)	0.1	-0.16732	0.2	-0.07309	0.3	0.023542
TABLE SETUP																	
Start=0																	
Step=0.1																	
Auto	x = ?																
x	f(x)																
0.1	-0.16732																
0.2	-0.07309																
0.3	0.023542																
<table border="1"> <tr><th colspan="2">TABLE SETUP</th></tr> <tr><td>Start=0.2</td><td></td></tr> <tr><td>Step=0.01</td><td></td></tr> <tr><td>Auto</td><td>x = ?</td></tr> </table>	TABLE SETUP		Start=0.2		Step=0.01		Auto	x = ?	<table border="1"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.26</td><td>-0.01532</td></tr> <tr><td>0.27</td><td>-0.00563</td></tr> <tr><td>0.28</td><td>0.004077</td></tr> </table>	x	f(x)	0.26	-0.01532	0.27	-0.00563	0.28	0.004077
TABLE SETUP																	
Start=0.2																	
Step=0.01																	
Auto	x = ?																
x	f(x)																
0.26	-0.01532																
0.27	-0.00563																
0.28	0.004077																
<table border="1"> <tr><th colspan="2">TABLE SETUP</th></tr> <tr><td>Start=0.27</td><td></td></tr> <tr><td>Step=0.001</td><td></td></tr> <tr><td>Auto</td><td>x = ?</td></tr> </table>	TABLE SETUP		Start=0.27		Step=0.001		Auto	x = ?	<table border="1"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.274</td><td>-0.00175</td></tr> <tr><td>0.275</td><td>-7.8E-4</td></tr> <tr><td>0.276</td><td>1.915E-4</td></tr> </table>	x	f(x)	0.274	-0.00175	0.275	-7.8E-4	0.276	1.915E-4
TABLE SETUP																	
Start=0.27																	
Step=0.001																	
Auto	x = ?																
x	f(x)																
0.274	-0.00175																
0.275	-7.8E-4																
0.276	1.915E-4																

Analog findet man einen Näherungswert für die linke Intervallgrenze durch Anwenden

des Näherungsverfahrens auf $f(x) = x + 2 \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{\sqrt{1200}} - 0,25 = 0$:

$f(x) = x + 2 \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{\sqrt{1200}}$	<table border="1"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.224</td><td>-0.00193</td></tr> <tr><td>0.225</td><td>-8.91E-4</td></tr> <tr><td>0.226</td><td>1.47E-4</td></tr> </table>	x	f(x)	0.224	-0.00193	0.225	-8.91E-4	0.226	1.47E-4
x	f(x)								
0.224	-0.00193								
0.225	-8.91E-4								
0.226	1.47E-4								

Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4% liegt der Anteil der Studierenden, die leistungssteigernde Substanzen nehmen, im Intervall $[0,23; 0,27]$.

Man kann also $p = 0,20$ in Zweifel ziehen und von einer Erhöhung des Anteils der „Doper“ ausgehen.

Autor:

Dr. Wilfried Zappe