Stephanie Künne

Über Hüllkurven zu Ellipsen und Hyperbeln

1. Die Problemstellung:

Gegeben sind ein Kreis und ein beliebiger Punkt P. Verbindet man den Punkt P mit einem beliebigen Kreispunkt Q und zeichnet zu der Strecke $\overline{PQ}$ die Mittelsenkrechte, so entsteht mit der Verschiebung des Punktes Q auf dem Kreis eine Geradenschar.

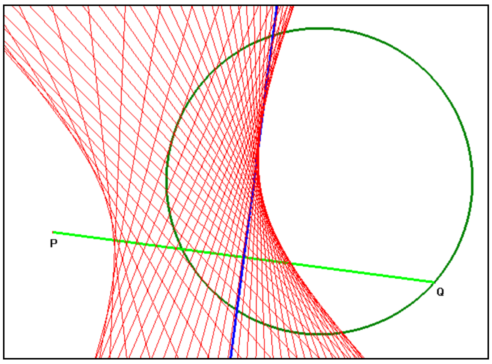

Abb. 1

Mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware lässt sich sehr ästhetisch visualisieren, wie hier eine Randkurve entsteht. Diese *Hüllkurve* ist zunächst nur durch die Lage ihrer Tangenten bestimmt. Im gymnasialen Mathematikunterricht wird dieser Zugang zu einer algebraischen Kurve zweiter Ordnung derzeit kaum berücksichtigt.

2. Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

Unbekannt und aus der gegebenen Information der Problemstellung heraus nicht unmittelbar erkennbar ist die Form der entstehenden Kurven. Die Veranschaulichung des Problems durch die Umsetzung seiner Beschreibung ist unmittelbar motiviert.
Die Geometriesoftware spielt bei diesem Vorgehen eine tragende Rolle, indem sie auf dynamisch-simulierende Weise die variationsreichen Formen von Ellipsen und Hyperbeln als Ortskurven / Hüllkurven aufzeigt und so den Schülern eine Vorstellung von der Ausgangssituation ermöglicht, die ihr Abstraktionsvermögen aus der gegebenen Problemstellung heraus nicht leisten kann.
Das Programm ‚Cabri' eignet sich ebenso wie ‚Euklid' wegen seiner einfachen Handhabung zur Veranschaulichung von Erzeugungsvorgängen. Jedoch besitzt ‚Cabri' den Vorteil, dass nicht nur Ortskurven einzelner Punkte, sondern auch die Spur von Geraden dargestellt werden können.
Die konkrete, inhaltlich leicht erfassbare Problemvorgabe erlaubt den Lernenden ein selbsttätiges Entdecken der Besonderheiten der entstehenden Hüllkurven. Durch planvolles Experimentieren mit den gegebenen Veränderlichen eröffnet sich den Schülern ein Zugang zur Problemstellung, der sie einerseits zum Bilden von Hypothesen anregt, der andererseits aber auch die notwendige Voraussetzung und die Motivation für die anschließende Formalisierung darstellt.
Auf die Phase des Experimentierens folgt die kategorisierende Zusammentragung der Beobachtungen und Hypothesen. In meinem Unterricht wurden folgende - <u>auch fehlerhafte</u> - Ergebnisse festgehalten:

1) die Mittelsenkrechten bilden Tangenten zur Hyperbel
2) liegt P im Ursprung, erhält man einen Kreis
3) liegt P im Kreis, erhält man eine Ellipse
4) der Durchmesser des kleinen Kreises entspricht dem Radius des gegebenen Kreises
5) liegt P außerhalb des Kreises, näher am Kreis, wird die Hyperbel stärker gekrümmt und umgekehrt
6) die Hyperbeläste verlaufen symmetrisch zueinander, verbindet man P und den Kreismittelpunkt, dann liegen die Scheitel auf dieser Strecke
7) der Abstand zwischen den Scheiteln entspricht dem Radius
8) bewegt man P auf einem Kreis um den Kreis, dreht sich die Hyperbel
9) geht die Strecke $\overline{PQ}$ durch den Kreismittelpunkt, so liegt der Scheitel eines Hyperbelastes in der Mitte der Strecke $\overline{PQ}$

Daran schließt sich die rechnerische Bestimmung der Hüllkurven an. Sie ist für die spätere Überprüfung der formulierten Hypothesen notwendig. Einschränkend sollte für die Entwicklung des Lösungsansatzes der Punkt P auf der x-Achse des kartesischen Koordinatensystems festgelegt werden. Dadurch bestimmen die Schüler gleichsam die ‚Grundform' der Hüllkurvenbeschreibung sowohl für die Ellipse als auch für die Hyperbel. Die übrigen Darstellungen lassen sich durch Drehung herleiten. Diese kann sinnvoll zu einem späteren Zeitpunkt z.B. über affine Abbildungen durchgeführt werden. Zudem ergeben sich bei variabler Lokalisierung von P komplizierte Terme. Die entsprechenden Rechnungen kann der TI 92 Plus nicht mehr leisten. Des Weiteren kann zur Vereinfachung für den Radius ein konkreter Wert angenommen werden. Diese Festlegung stellt keine Einschränkung in der Formenvielfalt der Kurven dar, solange der Punkt P auf der x-Achse variabel bleibt.

Lösungsskizze:

Für die folgende Beschreibung befinde sich der Kreismittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

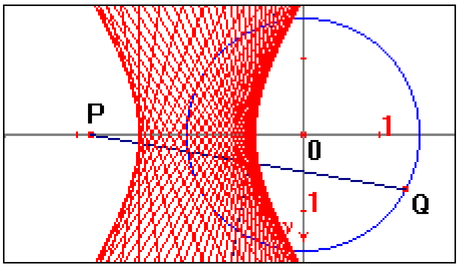

Abb. 2

Liegt P auf der Abszissenachse außerhalb des Kreises, so erzeugt die Randkurve der Geradenschar eine Hyperbel, deren Scheitel ebenfalls auf der x-Achse liegen. Je größer der Abstand zwischen P und dem Kreismittelpunkt, desto gestreckter verläuft die Hyperbel. Je größer der Kreisradius, desto geringer ist der Abstand zwischen den Scheiteln.

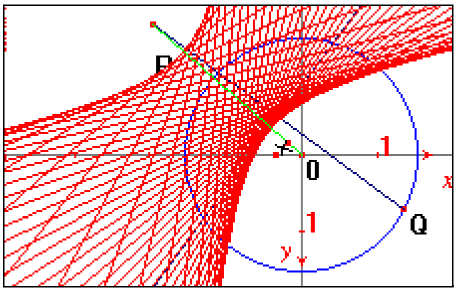

Abb. 3

Wird P außerhalb des Kreises, nicht aber auf der x-Achse lokalisiert, unterliegt die Hyperbel einer Drehung um den Winkel $\alpha \quad \angle(P\Theta, y=0)$, wobei PO die Gerade durch P und den Kreismittelpunkt darstellt.

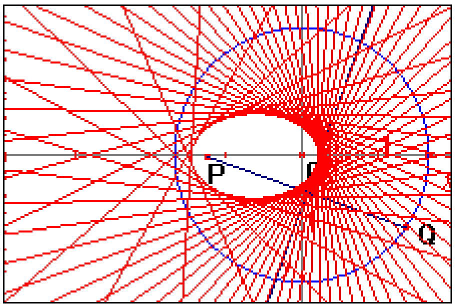

Abb. 4

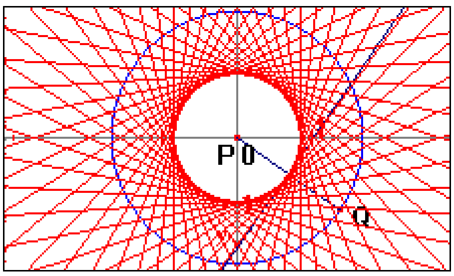

Abb. 5

Wenn P innerhalb des Kreises auf der x-Achse liegt, hüllt die Geradenschar eine Ellipse ein, deren Hauptscheitel umso weiter voneinander entfernt sind, je weiter P vom Kreismittelpunkt entfernt liegt. Eine Vergrößerung des Kreisradius bewirkt eine Verlängerung der Halbachsen, wobei sich ihr Verhältnis zueinander eins annähert, d.h. die Ellipse die Form eines Kreises als spezielle Ellipse annimmt. Auch die Ellipse wird bei Verlagerung von P um den Winkel $\alpha \quad \angle(P\Theta, y=0)$ gedreht.

Fällt P mit dem Kreismittelpunkt zusammen, erzeugt die Geradenschar einen Kreis.

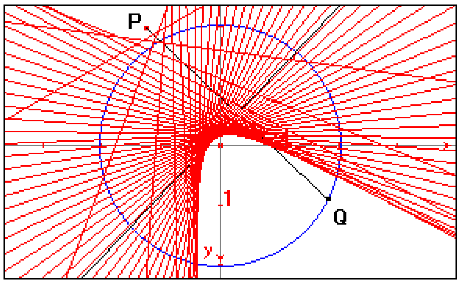

Abb. 6

Liegt P auf der Kreislinie bzw. in ihrer Nähe, so entsteht als Hüllkurve eine Parabel.

Zur Bestimmung der Hüllkurve wird P mit den Koordinaten (-e | 0), e > 0, auf der x-Achse festgelegt.

Die Offenheit der Aufgabenstellung lässt in unterschiedlichen Darstellungsformen der Hüllkurven verschiedene Lösungswege zu. Prinzipiell sind zur Lösung zwei Ansätze möglich: Die Bearbeitung der Aufgabenstellung als Extremwert- oder als Grenzwertproblem.

Wird die Aufgabe als Extremwertproblem aufgefasst, so betrachtet man für einen beliebigen x-Wert x_0 die Menge aller zugehörigen Funktionswerte der Schar mit dem Parameter (im Folgenden a) und bestimmt den extremalen Funktionswert. In Verallgemeinerung für $x \in \mathbf{R}$ erhält man die Hüllkurve.

Daher ist zunächst die Geradenschar der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{PQ}$ mit

$$Q = \left(a \mid \pm\sqrt{r^2 - a^2}\right)$$

aufzustellen. Anhand der Kreisgleichung $y^2 + x^2 = r^2$ und unter Hinzuziehung des Mittelpunktes

$$M = \left(\frac{a + e}{2}; \frac{\pm\sqrt{r^2 - a^2}}{2}\right)$$

ergibt sich die Gleichung g(x,a):

$$y = \pm \frac{2 \cdot (a-e) \cdot x + e^2 - r^2}{2\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Nach Bilden der Ableitung und ihrer Nullsetzung erhält man a.

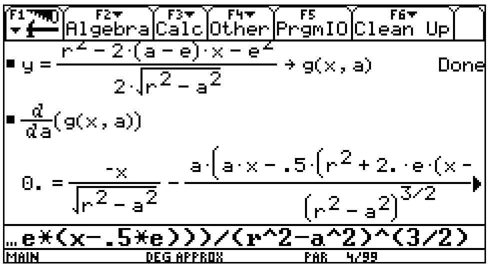

Abb.7

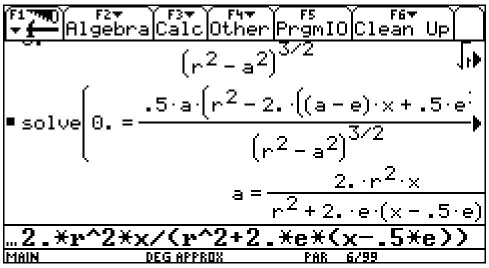

Abb.8

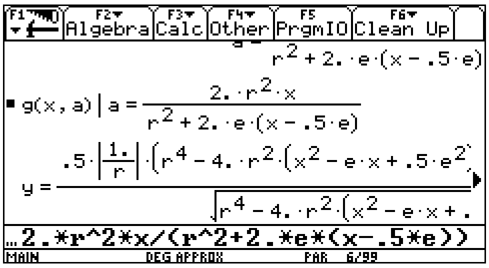

Abb.9

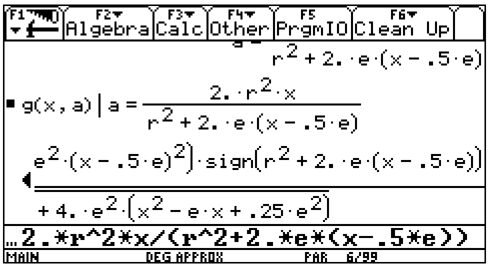

Abb.10

Die Einsetzung in die Funktionsgleichung der Mittelsenkrechten liefert die Hüllkurvengleichung.

Die Schüler sind insbesondere im Hinblick auf die Herleitung der impliziten Darstellung angehalten, den angegebenen Term zu vereinfachen:

$$y = \pm \frac{1}{2r} \cdot \sqrt{r^4 - 4r^2 \cdot (x^2 - e \cdot x + 0,5e^2) + 4e^2 \cdot (x - 0,5e)^2}$$

Durch Umformung, die ebenfalls von den Schülern händisch ausgeführt werden muss, entsteht die implizite Darstellung

$$y^2 = \frac{1}{4r^2}[r^4 - 4r^2 \cdot \left(x^2 - e \cdot x + 0,5e^2\right) + \dots$$
$$\dots 4e^2 \cdot (x - 0,5e)^2]$$

$$y^2 = \frac{1}{4r^2}[r^4 - 4r^2\left(0,25e^2 + x^2 - e \cdot x + 0,25e^2\right) +$$
$$\dots 4e^2 \cdot (x - 0,5e)^2]$$

$$y^2 = \frac{1}{4r^2}[r^4 - r^2e^2 - 4r^2(x + 0,5e)^2 + 4e^2(x - 0,5e)^2]$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(r^2 - e^2\right) - (x - 0,5e)^2 + \frac{e^2}{r^2}(x - 0,5e)^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(r^2 - e^2\right) - \frac{\left(r^2 - e^2\right) \cdot (x - 0,5e)^2}{r^2}$$

$$\frac{y^2}{0,25 \cdot (r^2 - e^2)} + \frac{(x - 0,5e)^2}{0,25 \cdot r^2} = 1 .$$

Alternativ kann die Aufgabenstellung als **Grenzwertproblem** betrachtet werden, indem man zwei Geraden der Schar, deren Parameter a sich um den Wert δ unterscheiden, sich einander annähern lässt. Der Schnittpunkt ist schließlich mit dem Berührpunkt mit der Hüllkurve identisch. Rechnerisch bedeutet dies, die Gleichung g(x,a) = g(x,a+ δ) nach x aufzulösen und den Grenzwert des erhaltenen Terms für δ -> 0 zu bilden. Nach Einsetzen des nach a aufgelösten Ergebnisses in die Geradengleichung erhält man die oben angegebene Hüllkurve.

Literatur

- Knechtel, H./ Kramer, H./ Krüger, U.-H./ Weiskirch, W.: Mathe ‚open end'. Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra, Teil 1: Differentialrechnung, Braunschweig 2001.
- Kroll, W.: Grund- und Leistungskurs Analysis. Lehr- und Arbeitsbuch, Bd. 1: Differentialrechnung 1, Bonn 1985.
- Meyer, J.: Kegelschnitte mit Geometrie-Software. In: Mathe betrifft uns, Nr.5, Aachen 1996.
- Müller-Sommer, H.: Hüllkurven in Klasse 9. In: TI-Nachrichten, 2/02, S.19-22.

Der Autorin:
Stephanie Künne
D-31655 Stadthagen
Schule: Ratsgymnasium Stadthagen
e-Mail: mail@stephanie-kuenne.de