Wilfried Zappe
Hubert Langlotz

Hyperbolische Funktionen, Kettenlinie und eine Modellierung

Die Problemstellungen werden im ersten Teil mit dem TI-30X Prio MathPrint™ bearbeitet (Wilfried Zappe), im zweiten Teil folgen Ergänzungen zur Lösung mit der TI-Nspire™ CX CAS Technologie (Hubert Langlotz).
Die Funktionsgraphen und Streudiagramme wurden jeweils mit dem TI-Nspire™ erstellt.

Bei vielen technischen Problemen und bei Wachstumsvorgängen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf, die als hyperbolische Funktionen bezeichnet werden:

Sinushyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Cosinushyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangenshyperbolicus: $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Die hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen (Areafunktionen) sind auf dem TI-30X Prio MathPrint vorinstalliert als Dritt- bzw. Viertbelegung der Tasten $\sin\ \sin^{-1}$, $\cos\ \cos^{-1}$, $\tan\ \tan^{-1}$.

1. Kettenlinie

Hängt man ein Seil (oder eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ mit *a* ∈ ℝ+ modelliert werden. Der Wert der Konstanten *a* hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Die Länge der Kette ergibt sich durch $\ell = a \cdot \sinh\left(\frac{x_2}{a}\right) - a \cdot \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$, wobei $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ die Aufhängepunkte sind. Eine Herleitung dieser Formel findet sich im Anhang.

(Quelle: privat)

Beispiel 1:
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion *f* der obigen Form mit *a* = 4 beschrieben werden (*x* und *f*(*x*) in Metern).

a) Geben Sie die Gleichung von f in der Form von Kombinationen mit Funktionen $y = e^{\pm x}$ als auch mit cosh(x) an.
b) Stellen Sie die zugehörige Kettenlinie für die Aufhängepunkte $P_1(-3|y_1)$ und $P_2(3|y_2)$ grafisch dar.
c) In welcher Höhe befinden sich die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 und wie groß ist ihr Abstand?
d) Berechnen Sie die Länge des Seiles.

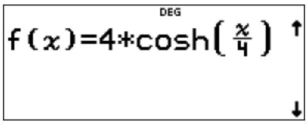
Wilfried Zappe
Hubert Langlotz

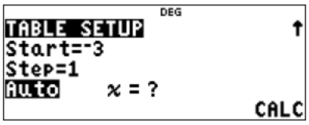
Lösungen:

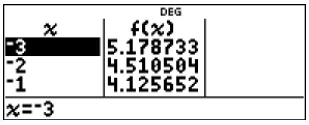
a) Die hier beschriebene Funktion f kann angegeben werden durch

$$f(x) = 4 \cdot \cosh\left(\frac{x}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) = 2 \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

b) Zur grafischen Darstellung wird die Funktion unter [table] [1] tabelliert.



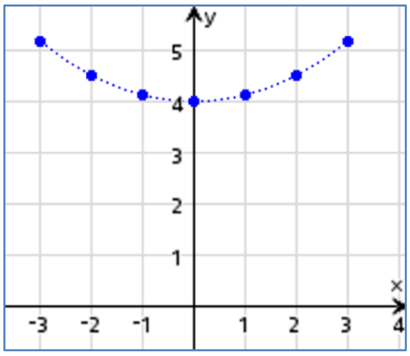




Weitere Werte kann man der Funktionsgleichung und der Symmetrie des Graphen entnehmen.

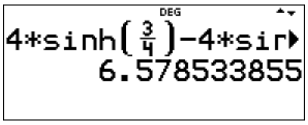
x	-3	-2-	-1	0	1	2	3
f(x)	5,2	4,5	4,1	4	4,1	4,5	5,2

c) Die beiden Aufhängepunkte befinden sich ca. 5,2 m über der Horizontalen. Ihr Abstand beträgt 6,0 m.



d) Mit $\ell = a \cdot \sinh\left(\frac{x_2}{a}\right) - a \cdot \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$ folgt

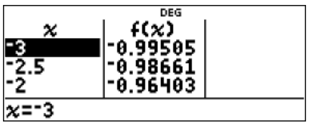
$$\ell = 4 \cdot \sinh\left(\frac{3}{4}\right) - 4 \cdot \sinh\left(\frac{-3}{4}\right) \approx 6{,}58\, m.$$

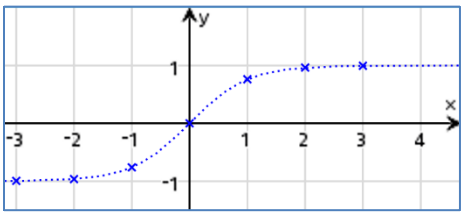


Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.

2. Tangenshyperbolicus und Wachstum

Zu einem ersten Verständnis für die Eignung der Funktion f(x) = tanh(x) zur Modellierung von Wachstumsvorgängen wird diese tabelliert und grafisch dargestellt.





x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-0,99	-0,96	-0,76	0	0,76	0,96	0,99

Prinzipiell lässt sich erkennen, dass die Hyperbeltangensfunktion für Prognoseberechnungen für Prozesse mit Sättigungscharakter geeignet ist.

Nach einem schwachen Beginn des Wachstums (Neuheitswert, eventuell hoher Preis usw.) folgt ein starker Zuwachs, der dann später wieder abflaut, weil eine Sättigungsgrenze des Wachstums erreicht ist.

Die Funktion $y = \frac{S}{2} \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-C}{K}\right)\right)$ stellt eine wichtige Spezialform für Prognosezwecke dar. Dabei bedeuten:

y: Bestand an Objekten zum Zeitpunkt x; S: Sättigungskonstante;
C: Zeitpunkt der „Halbsättigung"; K: Parameter[1]

Beispiel 2[2]:

Ein Hobbyforscher untersuchte das Wachstum einer Maispflanze[3] in einer Wachstumsperiode:

Tage	5	8	17	24	41	50	74	83	100
Höhe in cm	7	9	22	38	82	112	255	303	305

a) Stellen Sie die Daten in einem Streudiagramm dar und beschreiben Sie, anhand welcher Merkmale des Diagramms man auf beschränktes Wachstum schließen kann.

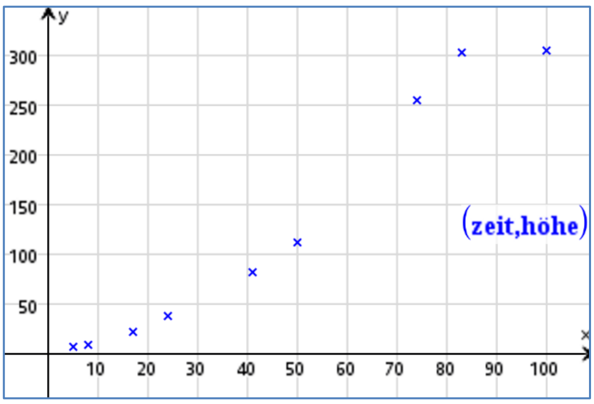
b) Ermitteln Sie mithilfe der Daten und des Streudiagramms eine Funktion der Form $y = \frac{S}{2} \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-C}{K}\right)\right)$ für diesen Wachstumsvorgang.

c) Vergleichen Sie mit dem Listeneditor des TI-30X Prio MathPrint™ die gegebenen Höhendaten mit denen, die sich aus dem Modell von Teilaufgabe b ergeben.

d) Berechnen Sie mithilfe der Wachstumsfunktion den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit am größten war. Ermitteln Sie auch die Größe der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit.
(Auf die Betrachtung der hinreichenden Bedingung zur Ermittlung des lokalen Maximums wird verzichtet.)

Lösungen:

a) Streudiagramm:
Man erkennt gut den verhaltenen Beginn des Wachstums.
Das Wachstumstempo ist dann von etwa dem 25. Tag bis zum 75. Tag viel größer, es flacht danach wieder ab.
Das sind alles Merkmale gesättigten bzw. logistischen Wachstums.



b) Die Sättigungsgrenze S könnte nach Tabelle bei S = 305 cm liegen. Sie wird nach 100 Tagen erreicht. Damit ist C = 50 Tage als Zeitpunkt der Halbsättigung gegeben. Setzt man diese Werte und die Koordinaten eines weiteren Datenpunktes, z. B. (17; 22) in die Gleichung $y = \frac{S}{2} \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-C}{K}\right)\right)$ ein, so lässt sich K berechnen:

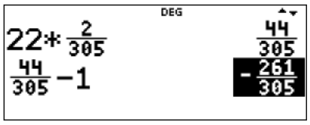
$22 = \frac{305}{2} \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{17-50}{K}\right)\right) \mid : \frac{305}{2}$

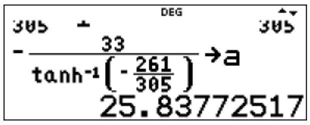
$\frac{44}{305} = 1 + tanh\left(\frac{-33}{K}\right) \mid -1$

$tanh\left(\frac{-33}{K}\right) = -\frac{261}{305}$ | Umkehrfunktion anwenden

$\frac{-33}{K} = artanh\left(-\frac{261}{305}\right) \mid WTR$

$K = \frac{-33}{artanh(-\frac{261}{305})} \approx 25{,}84$



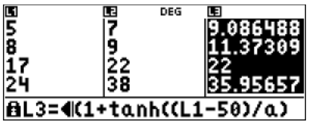


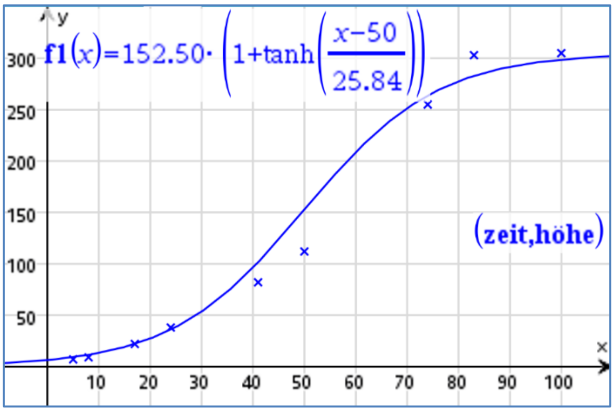
Wachstumsgleichung:

$y \approx 152{,}5 \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right)$

c) Tabelle erstellen:

Tage	5	8	17	24	41	50	74	83	100
Gemessene Höhe in cm	7	9	22	38	82	112	255	303	305
Höhe nach Modellrechnung	9	11	22	36	101	153	263	283	299



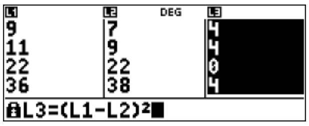


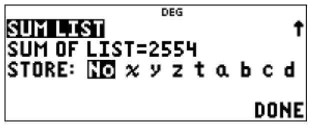
Das mathematische Modell liefert Höhenangaben, die von den gemessenen Daten etwas abweichen. Trotzdem gibt der zugehörige Graph das Wachstumsverhalten recht gut wieder, wie die hier mit TI-Nspire erstellte Grafik belegt.

Die Ergebnisse der Modellrechnung sind auch abhängig davon, welche Werte für S und C verwendet werden und welches Messwertpaar für die Berechnung des Parameters K verwendet wird.
Bei anderer Wahl des Messwertpaares für die Berechnung des Parameters K ergibt sich eine etwas andere Modellfunktion.
Hinzu kommt die Zufälligkeit der Messwerte bei Messungen an nur einer Pflanze und der Einfluss eventueller Messfehler.
Mit der Methode der Summe der kleinsten Fehlerquadrate ließe sich unter allen auf diese Weise ermittelten Modellfunktionen eine „möglichst gute“ Modellfunktion der hier betrachteten Form finden.

Die Berechnung der Summe der Fehlerquadrate mit dem TI-30X Prio MathPrint™ kann so vorgenommen werde, wie es die folgenden Screenshots zeigen:

Liste L1 erhält die (gerundeten) y-Werte der Modellfunktion, L2 die gemessenen Werte. In L3 werden zunächst die Quadrate $(\mathrm{L1}-\mathrm{L2})^2$ berechnet. Mit data OPS SUM wird die Summe dieser Quadrate ermittelt.





Die Summe der Fehlerquadrate beträgt für die oben vorgenommene Wahl der Parameter 2554.

d) Die 1. Ableitung von f(x) = tanh(x) ist $f'(x) = 1 - tanh^2(x)$.

Mit der Kettenregel ergibt sich für $f(x) = 152{,}5 \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right)$:

$f(x) = 152{,}5 + 152{,}5 \cdot tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)$

$$f'(x) = 0 + 152{,}5 \cdot \left[1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right] \cdot \frac{1}{25{,}84} \approx 5{,}9 - 5{,}9 \cdot tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)$$

$$f''(x) = 0 - 5{,}9 \cdot 2 \cdot\ tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) \cdot \left[1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right] \cdot \frac{1}{25{,}84}$$

$$f''(x) \approx -0{,}46 \cdot tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) \cdot \left[1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right]$$

Nullstelle von $f''(x)$ als mögliche Wendestelle:

$tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) \cdot \left[1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)$ = 0 oder $1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) = 0$

$tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)$ = 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{x-50}{25{,}84} = 0 \ \Leftrightarrow x = 50$

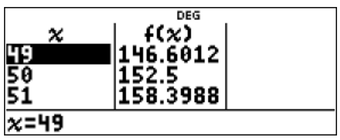
$1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) = 0 \Leftrightarrow\ tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right) = \pm 1$

Diese beiden Gleichungen haben keine Lösung, weil $y = \pm 1$ die Asymptoten an den Graphen von y = tanh(x) sind.

Für x = 50 ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten.

Wegen $f'(x) = 5{,}9 \cdot \left[1 - tanh^2\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right]$ ist mit x = 50: $f'(50) = 5{,}9$, d. h. am 50. Tag nimmt die Größe um ca. 5,9 cm zu.

Das stimmt auch weitgehend überein mit der Wertetabelle:



Anhang: Herleitung der Formel für die Länge der Kettenlinie

Für die Bogenlänge ℓ des Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ gilt $\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ (*).

Die Kettenlinie wird durch die Funktion $f(x) = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ beschrieben. Für ihre 1. Ableitung gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} + e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Um die Bogenlänge der Kettenlinie mit (*) zu berechnen, wird zunächst der Radikand $1 + [f'(x)]^2$ umgeformt:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left[sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 = 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]^2$$

Mit der binomischen Formel erhält man daraus:

$$1 + \frac{1}{4} \cdot \left[e^{\frac{2x}{a}} - 2 \cdot \underbrace{e^{\frac{x}{a}} \cdot e^{-\frac{x}{a}}}_{=1} + e^{-\frac{2x}{a}}\right]^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{2x}{a}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{2x}{a}} = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{2x}{a}}$$

Ausklammern von $\frac{1}{4}$ und die „nahrhafte Eins“ $e^{\frac{x}{a}} \cdot e^{-\frac{x}{a}}$ ergeben:

$$\frac{1}{4} \cdot \left[e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right] = \frac{1}{4} \cdot \left[e^{\frac{2x}{a}} + 2 \cdot \underbrace{e^{\frac{x}{a}} \cdot e^{-\frac{x}{a}}}_{=1} + e^{-\frac{2x}{a}}\right] = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

Dieser Term wird in (*) eingesetzt:

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\ dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\ dx =$$

$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = a \cdot \sinh\left(\frac{x_2}{a}\right) - a \cdot \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$ w. z. b. w.

Hinweis: Auch mit der Anwendung des “Winkelpythagoras” für die hyperbolischen Funktionen lässt sich der Nachweis führen.

Nutzung des TI-Nspire™ CAS bei der Anwendung von hyperbolischen Funktionen

1. Berechnung der Bogenlänge

Die Berechnung der auf Seite 1 gesuchten Bogenlänge kann mit dem CAS auf zwei verschiedene Art und Weisen erfolgen. Die Funktionsbezeichnungen werden über die Buchstabentasten eingegeben.

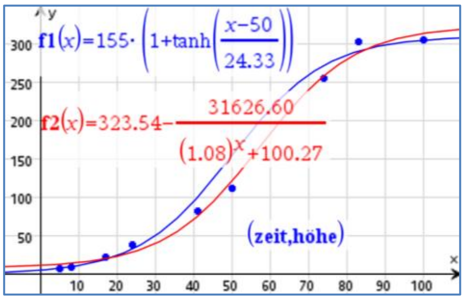
1. Man nutzt die Formel $\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$f(a,x):=a\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ▸ *Fertig* $\frac{d}{dx}(f(a,x))$ ▸ $\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ ⚠ $fs(a,x):=\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ ▸ *Fertig* $\int_{-3}^{3}\sqrt{1+(fs(4,x))^2}\,dx$ ▸ 6.5785
2. Man verwendet die implementierte Funktion arclen()	arcLen(f(4,x),x,-3,3) ▸ 6.5785

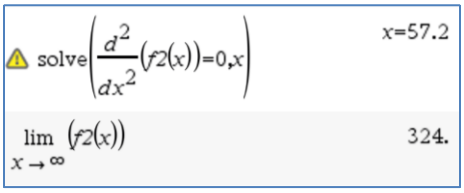
2. Herleitung der Gleichung $\ell = a\cdot\sinh\left(\frac{x_2}{a}\right) - a\cdot\sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$

Der TI-Nspire kann die Stammfunktion automatisch nicht ermitteln.	$\int\sqrt{1+(fs(4,x))^2}\,dx$ ▸ $\frac{\int\left(e^{\frac{-x}{4}}\cdot\sqrt{2\cdot e^{\frac{x}{2}}+e^{x}+1}\right)dx}{2}$
Erst mit der Betrachtung, dass $[f_4'(x)]^2 = (\sinh(x))^2$ gilt und für die hyperbolischen Funktionen der trigonometrische Pythagoras in der Form $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ gilt, kann die Stammfunktion ermittelt werden.	$(fs(4,x))^2$ ▸ $\left(\sinh\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2$ $(\cosh(x))^2-(\sinh(x))^2$ ▸ 1
	$\int\cosh\left(\frac{x}{4}\right)dx$ ▸ $4\cdot\sinh\left(\frac{x}{4}\right)$ $\int_{-3}^{3}\cosh\left(\frac{x}{4}\right)dx$ ▸ 6.5785

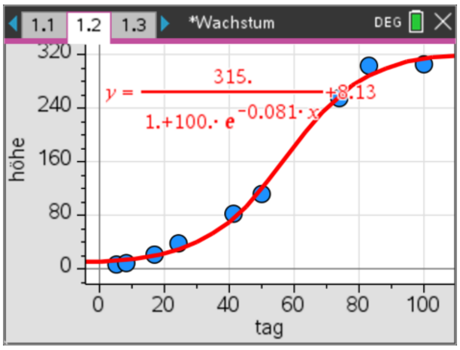
3. Logistisches Wachstum

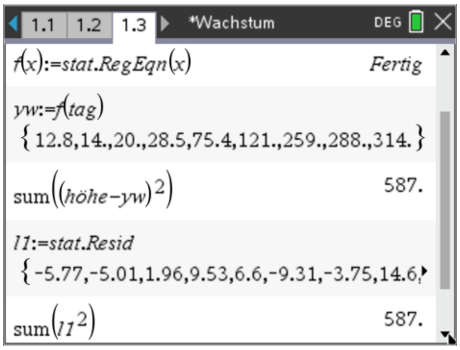
Der TI-Nspire™ CX II-T erlaubt durch die Möglichkeit einer logistischen Regression eine komfortable und schnelle Bestimmung einer im Vergleich zu der auf Seite 4 im Zusammenhang mit dem Wachstum einer Maissorte hergeleiteten Hyperbeltangensfunktion $y \approx 152{,}5 \cdot \left(1 + tanh\left(\frac{x-50}{25{,}84}\right)\right)$ anderen Modellfunktion. Deren Graph und Gleichung sind hier in roter Farbe dargestellt.





Im Folgenden wird das Ergebnis der logistischen Regression nochmal als verkettete e-Funktion in der Anwendung *Data&Statistics* dargestellt. Im Screenshot rechts daneben sind zwei Möglichkeiten angegeben, die Summe der Fehlerquadrate anhand der statistischen Kenngrößen, die vom TI-Nspire automatisch ermittelt werden, zu berechnen. Die Summe der Fehlerquadrate hat bei dieser Modellfunktion den Wert 587 und ist viel kleiner als die auf Seite 5 mit 2554 berechnete Summe.





Diese Funktion hat auch etwas andere Eigenschaften.
Der Zeitpunkt der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit liegt hier bei ca. 57 Tagen und die Sättigungsgrenze bei 324 cm.
Welche der beiden Modellfunktionen die geeignetere ist, lässt sich nicht sagen, weil nicht bekannt ist, ob die in der Tabelle auf Seite 3 gegebenen Daten bis zum Ende der Wachstumsperiode erhoben wurden.

Literaturverzeichnis

[1] Vgl.: *Gilde/ Altrichter:* „Mehr Spaß mit dem Taschenrechner“, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982, Seite 109
[2] Tabelle aus „Fokus Mathematik; Qualifikationsphase NRW“, Cornelsen 2015, Seite 107; Nr. 16
[3] https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/13/01/07/maize-155126_960_720.png (zuletzt eingesehen am 15.02.2024)

Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe