Goldmünzen – Wahrscheinlichkeiten simulieren

Problemstellung[1)]
Der königliche Münzpräger soll je 100 Goldmünzen in 100 Kisten packen. Er ersetzt in jeder Kiste eine Goldmünze durch eine falsche Münze. Dabei meint er, der Betrug wird nicht auffallen, weil es viel zu unwahrscheinlich ist, dass der König beim Inspizieren ausgerechnet eine falsche Münze entdeckt. Der Münzpräger weiß nämlich, dass der faule König aus jeder der 100 gelieferten Kisten genau eine Münze entnimmt und überprüft.
Ermittle das Risiko für den Münzpräger, dass der König den Betrug bemerkt.

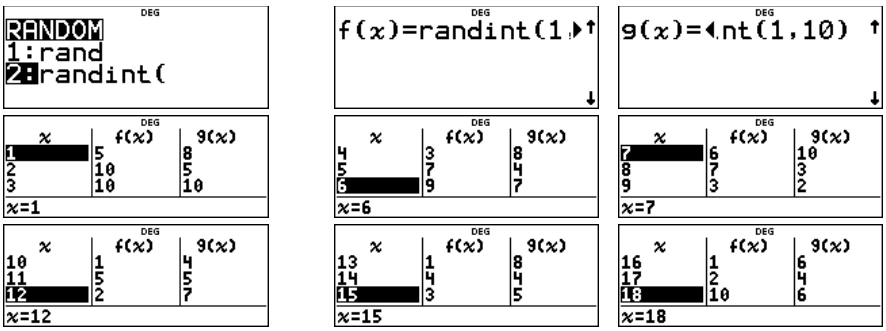
Aufgaben

a) Formuliere eine begründete Vermutung bezüglich des Entdeckungsrisikos.

b) Eine Simulation mit Spielkarten soll das Problem etwas reduzieren:
Es werden sechs Stapel mit je nur zehn Karten verdeckt hingelegt. Jeder Stapel enthält neun rote (Goldmünzen) und eine schwarze Karte (falsche Münze). Nun wird aus jedem Stapel eine Karte zufällig gezogen und ihre Farbe festgestellt.
Erläutere, wie bei dieser Simulation mit Spielkarten das Risiko der Entdeckung der Fälschung geschätzt werden kann.

c) Beschreibe das vorgestellte Verfahren mit Zufallszahlen für eine Simulation mit Spielkarten von Teilaufgabe b). Nutze den TI-30X Prio MathPrint™ und seine Anwendung [table].
Definiere $f(x) = randint(1{,}10)$ und $g(x) = randint(1{,}10)$.

Die Anweisung „randint“ findet man unter [2nd] [! nCr nPr]:



d) Simuliere mit dem TI-30X Prio MathPrint™ nun das Problem für sechs Kisten mit je 100 Münzen auf analogem Wege mithilfe von Zufallszahlen und ermittle damit einen Näherungswert für den Anteil der entdeckten Betrugsversuche an allen Durchführungen. Fasse die Ergebnisse aller Mitschüler zusammen. Beschreibe, welche Schlussfolgerung sich bezüglich des Entdeckungsrisikos bei sechs Kisten mit je 100 Münzen ziehen lässt.

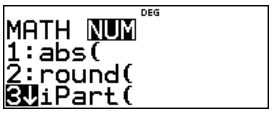
e) Es soll nun die ursprüngliche Problemstellung simuliert werden, wenn in 100 Kisten je 100 Goldmünzen, von denen je eine gefälscht ist, verpackt werden. Dabei kann mit dem TI-30X Prio MathPrint™ folgendes Verfahren angewendet werden.

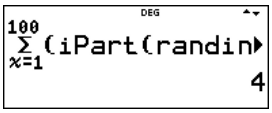
$$\sum_{x=1}^{k} iPart\left(\frac{randint(1{,}100)}{100}\right)$$

3:iPart(	Ganzzahliger Teil einer Zahl Syntax: **iPart(*Wert*)**

© T3 Deutschland 2026

Die vollständige Eingabe für k = 100 lautet $\sum_{x=1}^{100} iPart(\frac{randint(1,100)}{100})$. Die Anweisung iPart ist unter [math] NUM zu finden.





- Begründe das Verfahren in einem kurzen Text.
- Führe das Verfahren viermal durch und ermittle mit den Ergebnissen einen Näherungswert für das Risiko, erwischt zu werden.

f) Ermittle eine theoretische Lösung.

Lösungshinweise

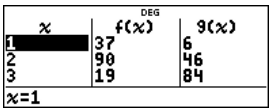
a) Individuelle Lösung.

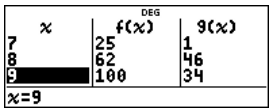
b) Der Betrug wird „auffliegen“, wenn in mindestens einem Stapel die schwarze Karte entdeckt wird. Es muss also am Ende festgestellt werden, ob mindestens eine schwarze Karte unter den sechs gezogenen Karten ist. Das kann als „Treffer“ für den aufgedeckten Betrug gewertet werden. Es werden nun n solche Sechserserien durchgeführt. Der Anteil der Treffer an allen n Sechserserien ist dann ein Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

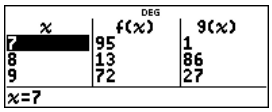
c) Mit randint(1,10) wird eine ganzzahlige Zufallszahl zwischen 1 und 10 erzeugt. Jeder Aufruf dieses Befehls simuliert das zufällige Ziehen einer Spielkarte aus zehn Spielkarten durch Angabe einer Zufallszahl aus dem Intervall [1; 10]. Man legt vorher fest, welche dieser Zahlen für das Finden der schwarzen Spielkarte steht, z. B. kann das Ziehen der Zahl „10“ dafür gewählt werden. Werden beide Funktionen f(x) und g(x) mit diesem Befehl definiert, dann lassen sich beim TI-30X Prio MathPrint™ in ein und demselben Bildschirm die sechs „Ziehungen“, d.h. ein Simulationsdurchgang, gleichzeitig beobachten. In den abgedruckten Screenshots steht jeder Screenshot mit seinen sechs Zufallszahlen für die Simulation der Überprüfung von je sechs Spielkartenstapel, d.h. für einen Simulationsdurchlauf. Dabei wird in den Zeilen 1, 2 und 3 dreimal die „10“ erzeugt, in den Zeilen 7, 8, 9 und 16, 17, 18 wurde je einmal die „10“ gezogen, d.h. die Fälschung wurde entdeckt. In den Zeilen 4, 5, 6 sowie 10, 11, 12 und 13, 14, 15 wurde keine „10“ gezogen, d. h. die Fälschung wurde nicht entdeckt. Das bedeutet, dass bei sechs Simulationsdurchläufen dreimal der Betrug entdeckt wurde und dreimal nicht entdeckt wurde. Das entspricht 50 % geschätzte Wahrscheinlichkeit für die Entdeckung des Betruges.

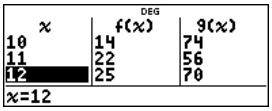
© T3 Deutschland 2026

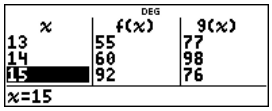
d) Simulation des reduzierten Problems für sechs Kisten mit je 100 Münzen:
Definiere $f(x) = randint(1{,}100)$ und $g(x) = randint(1{,}100)$.
Beispiele:

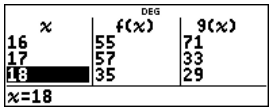








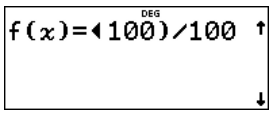


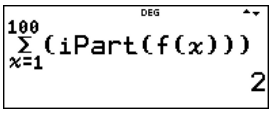


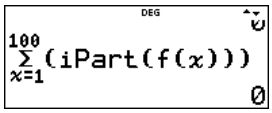
In den Beispielen wurden sechs Simulationsdurchläufe von je sechs Kisten realisiert, bei denen genau einmal die Zufallszahl 100 erzeugt wurde.
In einem von sechs Fällen wurde eine falsche Münze gefunden. Das Risiko, entdeckt zu werden, betrug bei dieser Simulation rund 16,7 %.

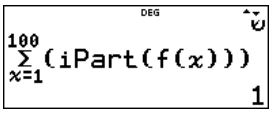
e) Die Anweisung randint(1,100) erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall [1; 100].

Wird diese Zufallszahl durch 100 dividiert, ergibt sich der Quotient q = 1 genau dann, wenn die Zufallszahl 100 heißt, sonst ergibt sich ein Quotient q mit 0 < q < 1.
Mit ipart(x) wird der ganzzahlige Anteil von q erzeugt, also eine 0 für 0 < q < 1 und eine 1 für q = 1.
Summiert man diese Zahlen für $1 \leq x \leq k$ auf, so erkennt man an dem Wert s der Summe, wie oft die Zufallszahl 100 bei k erzeugten Zufallszahlen angegeben wurde.
Übertragen auf das Modell bedeutet das, dass für k Kisten mit je 100 Münzen die Zahl s angibt, wie oft der Betrag entdeckt wurde.
Viermal simulieren:









Bei diesen vier Simulationen wurden zweimal Ergebnisse ungleich null erzeugt, also wurde in der Hälfte der Fälle der Betrug entdeckt.

f) **Theorie**
Es seien k Kisten mit je n Münzen, von denen jeweils genau eine gefälscht ist, gegeben. Das aus einer der Kisten bei einer Ziehung genau eine echte, unverfälschte Münzen gezogen wird, lässt sich durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$ beschreiben. Für k Kisten ist die Wahrscheinlichkeit, in allen k Kisten nur echte Münzen zu ziehen, mit $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ zu berechnen. Der Term $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ beschreibt dann die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der Kisten die gefälschte Münze gezogen wird.

© T3 Deutschland 2026

Beispiele:

$P(entdeckt) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ mit n: Anzahl der Goldmünzen; k: Anzahl der Kisten

$P(entdeckt) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 \approx 0{,}47$

$P(entdeckt) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{36} \approx 0{,}98$

$P(entdeckt) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^6 \approx 0{,}06$

$P(entdeckt) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 0{,}634$

Das Entdeckungsrisiko ist erstaunlich hoch, wenn der Exponent in $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ sehr groß ist.

Da der Bruch $\frac{n-1}{n} < 1$ ist, wird $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$.für größer werdende Werte von k immer kleiner und die Differenz $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ nähert sich immer mehr dem Wert 1 an.

Quellenangabe

1) aus dem Fortbildungsmaterial „Stochastik konkret 2014“ Modul A der DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik), 2014

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

© T3 Deutschland 2026