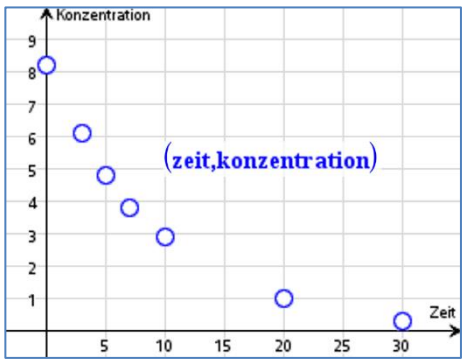
Lineare Regression Teil 3 – Untersuchung exponentieller Zusammenhänge durch halblogarithmische Darstellung

In diesem Beitrag wird ein Vorgehen dargestellt, mit dem man durch Logarithmieren einen exponentiellen in einen linearen Zusammenhang bringen kann. Dabei leistet das Verfahren der linearen Regression gute Dienste. Verwendet wird dabei der TI-30X Prio MathPrint™.

Problemstellung
Einer Patientin wurde über einen Tropf ein Medikament verabreicht. Nach der Medikamenteneinnahme wurde die Konzentration des Wirkstoffs im Blut zu einigen Zeitpunkten gemessen.

Zeit in Stunden	0	3	5	7	10	20	30
Konzentration in mmol/l	8,2	6.1	4.8	3,8	2,9	1,0	0,3



Es wird ein Zusammenhang zwischen der Zeit (x) und der Konzentration (y) gesucht. Dazu werden die Wertepaare als Punkte in einem Koordinatensystem graphisch dargestellt[1].

Welche bekannten Funktionstypen haben einen ähnlichen charakteristischen Verlauf?
Zum Beispiel könnte die Form der Abnahme der y-Werte für eine abnehmende Exponentialfunktion $y = f(x) = b \cdot e^{a \cdot x}$ mit $b > 0$ und $a < 0$ oder für eine Hyperbel vom Typ $y = g(x) = \frac{k}{x}$ sprechen. Gegen die Funktion g spricht allerdings, dass es auch einen Messwert für den Zeitpunkt x = 0 gibt, aber g(x) für x = 0 nicht definiert ist.

Durch einen Trick lässt sich prüfen, ob die Annahme eines exponentiellen Zusammenhangs sinnvoll ist. Dazu wird die Gleichung $y = b \cdot e^{a \cdot x}$ auf beiden Seiten mit der ln-Funktion logarithmiert:

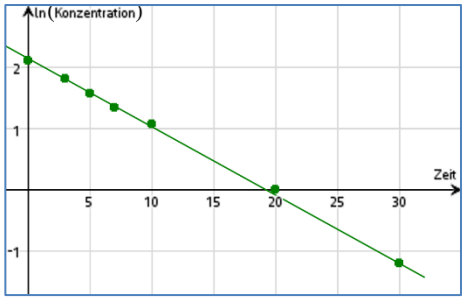
$y = b \cdot e^{a \cdot x}$ | ln
$\ln(y) = \ln(b \cdot e^{a \cdot x})$ | Logarithmengesetz $\ln(p \cdot q) = \ln(p) + \ln(q)$ anwenden
$\ln(y) = \ln(b) + \ln(e^{a \cdot x})$ | Logarithmengesetz $\ln(p^t) = t \cdot \ln(p)$ anwenden
$\ln(y) = \ln(b) + a \cdot x \cdot \ln(e)$ | mit ln(e) = 1 folgt
$\ln(y) = a \cdot x + \ln(b)$

Diese letzte Gleichung ist eine Geradengleichung der Form $\tilde{y} = m \cdot x + n$ mit m = a, $\tilde{y} = \ln(y)$ und $n = \ln(b)$. Trägt man in obigem Beispiel die Werte der Zeit gegen die der

[1] Grafische Darstellungen in Form von Diagrammen wurden hier mit der Software von TI-Nspire erstellt.

© T3 Deutschland 2025

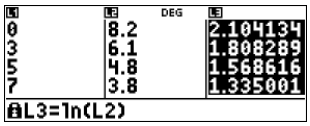
natürlichen Logarithmen der Medikamentenkonzentration auf, so ergibt sich in halblogarithmischer Darstellung auch näherungsweise eine Gerade.

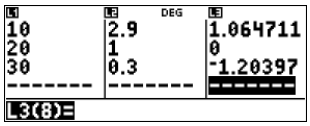


Für diesen Zusammenhang wird der Korrelationskoeffizient und die Gleichung der Regressionsgeraden bestimmt.

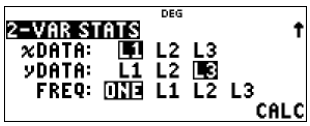
Korrelationskoeffizient

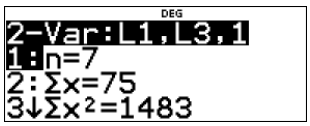
Unter [data] werden die x-Werte in L1, die y-Werte in L2 eingetragen und in L3 die Werte von ln(y) = ln(L2) mit [data] Formula 1 tabelliert.

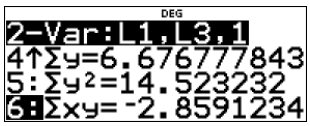




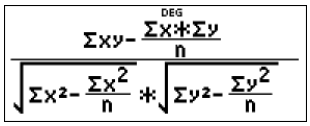
- Mit [2nd][data][3] wird die Zwei-Variablenstatistik für L1 und L3 aufgerufen.
- Dieser lassen sich die zur Anwendung der Formel notwendigen Werte entnehmen.
- Um die Symbole mit ihren angezeigten Werten in den Hauptbildschirm zu übertragen, wird die Taste mit der Zahl vor dem Term gedrückt.
- Mit [2nd][data][1] geht es zurück in die Zwei-Variablenstatistik.
- Hinweis: Sollte man mit [2nd][data][1] nicht in den Bildschirm mit den Kenngrößen der Zwei-Variablenstatistik gelangen, kann dieser mit [2nd][data][3] wieder aufgerufen werden.

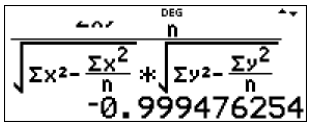






$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{n}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \cdot \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}} \approx -0{,}999$$





Es liegt wegen $r \approx -1$ eine hohe negative Korrelation zwischen den Variablen x und ln(y) vor. Der Zusammenhang zwischen x und ln(y) muss sich sehr gut durch eine fallende Gerade modellieren lassen.

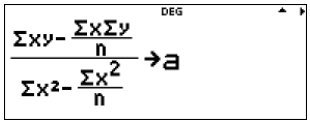
Regressionsgerade

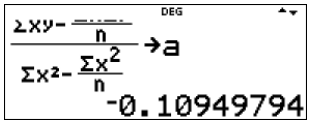
Für die Regressionskoeffizienten der Regressionsgeraden $\ln(y) = a \cdot x + \ln(b)$ gelten folgende Formeln:

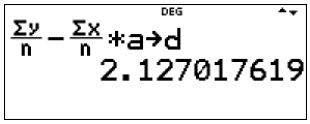
(1) $$a = \frac{\sum x \cdot ln(y) - \frac{\sum x \cdot \sum ln(y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

(2) $$d = \frac{\sum ln(y)}{n} - \frac{\sum x}{n} \cdot a$$

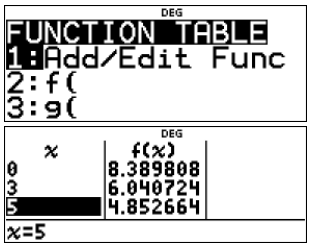
Es ist zu beachten, dass die Werte für x in der Liste L1 und die für ln(y) in der Liste L3 gespeichert sind.

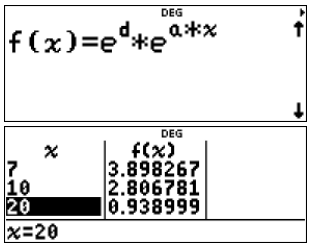


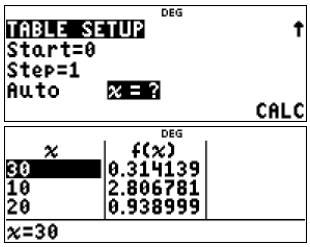




Unter Berücksichtigung von der beim Taschenrechner verwendeten Variablen d folgt wegen $\ln(b) = d$ für $b = e^d$ und damit für die Exponentialfunktion $y = f(x) = b \cdot e^{a \cdot x} = e^d \cdot e^{a \cdot x}$.
Diese Funktion kann unter table definiert und tabelliert werden.



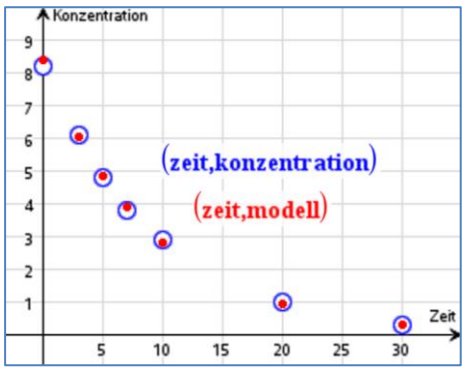


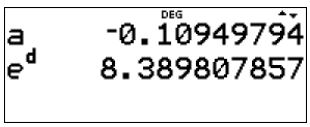


Vergleich der Messwerte mit den Werten der Modellfunktion (gerundet):

Zeit in Stunden	0	3	5	7	10	20	30
Konzentration in mmol/l	8,2	6.1	4.8	3,8	2,9	1,0	0,3
Werte der Modellfunktion	8,39	6,04	4,85	3,90	2,81	0,94	0,31

Die Werte der Modellfunktion liegen nahe bei den Messwerten. Dies veranschaulicht auch die grafische Darstellung:





Ergebnis

Es kann in sehr guter Näherung ein exponentieller Zusammenhang zwischen der Zeit und der noch vorhandenen Medikamentenkonzentration angenommen werden. Mit dieser Modellfunktion $y = f(x) \approx 8{,}4 \cdot e^{-0{,}1095x}$ könnten also Werte für die Medikamentenkonzentration im Zeitraum von Beginn der Medikamentengabe bis 30 Stunden danach näherungsweise zu jedem beliebigen Zeitpunkt geschätzt werden.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

© T3 Deutschland 2025