

Hoofdstuk 2

Combinatoriek

2.1 Basisregels

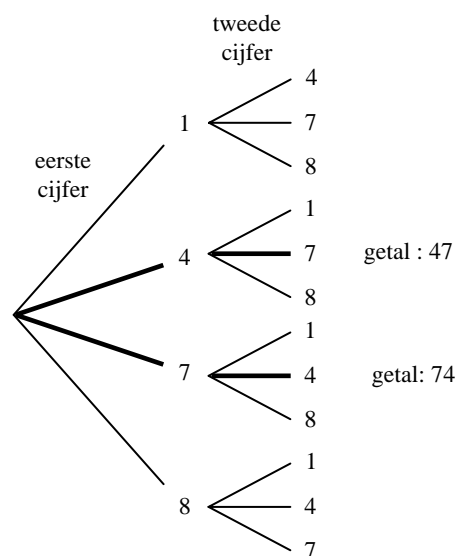
Combinatoriek is de studie van telproblemen. De kunst van het tellen bestaat vaak uit het “coderen” of anders voorstellen van het telprobleem, zodat het uiteindelijk volstaat om de volgende eenvoudige telregels toe te passen.

2.1.1 De productregel

Voorbeeld 1

Hoeveel getallen van 2 verschillende cijfers kan je vormen met de cijfers 1,4,7,8 ?

We geven een overzicht in onderstaande *boom*.



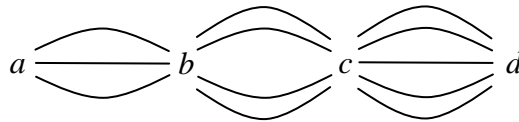
Voor het eerste cijfer zijn er 4 mogelijkheden. Voor het tweede cijfer zijn er, onafhankelijk van de keuze van het eerste cijfer, 3 mogelijkheden.

In het totaal kan je $4 \times 3 = 12$ mogelijke getallen vormen. Elke *weg* in de boom, die bestaat uit een opeenvolging van 2 *takken* startend vanuit de *wortel*, levert een concreet getal.

In een boom is de volgorde belangrijk : de weg 47 is verschillend van de weg 74.

Voorbeeld 2

Onderstaande figuur toont 4 steden met hun verbindingswegen.



Op hoeveel manieren kan men vanuit *a* via *b* en *c* naar *d* rijden ?

Van *a* naar *b* zijn er 3 wegen. Elk van deze wegen kan op 4 manieren voortgezet worden om naar *c* te rijden zodat er 3×4 reismogelijkheden *abc* zijn. Elk van deze wegen kan op 5 manieren kunnen uitgebreid worden om naar *d* te rijden. In het totaal zijn er $3 \times 4 \times 5 = 60$ mogelijke reismogelijkheden *abcd*.

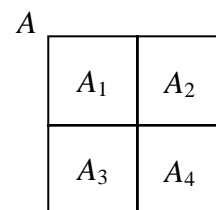
Algemeen formuleren we de *productregel* als volgt.

Stel dat een opdracht kan opgesplitst worden in *k* opeenvolgende stappen waarbij het aantal mogelijkheden bij elke stap onafhankelijk is van het resultaat van de voorgaande stappen. Indien er voor stap 1 n_1 mogelijkheden zijn, voor stap 2 n_2 mogelijkheden, ..., voor stap *k* n_k mogelijkheden kan de globale opdracht uitgevoerd worden op $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ manieren.

2.1.2 De somregel

Men wil het aantal elementen van een eindige verzameling *A* (notatie $\#A$) tellen.

We kunnen *A* opsplitsen in een aantal deelverzamelingen A_1, A_2, \dots, A_k die onderling geen gemeenschappelijke elementen bevatten en waarvan de unie de verzameling *A* is.



Er geldt : $\#A = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \dots + \#A_k$

De figuur hiernaast toont een voorbeeld voor $k = 4$.

De regel is nuttig als het aantal elementen van de verzamelingen A_i eenvoudig te tellen is.

Voorbeeld

Mevrouw Peters heeft 3 witte (w) en 3 zwarte (z) hoeden, 3 witte en 2 zwarte rokken, 2 witte en 3 zwarte bloezen. Zonder verdere voorwaarden kan zij zich hiermee op $6 \times 5 \times 5 = 150$ manieren kleden.

Mevrouw Peters draagt echter hoogstens één zwart kledingstuk. Bijgevolg zijn er minder mogelijkheden. De verschillende mogelijke kleurencombinaties zijn :

hoed	rok	bloes		
w	w	w	met als aantal mogelijkheden	$3 \times 3 \times 2 = 18$
z	w	w		$3 \times 3 \times 2 = 18$
w	z	w		$3 \times 2 \times 2 = 12$
w	w	z		$3 \times 3 \times 3 = 27$

De somregel levert dan dat er in het totaal $18 + 18 + 12 + 27 = 75$ mogelijkheden zijn.

2.2 Elementen kiezen

Op hoeveel manieren kan je k elementen kiezen uit n verschillende elementen ?

Hierbij maken we een onderscheid tussen een *geordende of ongeordende keuze*. Is de volgorde van de k gekozen elementen al dan niet belangrijk?

Van belang is ook of het gaat om een *keuze met of zonder herhaling*. Mag eenzelfde element meerdere keren gekozen worden of niet ?

2.2.1 Geordende keuzes met herhaling

1. Bij een voetbalpronostiek moet de uitslag voorspeld worden van 13 wedstrijden met de volgende code :

1 = de thuisploeg wint, 2 = de bezoekers winnen, x = er wordt gelijkgespeeld.

De productregel levert $3^{13} = 1594323$ mogelijkheden.

2. Er zijn $2^8 = 256$ verschillende bytes (rijtjes van acht bits, zoals 11011000).

3. Hoeveel deelverzamelingen heeft de verzameling $A = \{a, b, c, d\}$?

Elke deelverzameling van A kan gecodeerd worden met een rijtje van 4 bits dat aangeeft of de elementen a, b, c, d (in die volgorde) al dan niet (code 1 of 0) tot de deelverzameling behoren. Zo coderen we $\{a, d\}$ met 1001, $\{b\}$ met 0100 en de lege deelverzameling \emptyset met 0000.

Het telprobleem komt neer op het tellen van het aantal rijtjes van 4 bits. Dit zijn er $2^4 = 16$.

Algemeen geldt dat een verzameling met n elementen 2^n deelverzamelingen heeft.

4. Hoeveel nummerplaten kunnen er gevormd worden met 3 letters vooraan en 3 cijfers achteraan ?

We kiezen eerst drie letters, dan 3 cijfers, zoals JMB 007. Dit kan gebeuren op $26^3 \cdot 10^3 = 17576000$ manieren.

Algemeen

Er zijn n^k geordende keuzes met herhaling van k elementen uit n verschillende elementen.

2.2.2 Geordende keuzes zonder herhaling

1. Een code bestaat uit 4 verschillende letters. Volgens de productregel zijn er $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358800$ dergelijke codes. We noteren dit aantal met $(26)_4$ (lees "26 orden 4"). De code *abfe* is verschillend van de code *fabe*.

Je berekent $(26)_4$ met de **TI-83** met **26 MATH<PRB> 2:nPr 4**.

```
MATH NUM CPX PRB
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

```
26*25*24*23
358800
26 nPr 4
358800
26!/22!
358800
```

Merk op dat : $(26)_4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{22 \cdot 21 \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{26!}{22!}$.

2. Hoeveel nummerplaten kunnen er gevormd worden met 3 verschillende letters en 3 verschillende cijfers, indien de letters vooraan moeten staan ?

Er zijn $(26)_3 \cdot (10)_3 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 11232000$ mogelijkheden.

Algemeen

Het aantal geordende keuzes zonder herhaling van k elementen uit n verschillende elementen is $(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Van groot belang is de situatie waarbij $k = n$. Er zijn klaarblijkelijk $(n)_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mogelijke rangschikkingen of *permutaties* van n elementen.

Zo kan je de letters a, b, c op $3! = 6$ manieren rangschikken :

abc, acb, bac, bca, cab en cba .

2.2.3 Ongeordende keuzes zonder herhaling

Op hoeveel manieren kan je 3 boeken kiezen uit 5 verschillende boeken a, b, c, d, e ?

Er zijn $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ geordende keuzes.

Hieronder bevinden zich, van bijvoorbeeld de boeken a, b, c , ook de 6 verschillende permutaties $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

De volgorde is hier van geen belang zodat er $60/6=10$ mogelijke ongeordende keuzes zijn.

We noteren dit aantal met $\binom{5}{3}$, lees "5 kies 3".

Merk op dat $\binom{5}{3} = \frac{(5)_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$

Je berekent $\binom{5}{3}$ met de **TI-83** met **5 MATH<PRB> 3:nCr 3**.

```
MATH NUM CPX PRB
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

```
5 nCr 3      10
5 nCr 2      10
```

```
100 nCr 98   4950
100 nCr 2    4950
```

Algemeen

Het aantal deelverzamelingen van k elementen uit een verzameling van n elementen is $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Merk op dat $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ en $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$.

Deze aantallen corresponderen respectievelijk met de deelverzamelingen de volledige verzameling van n elementen en de lege verzameling.

Uit de voorgaande plaatjes stel je vast dat $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.

Het is inderdaad zo dat om uit 100 mensen 98 mensen te kiezen je beter kan zeggen welke 2 mensen je *niet* kiest.

Algemeen geldt voor $n, k \in \mathbb{N}$ met $k \leq n$ dat $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

We geven nog een *combinatorische interpretatie* van een andere eigenschap door op twee manieren het aantal mogelijke keuzes te tellen.

Er zijn $\binom{5}{3}$ mogelijke keuzes van 3 boeken uit 5 verschillende boeken.

Stel dat er een bijzonder boek bij is. De keuzes van 3 uit 5 boeken kan je dan opsplitsen tussen de keuzes met of zonder dat bijzondere exemplaar.

Daarvoor zijn er respectievelijk $\binom{4}{2}$ en $\binom{4}{3}$ mogelijkheden. De somregel levert dan $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Algemeen geldt dat $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

2.2.4 Ongeordende keuzes met herhaling

Een vader wil 7 stukken van 2 Euro verdelen onder zijn kinderen Tim, Nick en Jochen (verder afgekort door t, n, j). Op hoeveel manieren kan dat ?

We kunnen onze vraag op de volgende manier anders formuleren. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x + y + z = 7$, met $x, y, z \in \mathbb{N}$?

Een mogelijke verdeling van de muntstukken is $t n j j n t t$, wat hetzelfde is als $t t t n n j j$. Indien we de volgorde t, n, j afspreken, kunnen we die keuze nog verder coderen door een rij van bits 111 0 11 0 11. Hierbij dient bit 0 als overgang naar het volgende kind.

Zo correspondeert $t n j j j j j$ met 1 0 1 0 11111 en $n n n n n n j$ met 0 111111 0 1.

Zo kunnen we een verdeling voorstellen door een rij van 9 bits (7 keer 1 en 2 keer 0). Zo een rij ligt vast door de positie voor de enen (of de nullen) te kiezen.

Er zijn $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$ mogelijke verdelingen of ongeordende keuzes met herhaling van 7 elementen uit 3 elementen t, n, j .

Algemeen zijn er $\binom{n+k-1}{k}$ ongeordende keuzes met herhaling van k elementen uit n elementen.

2.2.5 Overzicht

Hieronder vind je een overzicht van de verschillende soorten keuzes van k elementen uit n verschillende elementen.

In dit overzicht vind je de klassieke benaming van de keuzes en het aantal mogelijke keuzes.

	ongeordend	geordend
zonder herhaling	<i>combinaties</i> $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	<i>variaties</i> $(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$
met herhaling	<i>herhalingscombinaties</i> $\binom{n+k-1}{k}$	<i>herhalingsvariaties</i> n^k

2.3 Het binomium van Newton

2.3.1 Het sommatieteken

We definiëren $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Hierbij noemen we \sum het *sommatieteken*, k de *sommatieveranderlijke* en a_k de *algemene term*.

We lezen $\sum_{k=1}^n a_k$ als “sommatie a_k , voor k gaande van 1 tot n ”.

De keuze van de sommatieveranderlijke speelt geen rol: $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{p=1}^n a_p$.

Voorbeelden

$$\sum_{i=0}^4 x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad \sum_{n=2}^5 n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 224$$

$$\sum_{k=1}^6 2^{k-1} = \sum_{i=0}^5 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63 \qquad \sum_{k=0}^2 \frac{2k+1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{83}{36}$$

Als $x_1 = x_2 = \dots = x_k = a$ geldt: $\sum_{k=1}^n x_k = n \cdot a$ of $\sum_{k=1}^n a = n \cdot a$.

Eigenschappen

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^n c \cdot x_k = c \cdot \sum_{k=1}^n x_k \quad (\text{met } c \text{ een constante})$$

Deze eigenschappen kunnen samenvattend als volgt geschreven worden (a en b constanten):

$$\sum_{k=1}^n (a \cdot x_k + b \cdot y_k) = a \cdot \sum_{k=1}^n x_k + b \cdot \sum_{k=1}^n y_k$$

Deze eigenschap noemt met de *lineariteitseigenschap* van \sum .

2.3.2 Het binomium van Newton

Met de eigenschap dat $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ is het mogelijk vrij snel een tabel te construeren met de getalwaarden voor $\binom{n}{k}$.

	$k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5 ...
0	$n \downarrow$	1					
$(a+b)^1$	1	1	1				
$(a+b)^2$	2	1	2	1			
$(a+b)^3$	3	1	3	3	1		
$(a+b)^4$	4	1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	5	1	5	10	10	5	1
\vdots	\vdots						

Deze tabel noemen we de *driehoek van Pascal*. Elke term is de som van de term erboven en zijn linker buur. Kan je de symmetrie in één rij verklaren?

De rijen leveren de coëfficiënten van de uitwerking van $(a+b)^n$ voor $n=1,2,\dots$.

Zo geldt voor $n=4$:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \\
 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k
 \end{aligned}$$

Algemeen geldt voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
 \end{aligned}$$

Deze formule noemt men het *binomium van Newton*.

We geven een combinatorisch bewijs voor $n \geq 2$.

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) \quad (n \text{ factoren}) \quad (1)$$

De uitwerking hiervan verkrijgen we door één term te kiezen in elk der n factoren, deze termen te vermenigvuldigen en al deze producten (dat zijn er 2^n) op te tellen.

Bijvoorbeeld: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$.

In de uitwerking van (1) ontstaat een term van de vorm $a^{n-k}b^k$ door de keuze van a in $(n-k)$ factoren en b in k (andere) factoren. Dit kan gebeuren op $\binom{n}{k}$ manieren.

Het volstaat immers om de factoren waar je b kiest vast te leggen zodat $a^{n-k}b^k$ in het totaal $\binom{n}{k}$ keer optreedt in de uitwerking van (1).

Je kan b kiezen uit $k = 0, 1, 2, \dots, n$ factoren. De somregel levert dan het binomium van Newton.

Het binomium van Newton suggereert de naam *binomiaalcoëfficiënt* voor $\binom{n}{k}$.

Bovenstaande redenering is eenvoudig te veralgemenen.

Bepaal de coëfficiënt van $x^2 y^3 z^5$ in de uitwerking van $(x+y+z)^{10}$.

Schrijf in gedachten 10 factoren $(x+y+z)$ naast elkaar. Hieruit moet je x kiezen op 2 plaatsen, dan y op 3 andere plaatsen en z komt op de overblijvende 5 plaatsen.

Het aantal mogelijke keuzes of de gevraagde coëfficiënt is dan $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} = 2520$.

We hadden echter ook eerst x en dan z kunnen kiezen, of eerst y en dan z .

We vinden telkens opnieuw als antwoord $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{5} = \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{5} = 2520$.

Een andere redenering is de volgende.

Maak een keuze van 10 letters (2 keer x , 3 keer y , 5 keer z) maar geef ze eerst een index zodat ze onderscheidbaar zijn.

Een mogelijke keuze van rangschikking is : $x_1 z_1 y_1 x_2 y_2 y_3 z_2 z_3 z_4 z_5$. Er zijn $10!$ mogelijke keuzes (permutaties van 10 *verschillende* elementen).

Als we enkel x_1 en x_2 verwisselen in bovenstaande permutatie verkrijgen we een *andere* permutatie, die echter op *dezelfde* neerkomt wanneer we de indices van x_1 en x_2 verwijderen.

Van het type $x z_1 y_1 x y_2 y_3 z_2 z_3 z_4 z_5$ zijn er dus $\frac{10!}{2!}$ mogelijke rangschikkingen.

In deze laatste rangschikking zijn er $3! = 6$ mogelijkheden om enkel de letters y_i te verwisselen van plaats. Bij het wegvegen van de indices kunnen we ook de y 's niet meer onderscheiden.

We bekommen $\frac{10!}{2!3!}$ mogelijke rangschikkingen van het type $x z_1 y x y y z_2 z_3 z_4 z_5$.

Tenslotte verwijderen we de indices van z_i : $x z y x y y z z z$, zodat we $\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$ mogelijkheden overhouden.

Algemeen

Gegeven n elementen, niet allemaal verschillend : k_1 elementen van een eerste soort, k_2 elementen van een tweede soort, ..., k_p elementen van een p -de en laatste soort. Deze n elementen kan je op $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$ manieren rangschikken.

Hierbij is $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.

Men spreekt hier ook over *herhalingspermutaties*.

Toepassing

De coëfficiënt van $a^5 b^2 c^3 d^4$ in de uitwerking van $(a+b+c+d)^{14}$ is $\frac{14!}{5!2!3!4!} = 2522520$

2.4 Opdrachten

1. Op hoeveel manieren kan men 4 kaarten nemen uit een spel van 52 kaarten ?
2. Een geheime code bestaat uit 6 verschillende letters. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor deze code ?
3. In een vlak liggen n punten, waarvan geen drie op één rechte. Hoeveel verschillende rechten worden door deze punten bepaald ?
4. In een firma werken 15 arbeiders en 10 bedienden. Op hoeveel manieren kan men een comité samenstellen dat bestaat uit 3 arbeiders en 2 bedienden ?
5. Op hoeveel manieren kan men 22 studenten verdelen in twee voetbalploegen van elk 11 studenten ?
6. Hoeveel delers heeft het getal 1000000 ?
7. In twee autobussen zijn er nog 3 respectievelijk 4 vrije plaatsen. Op hoeveel manieren kan men 7 toeristen verdelen over deze 2 autobussen ?
8. In een lokaal zijn er acht lampen, die men onafhankelijk van elkaar kan aandoen. Hoeveel belichtingsmogelijkheden zijn er, indien
 - (a) juist 5 lampen moeten branden ?
 - (b) minstens 5 lampen moeten branden ?
9. Uit 5 Fransen, 10 Engelsen en 6 Duitsers moeten 2 personen gekozen worden van verschillende nationaliteit. Op hoeveel manieren kan dat ?
10. Op hoeveel manieren kunnen 4 gasten zich op de eerste rij van 6 stoelen zetten ?
11. Van drie personen weet men dat ze jarig zijn in de maand november. Iemand moet van alle drie de verjaardag raden. Hoeveel mogelijkheden zijn er ?
12. Op hoeveel manieren kan men 5 hotelgasten verdelen over 10 vrije eenpersoonskamers ?
13. Hoeveel diagonalen heeft een convexe n -hoek (convex betekent gelegen langs één kant van het verlengde van elke zijde) ?
14. Een handelaar verkoopt 12 stukken fruit aan 2 Euro. De stukken fruit mag je zelf kiezen uit appels, peren en appelsienen. Hoeveel inkopen zijn er mogelijk voor 2 Euro ?

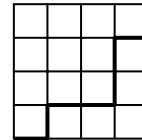
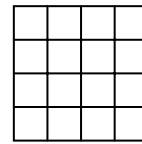
15. We beschouwen cijferblokken bestaande uit 5 cijfers, hoeveel blokken zijn er :

- (a) in het totaal ?
- (b) met verschillende cijfers ?
- (c) met één paar gelijke cijfers ? Vb. : 35316 en 00172
- (d) met twee paar gelijke cijfers ? Vb. : 22355 en 45754
- (e) met drie gelijke cijfers ? Vb. 70277 en 21888
- (f) met drie en twee gelijke cijfers ? Vb. 45455 en 00999
- (g) met 4 gelijke cijfers ? Vb. 15111 en 00007
- (h) met vijf gelijke cijfers ? Vb. 44444

Controle : het resultaat uit (a) moet de som zijn van de overige resultaten.

16. Op hoeveel manieren kan men het hieronder afgebeelde tegelveld verven,

- (a) als elk veld wit of zwart mag geverfd worden,
- (b) als 8 velden zwart en 8 velden wit geverfd worden,
- (c) als 2 velden wit, 4 zwart en 10 rood geverfd worden,
- (d) als elk veld in een verschillende kleur moet geverfd worden, te kiezen uit 16 verschillende kleuren.



17. Hoeveel kortste wegen (enkel bewegen naar rechts of naar boven) zijn er van linksonder naar rechtsboven in het hiernaast afgebeelde rooster ?

18. Op een boekenrek moeten 4 kookboeken, 5 wiskundeboeken en 6 romans naast elkaar geplaatst worden. Alle boeken zijn verschillend. Op hoeveel manieren kan dat, als boeken van dezelfde soort naast elkaar moeten staan ?

19. Uit n mannen en n vrouwen moet men n personen kiezen. Bereken het aantal mogelijkheden op 2 manieren en bewijs zo de formule :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

20. Op hoeveel manieren kan je uit de getallen 1,2,3,...,30 drie getallen kiezen waarvan de som deelbaar is door 3 ?

21. Als $\sum_{j=1}^6 x_j = -4$ en $\sum_{j=1}^6 x_j^2 = 10$, bereken dan :

(a) $\sum_{j=1}^6 (2x_j + 3)$ (b) $\sum_{j=1}^6 x_j(x_j - 1)$ (c) $\sum_{j=1}^6 (x_j - 5)^2$

22. Gegeven $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 4, x_4 = -8$ en $y_1 = -3, y_2 = -8, y_3 = 10, y_4 = 6$.

Bereken :

$$(a) \sum_{i=1}^4 x_i \quad (b) \sum_{i=1}^4 x_i^2 \quad (c) \sum_{i=1}^4 y_i^2 \quad (d) \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i)(x_i - y_i)$$

$$(e) \sum_{i=1}^4 x_i y_i \quad (f) \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^4 y_i \right) \quad (g) \sum_{i=1}^4 x_i y_i^2$$

23. Bewijs, met het binomium van Newton, dat het aantal deelverzamelingen uit een verzameling van n elementen 2^n is.

Hint : $1+1=2$.

24. (a) Bepaal de coëfficiënt van x^2 in de uitwerking van $(x-2)^6$.

(b) Bepaal de coëfficiënt van x in de uitwerking van $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^6$.

(c) Bepaal de coëfficiënt van x^3 in de uitwerking van $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$.

25. Werk uit : $(a+2b)^6$ en $(5-4x)^4$.

26. Bepaal de coëfficiënt van $a^2 b^2 c^3$ in de uitwerking van $(a + \sqrt{b} - c)^9$

27. Bereken

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 0.75^{n-k} \cdot 0.25^k \quad (b) \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \text{ met } p+q=1$$

$$(c) \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot 2^k \quad (d) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$(e) \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 3^{6-k} \cdot 2^k \quad (f) \sum_{k=0}^7 (-1)^k \cdot \binom{7}{k} \cdot 21^k \cdot 23^{7-k}$$