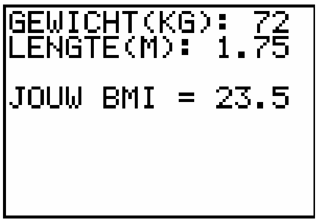
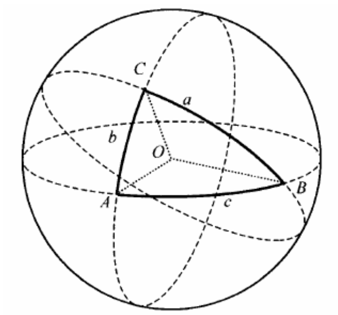
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 12

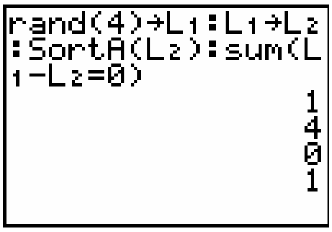
Onderzoekscompetenties

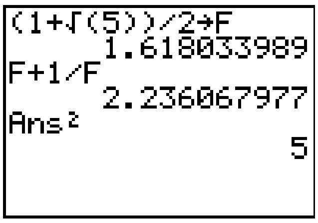
in de derde graad

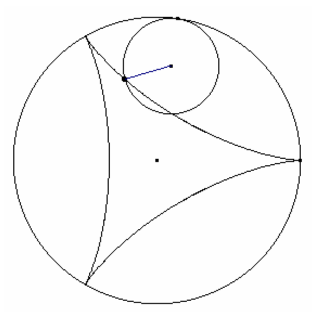
Luc Gheysens

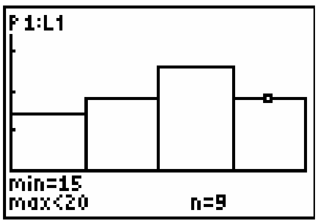












Onderzoekscompetenties

in de derde graad

Luc Gheysens

T³ EUROPE

Verantwoording

In het leerplan voor de derde graad aso staat voor de studierichtingen met component wiskunde (leerplan A) het onderwerp 'Onderzoekscompetenties' als een verplicht onderdeel op het programma met als kerndoelstellingen :

OC1 Zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.
OC2 Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.
OC3 De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.

In de twee leerjaren van de derde graad zou hieraan ongeveer 4% van de lestijden moeten besteed worden. Dit komt neer op een totaal van ongeveer 12 lestijden. Uiteraard kan men hiervoor best een opdracht (of een paar opdrachten) voorzien in het vijfde en in het zesde jaar.

Het is belangrijk dat leerlingen uit de sterk wiskundige afdelingen naast het verwerven van kennis ook een aantal vaardigheden en attitudes verwerven en dat we die als leerkracht ook evalueren.

We kunnen immers de evaluatiedoelstellingen in een viertal domeinen onderverdelen :

- *Het cognitieve domein.*
  Het gaat hier om het verwerven van kennis en kunde. Dit blijven uiteraard belangrijke competenties. Het gaat hierbij niet uitsluitend om de inhoudelijke kennis, maar ook om het inzetten van die kennis bij het oplossen van problemen. Aandacht voor de evaluatie van probleemoplossende vaardigheden is dus wenselijk.

- *Het metacognitieve domein.*
  De ontwikkeling van metacognitie moet inzicht geven in het omgaan met de kennisverwerving en het leerproces. Tot dit domein behoren: planmatige aanpak, gecontroleerd werken, organiseren van kennis en reflecterend terugkijken.

- *Het affectieve domein.*
  Het gaat hier om de ontwikkeling van werk- en leerhoudingen en opvattingen. Voorbeelden zijn: doorzettingsvermogen, inzet, effectiviteit, verantwoordelijkheidszin, leergierigheid, zelfstandigheid. Een wiskundevorming vanuit een meer context- en toepassingsgerichte aanpak kan de betrokkenheid op en de motivatie voor het leren van wiskunde verhogen. Voorwaarde hierbij is wel dat de aangereikte oefeningen 'haalbaar' zijn en de leerlingen 'succes' kunnen ervaren.

- *Het sociale domein.*
  Het aanpakken van een probleem in groep maakt uitwisseling van het kennispotentieel mogelijk. Hierbij kunnen leerlingen elkaar helpen en inspireren.

Bij een onderzoeksopdracht (OZO) kan men vijf fasen onderscheiden :

1. *De leerling stelt zich een onderzoeksvraag. De leraar kan hiervoor een reeks suggesties doen of één welbepaalde suggestie. Het initiatief kan ook van de leerling komen.*
2. *De leerling werkt aan probleemverkenning : waar vind ik materiaal, kan ik hierbij ICT inschakelen, kan ik het probleem concreet aflijnen, welk(e) aanverwant(e) onderwerp(en) kan ik er eventueel bijnemen … ?*
3. *De leerling stelt een plan van uitvoering op : hoe verdeel ik de opdracht in deelopdrachten, welke timing voorzie ik … ? Hiervoor kan men best een logboek gebruiken.*
4. *De leerling voert het plan uit. Dit kan uiteraard met een groepje leerlingen worden uitgevoerd. Op die manier verwerft men zekere sociale vaardigheden en leert men van elkaar.*
5. *De leerling levert een (meestal) schriftelijke neerslag af. Indien de tijd het toelaat kan men de (groepjes) leerlingen hun werk kort laten presenteren.*

Uiteraard komt hierna ook een evaluatie door de leraar en een reflecterende terugblik.

Dit cahier heeft als doel enkele inspirerende opdrachten aan te reiken. We hebben er voor geopteerd om de deelopdrachten strikt af te lijnen en er wordt verwacht dat de leerlingen gebruik maken van een grafische rekenmachine (GRM) bij de uitwerking van de opdrachten. Niet alle deelopdrachten hoeven uitgevoerd te worden. We laten de keuze over aan de leraar. Voor het opzoeken van het nodige materiaal kan men o.a. van het Internet gebruik maken.

We rekenen er op dat de leerkracht voldoende creativiteit bezit om dan ook zelf een (aantal) onderzoeksopdracht(en) aan te reiken. Uiteraard is het gebruik van een aantal computerprogramma's een volwaardig alternatief voor het gebruik van de grafische rekenmachine.

Bij een aantal opdrachten bestaat een deelopdracht erin een programma te schrijven voor de grafische rekenmachine. Onderzoeksopdracht 5 uit deze bundel kan gebruikt worden om de leerlingen vertrouwd te maken met het programmeren.

In bijlage achteraan zitten drie documenten : een blad dat als logboek kan dienen, een individueel evaluatieformulier voor de leerlingen dat ook voor de leraar waardevolle informatie kan opleveren en een evaluatieformulier waarop elke leerling afzonderlijk het eigen aandeel in de uitwerking van de opdracht invult.

Voorstel voor het verloop van een onderzoeksopdracht.

FASE 1 *De groep leerlingen wordt opgedeeld in een aantal deelgroepjes van twee of drie leerlingen. Best waakt de leraar erover dat in elk groepje een zwakkere en een sterkere leerling zit. De leerkracht reikt een aantal opdrachten aan en laat de leerlingen hieruit een keuze maken. Elk groepje zal dan één bepaalde opdracht uitwerken.*

FASE 2 *De leerlingen verzamelen het nodige materiaal voor de uitwerking van de opdracht.*

FASE 3 *De leerlingen stellen een taakverdeling op. Indien de opdracht over een langere periode loopt, is het aangewezen dat de leerlingen een logboek bijhouden.*

FASE 4 *In klas werken de leerlingen gedurende enkele (opeenvolgende) lesuren de gekozen opdracht uit. De leraar coacht het werk. Nadat de taakverdeling is opgesteld kunnen de leerlingen reeds individueel aan de slag gaan en hierbij kan de leraar als coach optreden.*

FASE 5 *De leerlingen maken van de uitwerking van de opdracht een verslag (of een presentatie).*

FASE 6 *In klas presenteren de leerlingen het groepswerk.*

FASE 7 *Feedback en evaluatie door de leraar.*

Bij de evaluatie kan men als volgt te werk gaan.

De leraar kent een aantal punten toe aan de volgende rubrieken :

REDACTIE (titelblad, inhoudsopgave, lay-out, bron- en literatuurvermelding)	*/5*
INHOUD (uitwerking, correctheid, originaliteit, spelling …)	*/50*
PRESENTATIE	*/15*
TOTAAL	*/70*

De score op 70 wordt dan vermenigvuldigd met het aantal leden van de groep. Als de groep bijvoorbeeld bestond uit drie leerlingen en deze groep behaalde 52/70, dan levert dit 156 punten op, die via peerevaluatie onder de drie leden van de groep zullen verdeeld worden. Hiervoor vullen ze elk afzonderlijk een evaluatieformulier in (bijlage 3). Aan de hand van deze evaluatieformulieren kent de leraar tenslotte de individuele scores toe.

INHOUD VAN DIT CAHIER

ONDERZOEKSOPDRACHT 1

DE lotto EN ANDERE KANSEXPERIMENTEN

Het populairste kansspel dat de Nationale Loterij organiseert, is ongetwijfeld de Lotto.

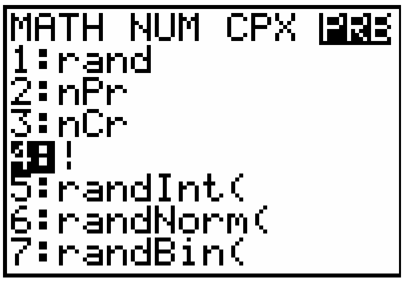
Om de winstkansen te berekenen bij dit spel is er een formule nodig waarbij 'faculteiten' moeten berekend worden.

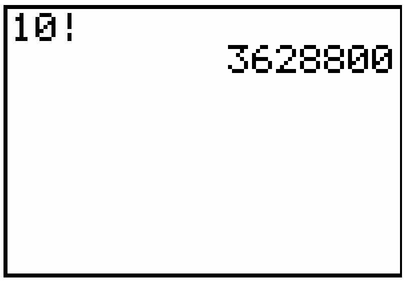
Voor elk natuurlijk getal n groter dan 0, is n-faculteit gelijk aan het product 1 x 2 x 3 x … x n. Men gebruikt hiervoor de notatie n!

Zo is 1! = 1,
2! = 1 x 2 = 2,
3! = 1 x 2 x 3 = 6,
4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24.

Bij afspraak is 0! = 1.

Bereken zelf manueel 5!, 6!, 7!, 8!, 9! en 10! en controleer de gevonden resultaten met jouw GRM.



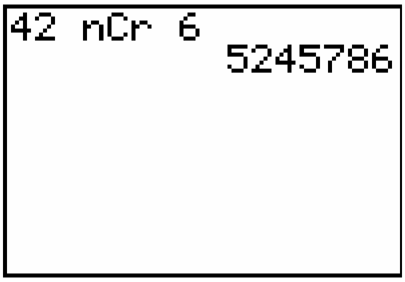


Zoek eens uit wat het grootste natuurlijk getal n is waarvoor je met jouw GRM n! kunt berekenen.

Bij de Lotto kiest men op een enkelvoudig formulier 6 getallen in een rooster met 42 getallen. Men kiest dus 6 verschillende elementen uit een verzameling van 42 elementen. Dit noemt men **combinaties van 6 uit 42** . Dit getal duidt men aan met C_{42}^{6} of ook met $\binom{42}{6}$.

Dit aantal is vrij groot en wordt berekend met behulp van faculteiten.

$$C_{42}^{6} = \binom{42}{6} = \frac{42!}{6!\,(42-6)!} = \frac{42!}{6!\,36!} = 5\,245\,786.$$



Hieronder staan nog enkele voorbeelden waarbij men het aantal mogelijkheden met combinaties berekent.

Voorbeeld 1. Een leraar kiest in de klas 2 leerlingen om een opdracht uit te voeren. In die klas zitten 24 leerlingen. Op hoeveel manieren kan hij 2 leerlingen aanduiden?

$$C_{24}^{2} = \binom{24}{2} = \frac{24!}{2!\,(24-2)!} = \frac{24!}{2!\,22!} = \frac{24\,.\,23}{1\,.\,2} = 276.$$

Voorbeeld 2. Jonas mag van tante Lydia 3 computerspelletjes kiezen bij een handelaar die over 8 verschillende soorten beschikt. Hoeveel verschillende keuzes kan Jonas maken?

$$C_{8}^{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3} = 56.$$

Voorbeeld 3. Aan de preselecties van Eurosong doen 12 kandidaten mee. Hiervan zullen er slechts 4 aan de finale mogen deelnemen. Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er mogelijk van het groepje van de 4 finalisten?

$$C_{12}^{4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 495.$$

In het algemeen is **het aantal combinaties van p uit n (met p ≤ n) gelijk aan**

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

OPDRACHT 1

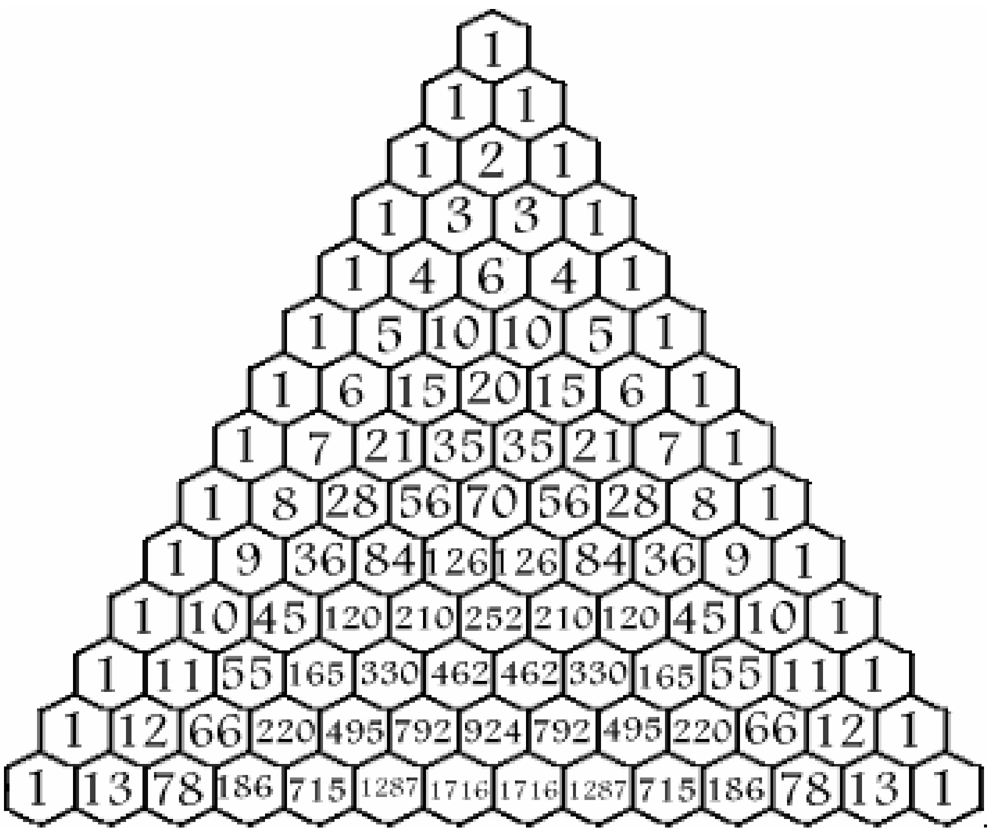
Bereken met behulp van jouw GRM de getallen C_{11}^5 en C_{11}^6, C_{16}^9 en C_{16}^7, C_{30}^{10} en C_{30}^{20} . Wat stel je vast? Welke algemene eigenschap leid je hieruit af?
Bewijs deze eigenschap door gebruik te maken van de algemene formule voor C_n^p.

De getallen C_n^p (zijn er voorwaarden voor p en n?) noemt men **binomiaalcoëfficiënten**.

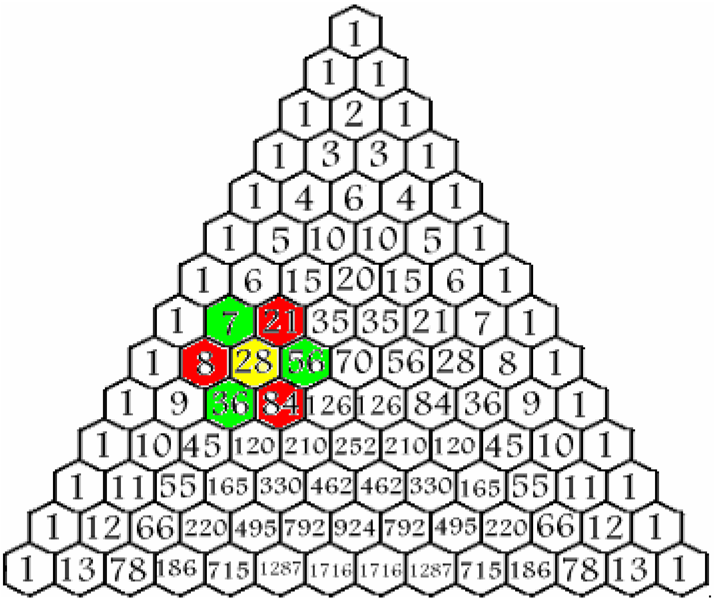
OPDRACHT 2

De binomiaalcoëfficiënten zijn de getallen in de zogenaamde driehoek van Pascal. Zoek een drietal merkwaardige eigenschappen van deze getallen op. Kijk eens op : http://ptri1.tripod.com/ . Je kan de onderstaande figuur gebruiken om de eigenschappen in een kleur aan te duiden.

DE DRIEHOEK VAN PASCAL



We vermelden hier de merkwaardige eigenschap van de zogenaamde ‘Pascalbloempjes’.



Bekijk de zes ‘bloemblaadjes’ rond het getal 28. Maak het product van de getallen op de drie donker gekleurde blaadjes en vergelijk dit met het product van de getallen op de drie lichter gekleurde blaadjes. Wat stel je vast? Ga na dat dit op alle plaatsen in de driehoek van Pascal het geval is. Geef een algemeen bewijs van deze eigenschap door gebruik te maken van de formule voor C_n^p .

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Met behulp van de formule om het aantal combinaties te berekenen kan men de theoretische winstkansen bij de Lotto (6 uit 42) bepalen. Probeer te begrijpen hoe men te werk is gegaan om de winstkansen te berekenen en vraag zonodig hierover uitleg aan jouw leraar. Gebruik jouw GRM om de ontbrekende gegevens in de kolom van de winstkansen in te vullen.

Rang	Wat?	Winstkans
1	6 nummers juist	1 op 5 245 786
2	5 nummers juist en het bijkomend nummer	$\frac{C_6^5}{C_{42}^6} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{5\,245\,786}$ of 1 op …………
3	5 nummers juist	$\frac{C_6^5 \cdot C_{35}^1}{C_{42}^6} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{5\,245\,786}$ of 1 op ………
4	4 nummers juist	$\frac{C_6^4 \cdot C_{36}^2}{C_{42}^6} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{5\,245\,786}$ of 1 op ……..
5	3 nummers juist	$\frac{C_6^3 \cdot C_{36}^3}{C_{42}^6} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{5\,245\,786}$ of 1 op ……..

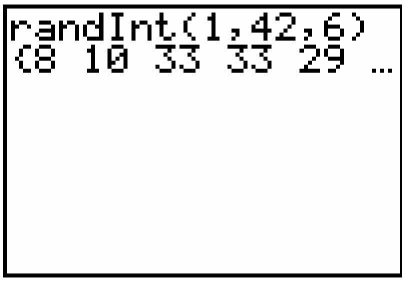
<u>OPDRACHT 3</u>

1 Zoek op http://www.nationale-loterij.be informatie over de Belgische Lotto : historiek, winstverdeling, nummers die veel of weinig worden getrokken, hoge winstbedragen, winstverdeling …
2 Welke soorten Lottoformulieren bestaan er en welke kenmerken hebben die?
3 Hoeveel nummers kan men kiezen in het rooster op een meervoudig formulier? Hoeveel moet men dan betalen? Kan je ook verklaren hoe die bedragen worden berekend?
4 Zoek eens de resultaten op van de laatste Lottotrekking. Hoeveel winnaars waren er dan per rang? Vergelijk deze resultaten met de theoretische winstkansen uit de bovenstaande tabel. Wat besluit je hieruit?

<u>OPDRACHT 4</u>

Ontwerp zelf een ‘ideaal’ Lottospel, waarbij de uitgekeerde winsten gelijk zijn aan het totaal van de inkomsten en waarbij er met grote waarschijnlijkheid één winnaar is in rang 1 (alle nummers juist).
Ontwerp zelf een lottoformulier en laat een groep leerlingen bijvoorbeeld drie getallen kiezen uit zes of vier uit negen. Bereken eerst de theoretische winstkansen. Speel dit Lottokansspel met een groep leerlingen en gun ook jouw leerkrachten eens wat gokplezier. Hoeveel deelnemers waren er en hoeveel winnaars? Hoeveel deelnemers hadden 0, 1, 2 … getallen juist geraden? Vergelijk de werkelijke resultaten met de theoretische winstkansen.

Met een GRM kan men via de instructie randInt(1,42,6) zes willekeurige ‘lottogetallen’ laten kiezen van 1 tot en met 42. Het probleem hierbij is echter dat de GRM twee (of meer) keer hetzelfde getal kan kiezen. Dit blijkt uit de volgende schermafdruk:



OPDRACHT 5

Via het onderstaande programma zal jouw GRM zes verschillende lottogetallen kiezen en ze in stijgende volgorde afdrukken op het scherm. Typ dit programma in en leg bij elke lijn uit wat de instructie juist betekent. Het getal C is een controlegetal dat bijvoorbeeld de waarde 3 zal aannemen wanneer het derde gekozen lottogetal verschillend is van de vorige twee. Op die manier wordt er vermeden dat er twee keer hetzelfde getal wordt gekozen.

```
PROGRAM:LOTTO
:ClrHome
:ClrList L1
:randInt(1,42) → L1(1)
:For (I,2,6)
        :1 → C
        :While (C < I)
                :1 → C
                :randInt(1,42) → L1(I)
                :For(J,1,I-1)
                        : If L1(I) ≠ L1(J)
                        :Then
                        :C+1 → C
                        :End
                :End
        :End
:End
:SortA(L1)
:Disp "LOTTOGETALLEN:"
:For(K,1,6)
        :Output(K,15,L1(K))
:End
```

OPDRACHT 6

Pas het bovenstaande programma aan zodat er ook een bijkomend nummer (een zevende getal) wordt getrokken dat uiteraard verschillend is van de vorige zes getrokken getallen.

ONDERZOEKSOPDRACHT 2

DE INHOUD VAN EEN GLAS BEREKENEN

Laat de leerlingen vooraf de volgende gegevens opzoeken:

- Formule voor de inhoud van een omwentelingslichaam.
- Formule voor de booglengte van een kromme.
- Formule voor de manteloppervlakte van een omwentelingslichaam.
- Soortelijk gewicht van glas.
- Wat is lineaire regressie? Wat is kwadratische regressie? Wat is de betekenis van de correlatiecoëfficiënt en van de determinatiecoëfficiënt?

Doelstelling van de onderzoeksopdracht : de inhoud van een bierglas of een wijnglas berekenen met behulp van een bepaalde integraal. Ook de lengte van de gebogen rand kan berekend worden en de manteloppervlakte van het glas. Het is de bedoeling ‘proefondervindelijk’ de berekende waarden te controleren.

Naar een idee van : http://www.scholennetwerk.uhasselt.be/

BENODIGDHEDEN

- Vier glazen van diverse vormen (bierglas, wijnglas, likeurglas, champagneglas …).
- Schuifpasser of lintmeter, potlood, lat, tekenblad, nauwkeurige weegschaal.
- GRM of computer.

Neem een bier- of een wijnglas.

Het is de bedoeling met behulp van bepaalde integralen
- het volume van dit glas te bepalen en eventueel de hoogte waar het maatstreepje moet komen voor een volume van 25 cl (bierglas) of 10 cl (wijnglas);
- de lengte van de gebogen rand te berekenen;
- de manteloppervlakte te berekenen.

Deze resultaten kan men dan vergelijken met de werkelijke waarden.

We nemen aan dat de leerlingen de nodige integraalformules kennen of hebben opgezocht.

Indien we het hierboven afgebeelde bierglas plat leggen en een verticale doorsnede maken in de richting van de voet van het glas, verkrijgen we voor het gedeelte waarin het bier terechtkomt een kromme met een maximum en een minimum. Met een fijn potlood kan men de omtrek van het glas overtekenen op een blad papier en daarna op ongeveer 2 mm (de dikte van het glas) aan de binnenkant dezelfde vorm natekenen. Hierop kunnen de coördinaten van het voetpunt, het maximum, het minimum en het eindpunt aangeduid worden.

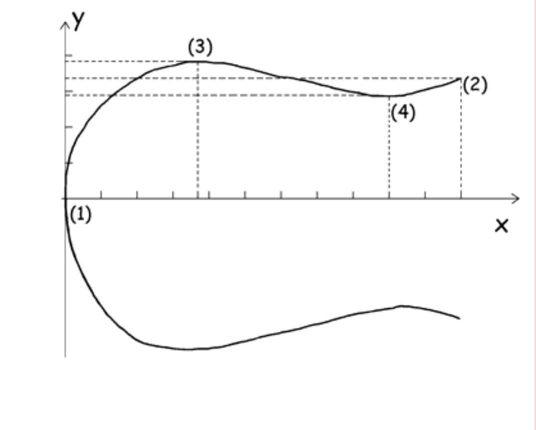
Door regressie gaan we de vergelijking van deze kromme opstellen. Bepaal hiervoor vier punten op de randkromme : het beginpunt of voetpunt (1), het eindpunt (2), het maximum (3) en het minimum (4). Deze kromme kan dan optimaal benaderd worden door de grafiek van een derdegraadsfunctie $y = a x^3 + bx^2 + cx + d$.

Het is belangrijk dat de leerlingen de coördinaten van deze vier punten zo nauwkeurig mogelijk bepalen.

Wanneer men het functievoorschrift met behulp van ICT heeft gevonden, worden hierop de formules toegepast voor de inhoud, de booglengte en de manteloppervlakte.

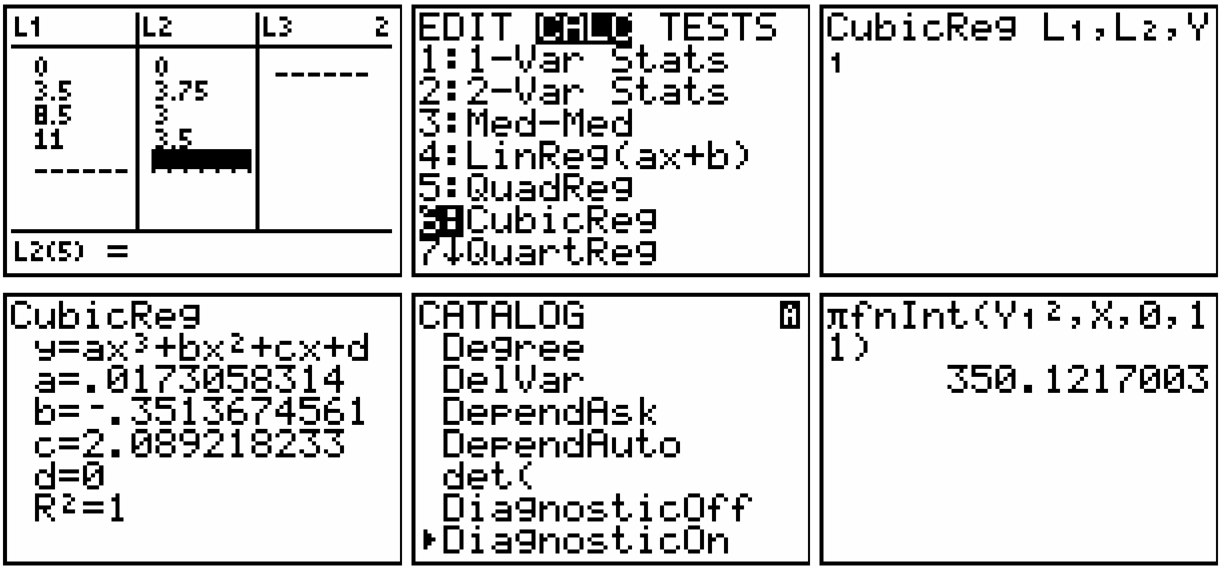
Voor de voet kan men op een analoge manier te werk gaan.

Met behulp van het soortelijk gewicht van glas en een nauwkeurige weegschaal kan men verifiëren of de gevonden waarden voor de manteloppervlakte en van de totale oppervlakte van het glas correct zijn bepaald. Uiteraard moet men rekening houden met de dikte van het glas.



	coördinaten (cm)
voetpunt	(0 ; 0)
maximum	(3,5 ; 3,75)
minimum	(8,5 ; 3)
eindpunt	(11 ; 3,5)

Bij het hierboven getekende bierglas berekenen we bijvoorbeeld de inhoud met een GRM. Nadat de coördinaten van de vier meetpunten in de lijsten L_1 en L_2 zijn ingebracht, passen we kubische regressie toe. Het bekomen functievoorschrift wordt opgeslagen als Y_1. Men kan ook het stelsel van vier vergelijkingen met vier onbekenden oplossen met behulp van de GRM om de coëfficiënten te bepalen in het functievoorschrift $y = a\,x^3 + bx^2 + cx + d$. Aan de hand van dit functievoorschrift wordt de inhoud berekend via de passende bepaalde integraal. Het glas blijkt een inhoud te hebben van ongeveer 35 cl.



R^2 is de zogenaamde determinatiecoëfficiënt en R^2 is gelijk aan 1 als de regressiekromme perfect door de aangestipte punten gaat. R^2 verschijnt op het scherm wanneer je via CATALOG de optie DiagnosticOn kiest.

ONDERZOEKSOPDRACHT 3

PHI

Deze opdracht is vrij uitgebreid.
We laten het aan de leraar of de leerlingen over om te beslissen
welke deelopdrachten zullen uitgevoerd worden.

Wanneer men een lijnstuk [AB] in twee stukken verdeelt met lengte k (voor het kleinste stuk) en g (voor het grootste stuk) zodat

$$\frac{k}{g} = \frac{g}{k+g},$$

dan brengt men de zogenaamde Gulden Snede aan op het lijnstuk [AB].

In dat geval is de verhouding van de lengte van het grootste deel tot de lengte van het kleinste deel gelijk aan

$$\frac{g}{k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dit getal wordt in de literatuur voorgesteld door de Griekse letter φ (“phi”).

<u>OPDRACHT 1</u>

a) Verdeel een willekeurig lijnstuk [AB] met behulp van een passer en een liniaal (een lat waarop geen maatstreepjes staan) in twee stukken volgens het principe van de Gulden Snede.
b) Construeer met behulp van een passer en een liniaal een zogenaamde ‘gulden rechthoek’. Dit is een rechthoek waarbij de verhouding van de hoogte tot de breedte gelijk is aan het getal φ.

<u>OPDRACHT 2</u>

Toon aan dat uit $\frac{k}{g} = \frac{g}{k+g}$ volgt dat $\frac{g}{k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>OPDRACHT 3</u>

Hieronder staan vier formules en slechts één ervan is niet correct. Toon via berekening aan welke formule onjuist is.

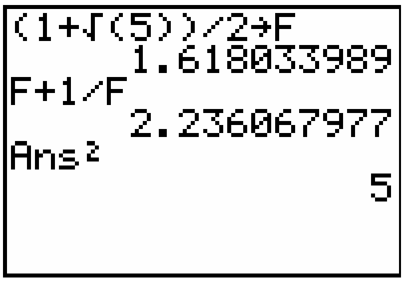
a) $\varphi^2 = \varphi + 1$

b) $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

c) $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$

d) $\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} = 5$

Controleer de correctheid van de formules
met behulp van jouw GRM.
Voor de uitdrukking c) kan dit als volgt gebeuren:



Het getal φ duikt ook op bij de studie van de rij van Fibonacci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots$$

waarin elke term (vanaf de derde term F_3) de som is van de twee voorgaande termen :

$$F_{n-1} + F_n = F_{n+1}.$$

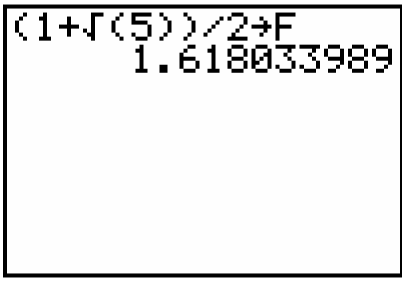
<u>OPDRACHT 4</u>

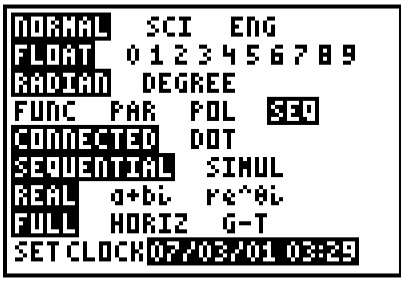
Er bestaat een expliciete uitdrukking voor de n-de term van de rij van Fibonacci. Dit is de zogenaamde formule van Binet :

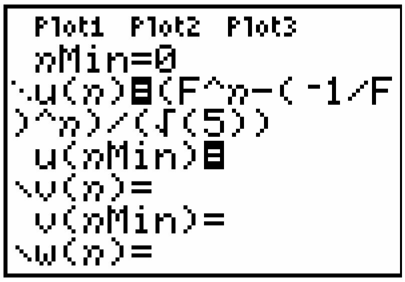
$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Zoek op het Internet een (eenvoudig) bewijs voor deze formule.

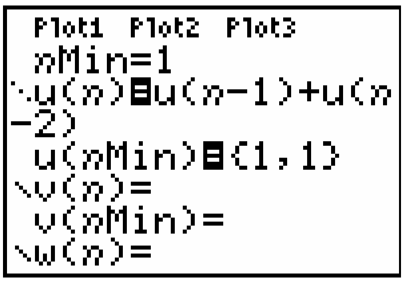
Typ deze formule in op jouw GRM. Werk in MODE SEQ (rijen).
Bepaal via een tabel de eerste 20 Fibonaccigetallen.

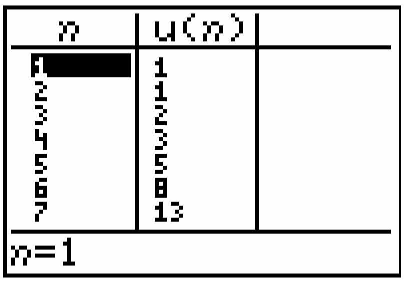






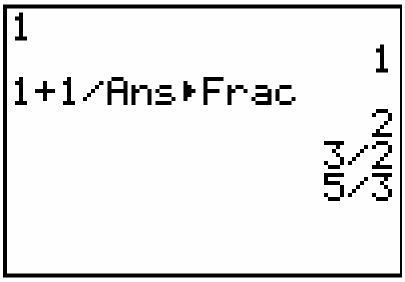
Je kan ook de rij van Fibonacci rechtstreeks opbouwen met jouw GRM door gebruik te maken van het feit dat de eerste twee termen 1 en 1 zijn en dat elke term dan de som is van de twee voorgaande termen.





OPDRACHT 5

a) Typ op jouw GRM het getal 1 in en druk op ENTER. Typ daarna de instructie 1 + 1/Ans ► Frac in en druk dan herhaaldelijk op ENTER. Wat stel je vast? Verklaar.



b) Typ op jouw GRM het getal 1 in en druk op ENTER. Typ daarna de instructie 1 + 1/Ans in en druk dan herhaaldelijk op ENTER. Naar welke waarde blijkt deze rij te convergeren?

Aan welk getal is de kettingbreuk $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$ gelijk?

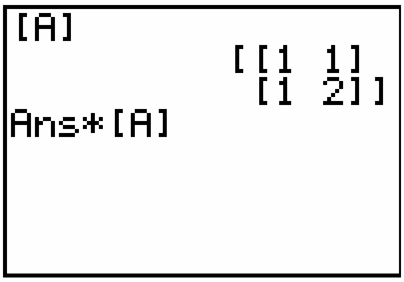
c) Verklaar : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

d) Typ op jouw GRM een willekeurig van-nul-verschillend getal in en druk op ENTER. Typ daarna de instructie 1 + 1/Ans in en druk dan herhaaldelijk op ENTER. Wat stel je vast? Kan je dit verklaren?

OPDRACHT 6

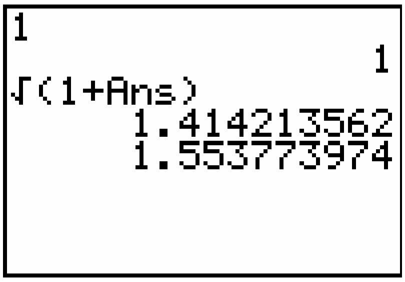
Bereken met jouw grafisch rekentoestel de opeenvolgende machten van de matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Je kunt hierbij telkens het bekomen resultaat (Ans) vermenigvuldigen met de matrix A, zoals op de onderstaande schermafdrukken staat aangegeven. Door dan telkens weer op ENTER te drukken verschijnen de opeenvolgende machten van A.
Welk verband zie je met de getallen uit de rij van Fibonacci? Bewijs!



OPDRACHT 7

a) Typ op jouw GRM het getal 1 in en druk op ENTER. Typ dan de uitdrukking $\sqrt{1+\text{Ans}}$ in en druk herhaaldelijk op ENTER. Naar welk getal blijkt deze rij te convergeren? Verklaar!



b) Wat gebeurt er als je in plaats van de startwaarde 1 een willekeurig ander getal kiest en dit procédé toepast? En wat gebeurt als je start met 0 of met –1?

OPDRACHT 8

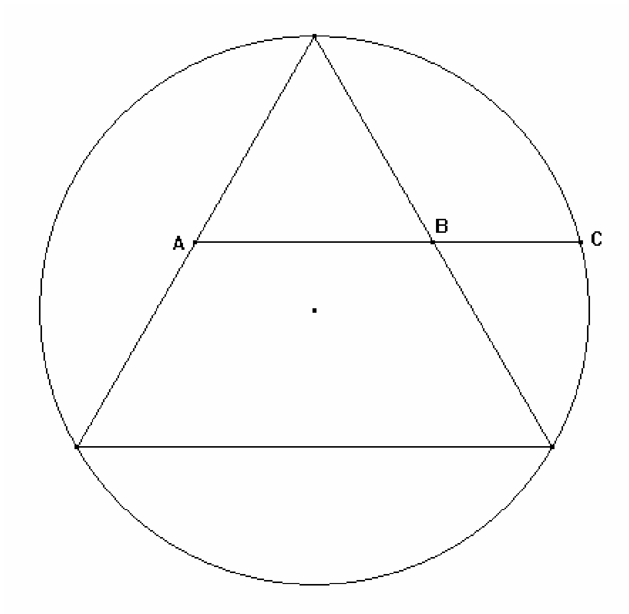
Hieronder staat een eenvoudig programma afgedrukt dat het n-de Fibonaccigetal berekent.
Typ het programma in op jouw GRM en verklaar wat er in elke instructielijn gebeurt.
Werkt het programma correct voor alle strikt positieve natuurlijke getallen n?

```
PROGRAM:FIBONA
:ClrHome
:1 → A: 1→ B: 0→ C
:Disp “N-DE FIB-GETAL”
:Input “N= “,N
:For(I,1,N-2)
        :A+B → C
        :B → A
        :C → B
:End
:Disp C
```

We vermelden hier tenslotte nog vier meetkundige figuren waarin het getal φ opduikt.

<u>OPDRACHT 9</u>

In een cirkel tekent men een gelijkzijdige driehoek en A en B zijn de middens van twee zijden van de driehoek. AB snijdt de cirkel in een punt C. Toon aan dat $\frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$.

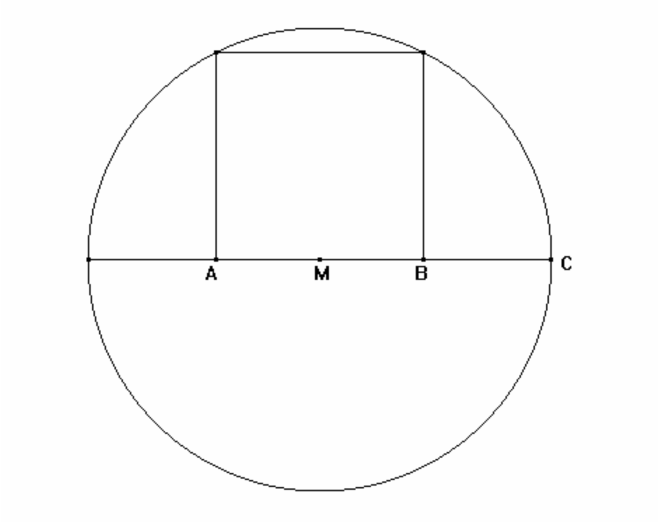


Hint. Bepaal het andere snijpunt van de rechte AB met de cirkel en gebruik dan de macht van het punt B t.o.v. de cirkel. Zoek eerst op hoe de macht van een punt t.o.v. een cirkel gedefinieerd is.

<u>OPDRACHT 10</u>

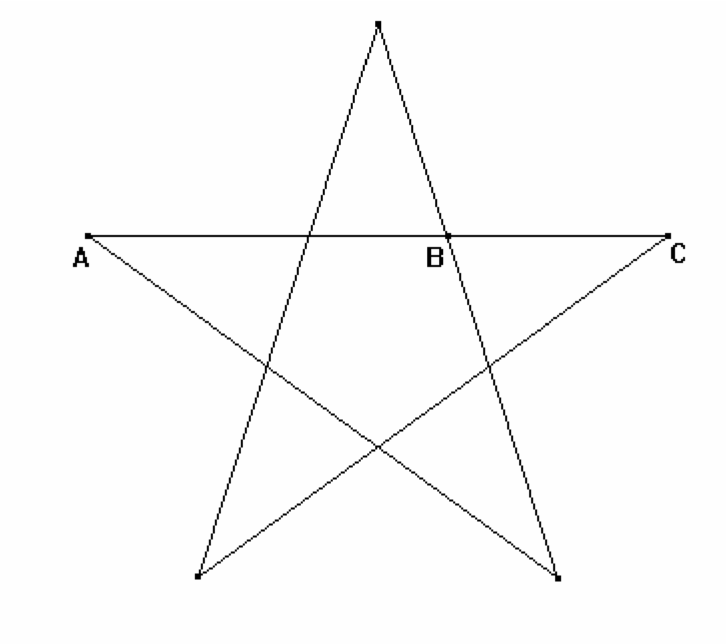
Binnen een cirkel construeert men op een middellijn een vierkant zodat twee hoekpunten van het vierkant op de cirkel liggen en de twee andere hoekpunten A en B op de middellijn. Het middelpunt van de cirkel is het midden van de zijde [AB] en C is een snijpunt van AB met de cirkel.

Toon aan dat $\frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$.



OPDRACHT 11

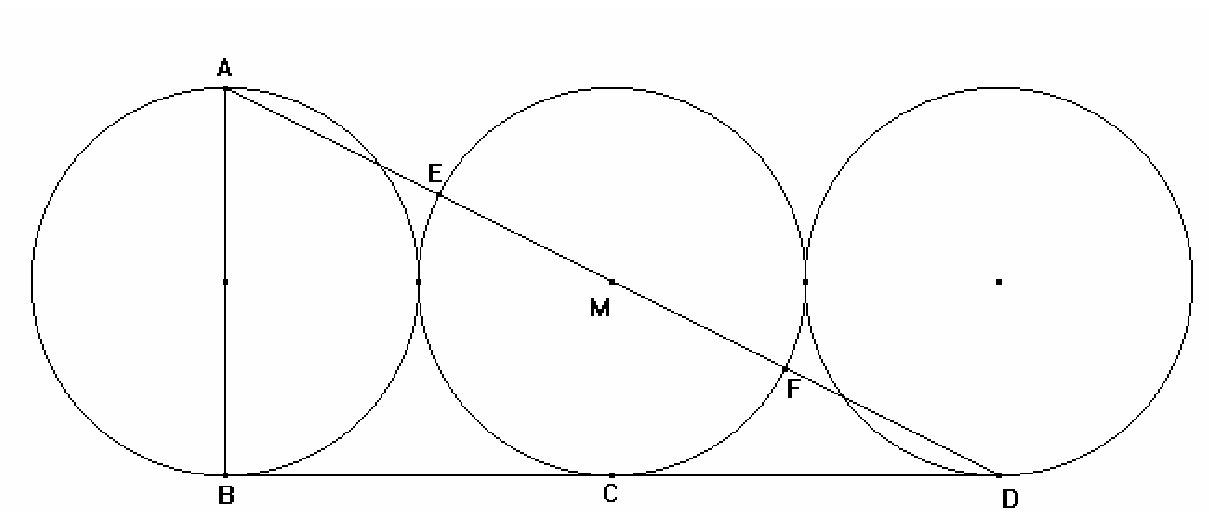
Een pentagram of vijfpuntige ster is een van de oudste symbolen die we kennen. Door de eeuwen heen kreeg deze figuur een magische betekenis.



Toon aan dat $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \varphi$.

OPDRACHT 12

Op de onderstaande tekening staan drie cirkels met straal ½ afgebeeld, waarvan de middelpunten op één rechte liggen en waarbij de middelste cirkel raakt aan beide andere cirkels. Welke lijnstukken op deze figuur hebben als lengte φ? Bewijs!



ONDERZOEKSOPDRACHT 4

THE MATCHING PROBLEM

Dit probleem werd voor het eerst bestudeerd door de Franse wiskundige Pierre Rémond de Montmort in zijn publicatie 'Essay d' Analyse sur les Jeux du Hazard' (1708).

Veronderstel dat je n kaarten hebt met op elke kaart een verschillend natuurlijk getal van 1 tot en met n. Je schudt de kaarten en legt ze één voor één neer terwijl je telt : "Eén, twee, drie …". Hoe groot is de kans dat je minstens één keer het getal uitspreekt dat op de kaart staat die je op dat ogenblik neerlegt?

Montmort voerde het experiment uit met 13 kaarten en noemde het spel 'Treize'. In de wetenschappelijke literatuur spreekt men over 'Rencontres' of 'The matching problem'.

We vermelden hier twee populaire versies van dit probleem.

1. Het probleem van de garderobejuffrouw.
   Een aantal mannen hebben hun hoed afgegeven aan de garderobe. De juffrouw van dienst geeft aan elke man een willekeurige hoed terug. Hoe groot is de kans dat minstens één man zijn eigen hoed terugkrijgt?

2. Het brievenprobleem.
   Iemand schrijft een brief op naam naar n personen en stopt die lukraak in de n omslagen waarop hij vooraf de adressen heeft geschreven. Hoe groot is de kans dat minstens één brief in de juiste omslag terechtkomt?

Telkens als een element op de juiste plaats terechtkomt, spreken we in het vervolg over een 'match' (to match = goed passen).

OPDRACHT 1 (praktische opdracht)

Neem 4 kaarten uit een kaartspel : harten aas, harten twee, harten drie en harten vier. Schudt de kaarten en leg ze één voor één op tafel neer. Tel het aantal 'matches'. Voer dit experiment een aantal keer uit. In hoeveel procent van de gevallen was er minstens één 'match'?

We zoeken nu een antwoord op de vraag hoe groot de kans is op 0, 1, 2, 3 of 4 'matches' wanneer men de vier kaartjes schudt waarop de getallen 1, 2, 3 en 4 staan.

Om deze vraag te beantwoorden volstaat het de 4! = 24 permutaties van het viertal (1,2,3,4) op te schrijven en bij elke permutatie het aantal 'matches' te tellen. Vul naast elke permutatie het aantal 'matches' in:

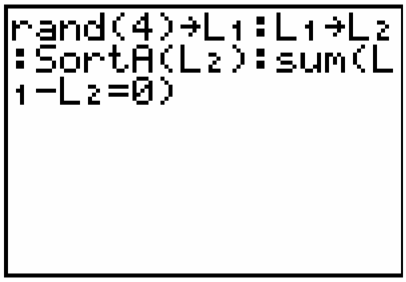
permutatie	aantal 'matches'	permutatie	aantal 'matches'
1234	4	3124	
1243	2	3142	
1324		3214	
1342		3241	
1423		3412	
1432		3421	
2134		4123	
2143		4132	
2314		4213	
2341		4231	
2413		4312	
2431		4321	

Als we met P(i,4) de kans aanduiden op i ‘matches’ bij 4 geschudde kaartjes (waarbij i een natuurlijk getal is van 0 tot en met 4), dan blijkt uit de bovenstaande tabel dat

P(0,4) = 9/24 = 0,375
P(1,4) = 8/24 = 0,3333…
P(2,4) = 6/24 = 0,25
P(3,4) = 0
P(4,4) = 1/24 = 0, 4166…

<u>OPDRACHT 2 (simulatie op het basisscherm van een GRM)</u>

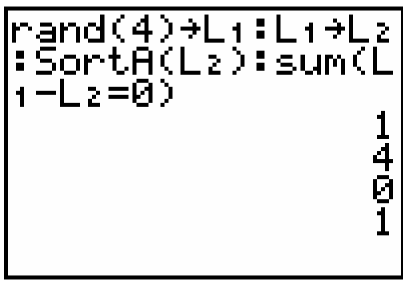
Typ de volgende vier instructies in op het basisscherm van jouw grafische rekenmachine:



Hiermee simuleer je het probleem met de vier kaartjes.

Verklaring :
rand(4) → L_1: het rekentoestel kiest vier reële getallen tussen 0 en 1 en bewaart die in lijst L_1 ;
$L_1 \rightarrow L_2$: lijst L_1 wordt gekopieerd in lijst $L_{2;}$
SortA (L_2) : de getallen in lijst L_2 worden in stijgende volgorde gesorteerd (SortA = sort ascending);
sum($L_1 - L_2 = 0$): voor elk van de vier getallen in beide lijsten kijkt het rekentoestel na of de getallen die op dezelfde plaats staan gelijk zijn of niet. Als ze gelijk zijn, krijgt de logische uitdrukking $L_1 - L_2 = 0$ de waarde 1. Als ze niet gelijk zijn, krijgt de logische uitdrukking $L_1 - L_2 = 0$ de waarde 0. De som komt dus overeen met het aantal ‘matches’.

Druk nu 24 keer na elkaar op de ENTER-toets en noteer het aantal ‘matches’ dat telkens op het scherm verschijnt. Vergelijk de gevonden resultaten met de theoretische waarden.



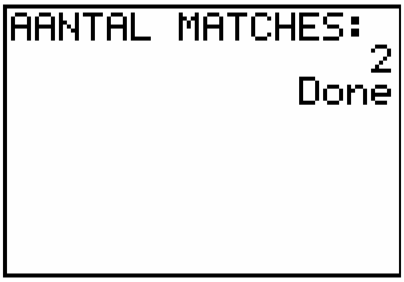
Op de bovenstaande schermafdruk zie je dat het experiment reeds 4 keer werd uitgevoerd en er waren respectievelijk 1, 4, 0 en 1 ‘matches’.

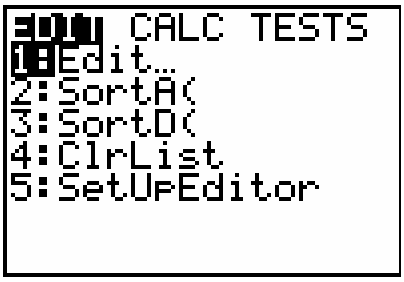
OPDRACHT 3 (simulatie van het spel ‘Treize’ op een GRM)

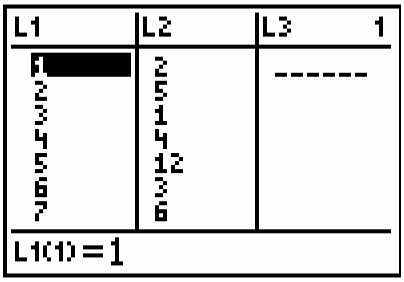
Het onderstaande programma simuleert het spel ‘Treize’. Verklaar hoe het programma het schudden van de kaartjes simuleert. Typ het programma in op jouw GRM en voer het enkele keren na elkaar uit. Na elke uitvoering verschijnt het aantal ‘matches’ op het scherm. Je kan na de uitvoering van het programma de lijsten L_1 en L_2 eens bekijken en door beide lijsten te vergelijken effectief ontdekken waar de ‘matches’ zitten.

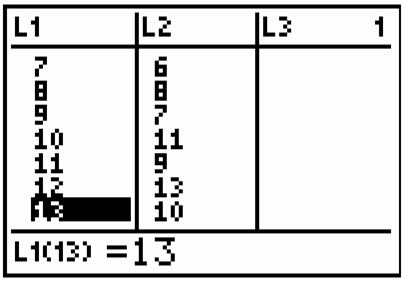
```
PROGRAM:MATCHES
:ClrHome
:ClrList L1, L2
:seq(X,X,1,13) → L1
: L1 → L2
:For(I,1,100)
        :randInt(1,12) → A
        :L2(A) → B : L2(A+1) → L2(A) : B → L2(A+1)
:End
:sum(L1 – L2 = 0) → M
:Disp “AANTAL MATCHES : “,M
```

Bij het experiment waarvan hieronder enkele schermafdrukken staan, waren er twee ‘matches’ nl. bij het cijfer 4 en bij het cijfer 8.









OPDRACHT 4

Op het Internet vind je op de website http://www.rossmanchance.com/applets/ een leuk applet dat het probleem simuleert. Kies bij de rubriek **Probability and Inference** de toepassing *Random babies*.

Vier baby’s met een luier in een verschillende kleur lopen naar vier huisjes toe. Als de kleur van de luier dezelfde als die van het huisje waar de baby naartoe loopt, hebben we een ‘match’.

Voer het experiment uit met vijf baby’s. Kies voor 10, 100, 1000 … experimenten en vergelijk telkens de experimentele waarden met de theoretische waarden. Hoe vind je hierin de wet van de grote aantallen terug?

OPDRACHT 5

Herneem de opdrachten 1 en 2 voor het geval dat je met vijf kaartjes werkt waarop de cijfers van 1 tot en met 5 staan. Stel een tabel op met alle permutaties en bepaal zo de theoretische kansen op 0, 1, 2, 3, 4 of 5 'matches'. Simuleer het experiment daarna ook met jouw GRM.

Aanvulling voor de leraar.

Het bewijs van de **algemene formule** voor de kans P(m,n) op m 'matches' in een geschudde rij van n getallen behoort tot de hogere wiskunde :

$$P(m,n) = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right).$$

Via deze formule vinden we bijvoorbeeld dat de kans dat er geen enkele 'match' is bij 4 getallen gelijk aan

$$P(0,4) = \frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

$$= 3/8$$
$$= 0{,}375.$$

De kans dat er geen enkele 'match' is in een geschudde rij van n getallen is voor grote waarden van n bij benadering gelijk aan

$$\frac{1}{e} = e^{-1}$$ (waarbij e = 2,71828 … het getal van Euler is).

Dit is een direct gevolg van het feit dat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$ (formule van MacLaurin voor de functie $y = e^x$).

Als je immers in deze formule aan x de waarde –1 toekent, bekom je dezelfde uitdrukking als P(0,n) (voor grote waarden van n).

De kans op minstens één 'match' bij n geschudde getallen is dan gelijk aan

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Dit getal convergeert voor grote waarden van n naar $1-\frac{1}{e} \approx 0{,}63$.

Een mooi 'klassikaal' experiment bestaat er in dat je bijvoorbeeld in een klas met 20 leerlingen de huistaken op een willekeurige manier teruggeeft aan de leerlingen en dan kijkt of minstens één leerling zijn eigen taak heeft ontvangen. De kans dat dit effectief ook gebeurt, is ongeveer 63%.

ONDERZOEKSOPDRACHT 5

PROGRAMMEREN OP EEN GRAFISCHE REKENMACHINE

De grafische rekenmachine biedt heel praktische mogelijkheden via het gebruik van (eenvoudige) programma's. We geven eerst zeven voorbeelden.Typ de onderstaande programma's in op jouw GRM en probeer de logica in de opeenvolgende stappen te snappen.

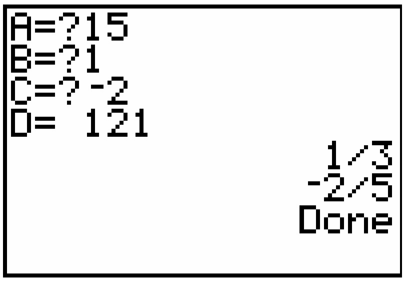
Daarna volgen zeven opdrachten. Schrijf hiervoor telkens een passend programma.

Op http://www.henkshoekje.com/ staat hoofdstuk 16 (over programmeren) uit de handleiding bij de TI-83/84. Deze tekst kan als leidraad dienen bij het leren programmeren.

PROGRAMMA 1
Een programma om vierkantsvergelijkingen op te lossen (reële oplossingen).

```
PROGRAM:VKVGLR
:ClrHome                          wis het scherm
:Real                             via MODE : aangeven dat er met reële getallen wordt gewerkt
:Prompt A,B,C                     input : coëfficiënten a, b en c
:B² – 4AC→D                       bereken de discriminant D
:Disp "D="                        tekst op het scherm afdrukken
:Output(4,4,D)                    4de lijn – 4de positie : waarde van D afdrukken op het scherm
:If D≥0                           voorwaarde
   :Then                          wat doen als aan de voorwaarde voldaan is?
      :Disp (-B+√(D))/(2a) ►Frac  eerste oplossing (in breukvorm)
      :Disp (-B–√(D))/(2a) ►Frac  tweede oplossing (in breukvorm)
   :Else                          wat doen als aan de voorwaarde niet voldaan is?
      :Disp "GEEN REELE OPL."     tekst op het scherm afdrukken
:End                              einde van de IF…THEN…ELSE-instructie
```

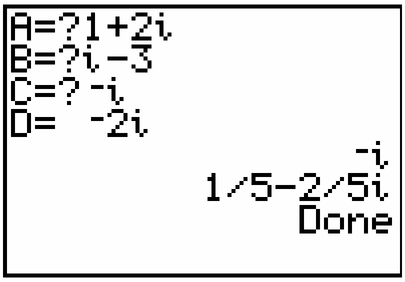
Voorbeeld. Los op : $15x^2 + x – 2 = 0$.



PROGRAMMA 2
Een programma om vierkantsvergelijkingen op te lossen (complexe oplossingen).

```
PROGRAM:VKVGLC
:ClrHome                          wis het scherm
:a+bi                             via MODE : kiezen voor werken met complexe getallen
:Prompt A,B,C                     input : a, b en c
:B²–4AC→D                         bereken de discriminant D
:Disp "D="                        tekst op het scherm afdrukken
:Output(4,4,D)                    4de lijn – 4de positie : waarde van D afdrukken op het scherm
:Disp (-B+√(D))/(2a) ►Frac        eerste oplossing (in breukvorm)
:Disp (-B–√(D))/(2a) ►Frac        tweede oplossing (in breukvorm)
:Real                             via MODE : terug de mode wijzigen
```

Voorbeeld. Los op : $(1 + 2i)z^2 + (i - 3)z - i = 0$.



PROGRAMMA 3

Een programma dat in de lijsten L_1, L_2 en L_3 respectievelijk de eerste 20 natuurlijke getallen (te beginnen met 1), hun kwadraat en hun derde macht plaatst. Nadat het programma is uitgevoerd, kan je de drie lijsten bekijken via STAT>EDIT>1:Edit…

PROGRAM:KWADKUB

:ClrHome	wis het scherm
:ClrList L_1,L_2,L_3	wis de lijsten L_1, L_2 en L_3
:For(I,1,20)	bepaalde herhaling (lus) met I als teller
:I→L_1(I)	zet het getal i op de i-de plaats in lijst L_1
:I²→L_2(I)	zet het getal i² op de i-de plaats in lijst L_2
:I³→L_3(I)	zet het getal i³ op de i-de plaats in lijst L_3
:End	einde van de lus

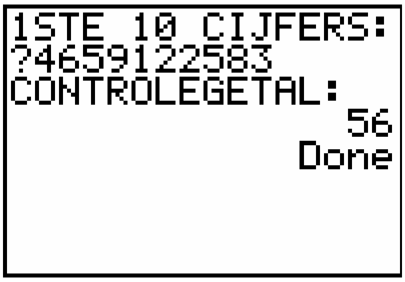
PROGRAMMA 4

Nummers van bankrekeningen bestaan uit twaalf cijfers. De laatste twee cijfers vormen het controlegetal. Dit is het getal dat men bekomt als rest na deling van het getal gevormd door de eerste tien cijfers door 97. Het onderstaande programma berekent dit controlegetal nadat het getal gevormd door de eerste tien cijfers werd ingetypt.
In dit programma gebruiken we de int-instructie (int = integer, het Engels woord voor geheel getal), waarmee het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan een bepaald getal wordt berekend. Zo is int(3.56) = 3 en int(- 2.79)= - 3.

PROGRAM:BANKNR

:ClrHome	wis het scherm
:Disp "1STE 10 CIJFERS:"	tekst op het scherm afdrukken
:Input G	input : geef de eerste 10 cijfers van een bankrekeningnummer
:G –97*int(G/97) →C	berekening van het controlegetal C
:Disp "CONTROLEGETAL:",C	afdrukken van tekst en het controlegetal

Voorbeeld. Bankrekeningnummer 465-59122583-56.



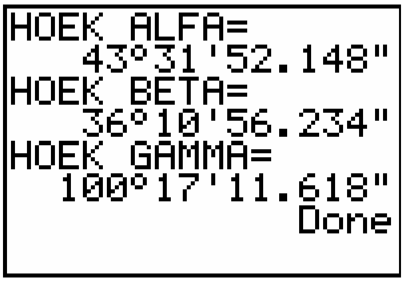
<u>PROGRAMMA 5</u>
Een programma dat de drie hoeken van een willekeurige driehoek berekent als de drie zijden gegeven zijn (ZZZ).

Opeenvolgende stappen :

OPLOSSEN VAN EEN DRIEHOEK ZZZ (DRIEHZZZ)
Geef de drie zijden van de driehoek
$\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \to d$
$\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \to e$
$\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \to f$
$\alpha = \cos^{-1}(d)$
$\beta = \cos^{-1}(e)$
$\gamma = \cos^{-1}(f)$
Toon de waarde van de drie hoeken

PROGRAM:DRIEHZZZ
:ClrHome
:Degree
:Disp"GEEF DE ZIJDEN:"
:Prompt A,B,C
:$(B^2+C^2-A^2)/(2BC) \to D$
:$(A^2+C^2-B^2)/(2AC) \to E$
:$(A^2+B^2-C^2)/(2AB) \to F$
:$\cos^{-1}(D) \to G$
:$\cos^{-1}(E) \to H$
:$\cos^{-1}(F) \to I$
:Disp "HOEK ALFA=", G ►DMS
:Disp "HOEK BETA=", H ►DMS
:Disp "HOEK GAMMA=", I ►DMS

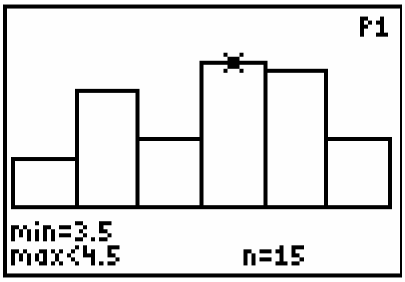
Voorbeeld. De drie hoeken berekenen van een driehoek als de zijden lengten 7, 6 en 10 hebben.



PROGRAMMA 6
Een programma dat het werpen met één dobbelsteen simuleert. Er worden N worpen gedaan en van het resultaat verschijnt een staafdiagram op het scherm.

```
PROGRAM:DOBBEL1
:ClrHome:FnOff :PlotsOff :AxesOff:ExprOff:ClrAllLists
:Disp "SIMULATIE:"
:Disp "WERPEN MET"
:Disp "1 DOBBELSTEEN"
:Disp ""
:Disp "STAAFDIAGRAM"
:Disp ""
:Input "N WORPEN,N=",N
:For(X,1,N)
        :randInt(1,6)→ W
        :Disp W
        :W →L1(X)
:End
:Plot1(Histogram,L1,1)
:0.5→Xmin:6.5→Xmax:1→Xscl
:-N/10→Ymin:N/3→Ymax:10→Yscl
:DispGraph
```

Voorbeeld. Er werd 60 keer geworpen met één dobbelsteen. Via TRACE kan men op het diagram aflezen hoeveel keer elke uitkomst werd bekomen. In het uitgevoerde experiment werd 15 keer een vier geworpen.



PROGRAMMA 7
De Body Mass Index (BMI) geeft informatie over 'hoe gezond' een persoon is.
Om jouw BMI te kennen volstaat het jouw lichaamsgewicht en jouw lichaamslengte te kennen :

$$BMI = \frac{lichaamsgewicht\ in\ kg}{kwadraat\ van\ \ lichaamslengte\ in\ m}$$

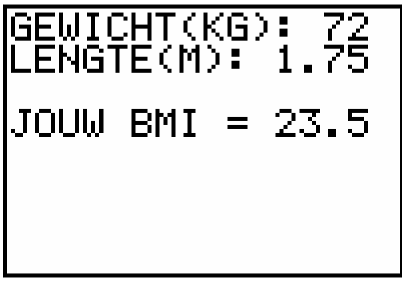
In de onderstaande tabel staat telkens het verband tussen de BMI en de zogenaamde GRF (gezondheidsrisicofactor) :

Mannen	Vrouwen	Gezondheidsrisicofactor
minder dan 20,7	minder dan 19,1	Te laag. Hoe lager uw BMI, hoe groter het risico
20,7 tot 26,4	19,1 tot 25,8	Normaal, laagste risico
26,5 tot 27,8	25,9 tot 27,3	Enigszins te zwaar, enig risico
27,9 tot 31,1	27,4 tot 32,2	Overgewicht, riskant
31,2 tot 45,4	32,3 tot 44,8	Zwaar overgewicht, hoog risico
groter dan 45,4	groter dan 44,8	Morbide obesitas, zeer hoog risico

Via het ingeven van jouw gewicht (in kg) en jouw lichaamslengte (in m) wordt in het onderstaande programma jouw BMI berekend.

```
PROGRAM:BMI
:ClrHome
:Input “GEWICHT(KG): “,G
:Input “LENGTE(M): “ , M
:G/L² → B
:Disp “  “                        invoegen van een lege lijn
:Disp “JOUW BMI = “
:Output(4,12,round(B,1))          round(B,1) : de BMI afronden tot op 1 cijfer na de komma
```

Voorbeeld. Een persoon die 175 cm lang is en 72 kg weegt heeft als BMI 23,5.



<u>OPDRACHT 1</u>
Schrijf een programma voor de euclidische deling bij natuurlijke getallen.

Input : deeltal en deler.
Processing : quotiënt en rest berekenen.
Output : quotiënt en rest. Als de deler nul is, verschijnt de vraag : “Delen door nul?”

<u>OPDRACHT 2</u>
Schrijf een programma waarmee je de twee reële getallen laat berekenen waarvan je de som S en het product P kent.

Input : de getallen S en P.
Processing : de reële getallen A en B berekenen waarvoor A + B = S en AB = P.
Output : A en B.

<u>OPDRACHT 3</u>
Schrijf een programma waarmee je de eerste N (met N $\leq$ 20) Fibonaccigetallen laat berekenen. Bewaar deze getallen in lijst L_1.

Input : het aantal N.
Processing : de eerste N Fibonaccigetallen berekenen.
Output : de eerste N Fibonaccigetallen in lijst L_1.

<u>OPDRACHT 4</u>
Schrijf een programma dat een willekeurige driehoek oplost als twee zijden en de ingesloten hoek gekend zijn (ZHZ).

Input : twee zijden en de ingesloten hoek.
Processing : de andere zijde en de twee andere hoeken berekenen.
Output : de drie gezochte waarden.

OPDRACHT 5

Schrijf een programma dat een willekeurige driehoek oplost als een zijde en de twee aanliggende hoeken gekend zijn (HZH).

Input : een zijde en de twee aanliggende hoeken.
Processing : de andere hoek en de twee andere zijden berekenen.
Output : de drie gezochte waarden.

OPDRACHT 6

Schrijf een programma dat het werpen met twee dobbelstenen simuleert. Telkens wordt de som van het aantal ogen op beide dobbelstenen bepaald en van deze reeks resultaten verschijnt een staafdiagram op het scherm.

Input : het aantal worpen N.
Processing : N keer werpen met twee dobbelstenen en telkens de som van het aantal ogen berekenen.
Output : staafdiagram met de resultaten (aantal keer dat 2, 3, 4, … 12 als som werd bekomen).

OPDRACHT 7

Schrijf een programma dat de oppervlakte van een willekeurige driehoek berekent als men de lengte van de drie zijden kent. Gebruik hiervoor de formule van Heroon. Het is een leuke uitdaging om (op het Internet) een bewijs te vinden van deze formule.

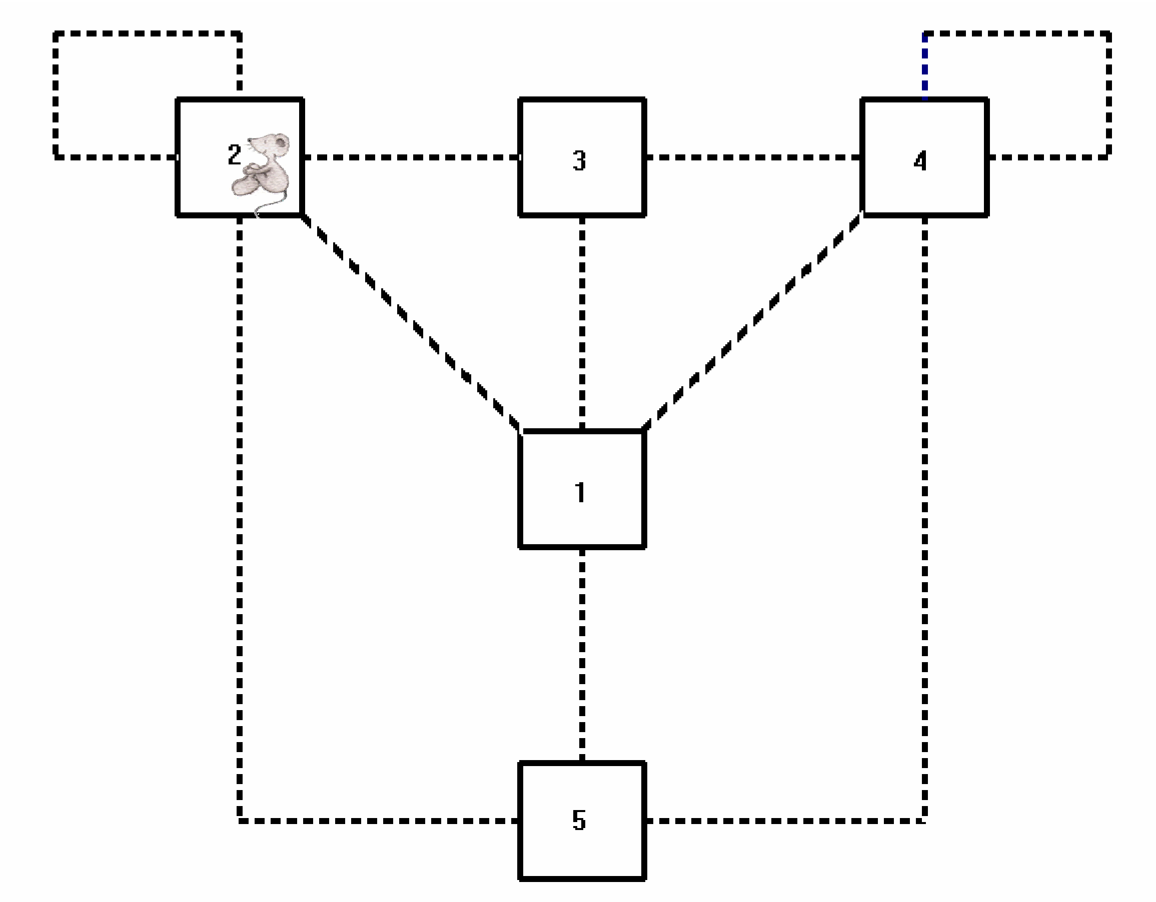
Input : de lengte van de drie zijden van een driehoek.
Processing : de oppervlakte van de driehoek berekenen met de formule van Heroon.
Output : de oppervlakte van de driehoek.

ONDERZOEKSOPDRACHT 6

WAAR ZIT DE MUIS?

(naar een idee van Walter De Volder, erebegeleider DPB-Brugge)

Een muis bevindt zich in kamer 2 van onderstaand labyrint dat bestaat uit 5 kamers en een aantal verbindingsgangen. Ze kan zich vanuit kamer 2 verplaatsen naar kamer 1, 3 of 5 en dit met even grote waarschijnlijkheid. Om bijvoorbeeld kamer 2 te verlaten zijn er vijf mogelijkheden en om kamer 3 te verlaten zijn er maar drie mogelijkheden.



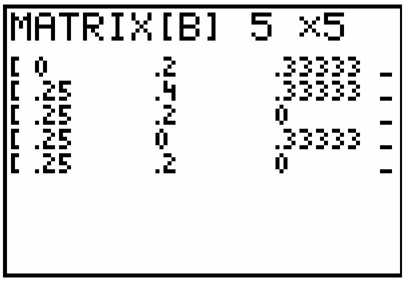
We zoeken een antwoord op de volgende vragen :

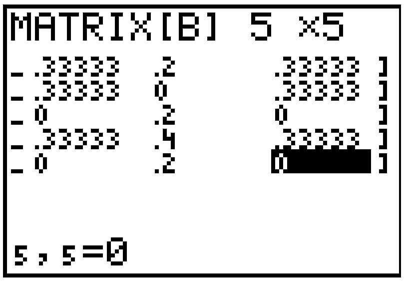
1. **Hoe groot is de kans dat de muis zich na vier verplaatsingen in kamer 5 bevindt?**
2. **Hoe groot is de kans dat de muis na precies 12 verplaatsingen terug in kamer 2 zit?**
3. **Welke kamer(s) zal de muis het meest bezocht hebben wanneer een zeer grote reeks verplaatsingen heeft plaatsgehad?**
4. **Hangt dit resultaat af van de startpositie van de muis?**
5. **Bestaat er een verband tussen de waarschijnlijkheid waarmee de muis zich na een lange reeks verplaatsingen in een bepaalde kamer zal bevinden en het aantal uitgangen uit elke kamer?**

Zij a, b, c, d, e de kans dat de muis zich op zeker moment in kamer 1, 2, 3, 4, 5 bevindt.
Zij a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 de kans dat de muis zich na één verplaatsing in kamer 1, 2, 3, 4, 5 bevindt.

Dan is
$$\begin{cases} a_1 = 0.a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{3}e \\ b_1 = \frac{1}{4}a + \frac{2}{5}b + \frac{1}{3}c + 0.d + \frac{1}{3}e \\ c_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b + 0.c + \frac{1}{5}d + 0.e \\ d_1 = \frac{1}{4}a + 0.b + \frac{1}{3}c + \frac{2}{5}d + \frac{1}{3}e \\ e_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b + 0.c + \frac{1}{5}d + 0.e \end{cases}$$

De matrixvorm van dit stelsel is $A_1 = B . A$ waarbij de matrices B en A hieronder afgebeeld zijn. B is de overgangsmatrix, A de startpositiematrix en A_1 de positiematrix na één verplaatsing.





Als de muis zich in kamer 2 bevindt, is b = 1 en a = c = d = e = 0.

Bemerk dat in elke kolom van de matrices de som van de elementen gelijk is aan 1.

Bij de volgende verplaatsing is $A_2 = B . A_1 = B.(B . A) = (B . B).A = B^2 . A$,

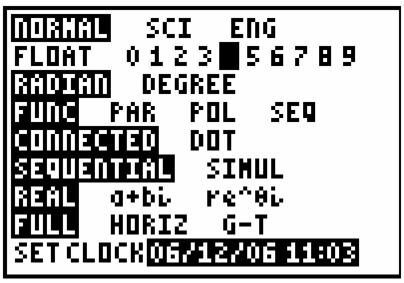
bij de derde verplaatsing is $A_3 = B^3 . A$,

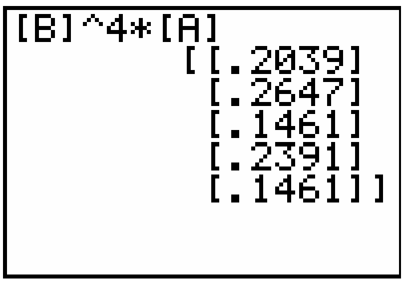
bij de vierde verplaatsing is $A_4 = B^4 . A$, (1)

……………

en bij de n-de verplaatsing is $A_n = B^n . A$.

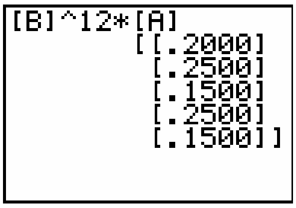
1 Om de eerste vraag op te lossen moeten we (1) uitrekenen. Breng via 2nd MATRX > EDIT de matrices [A] en [B] in.
Stel het toestel in op afronden op vier decimalen (via MODE).
Bereken $B^4 .A$ via 2nd MATRX > NAMES.





De kans dat de muis na vier verplaatsingen in kamer 5 zal zitten, is 14,61%

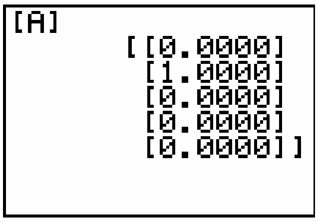
2 Voor het antwoord op vraag 2 gaan we op een analoge manier te werk :

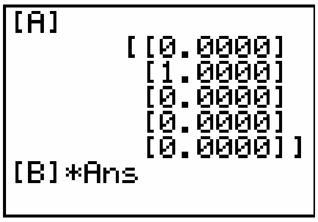


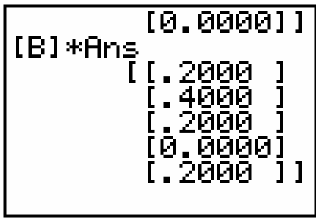
Er is 25% kans om de muis na 12 verplaatsingen weer in kamer 2 aan te treffen.

3 Om beter de evolutie te zien van de kansen na 1, 2, 3 … verplaatsingen kan je als volgt te werk gaan.

Vraag via MATRX > NAMES de matrix A op en druk op ENTER zodat deze matrix op het scherm verschijnt. Vraag daarna de matrix B op en vermenigvuldig deze matrix met A (= Ans = het laatste antwoord). Zo verschijnt de matrix A_1.







Door nu herhaaldelijk op ENTER te drukken krijg je achtereenvolgens de waarden van de matrices A_2, A_3 … . Merk op dat er een stabiele situatie optreedt na ongeveer 10 stappen.

Zo bekom je meteen het antwoord op vraag 3 : de muis zal de kamers 2 en 4 het meest bezocht hebben na een lange reeks verplaatsingen.

<u>OPDRACHT 1</u>
Zoek het antwoord op vraag 4 en vraag 5.

<u>OPDRACHT 2</u>
Los het onderstaande stelsel op met jouw GRM en verklaar waarom de oplossing ‘de stabiele eindtoestand’ oplevert.

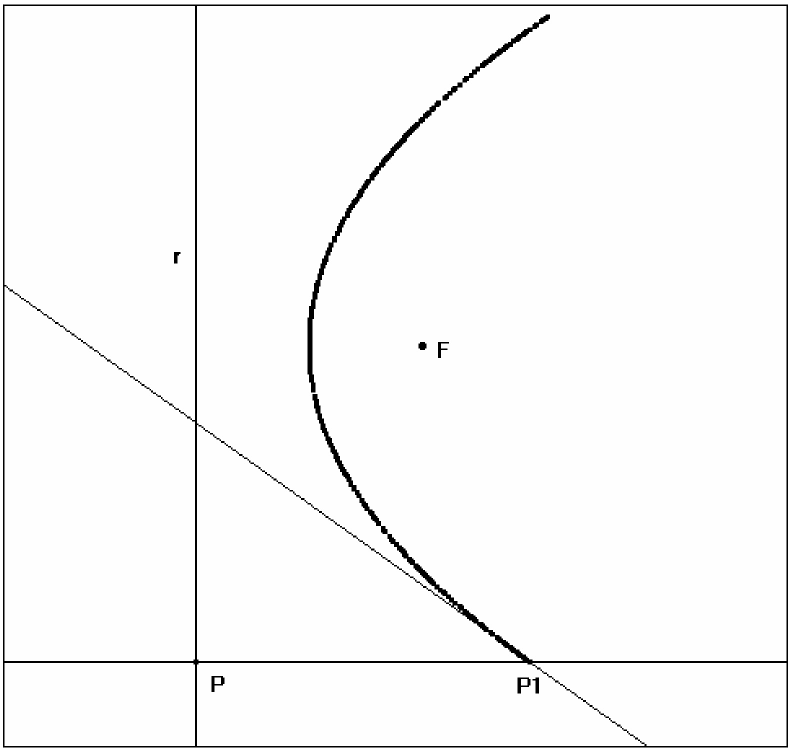
$$\begin{cases} -a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{3}e = 0 \\ \frac{1}{4}a - \frac{3}{5}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}e = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b - c + \frac{1}{5}d = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}c - \frac{3}{5}d + \frac{1}{3}e = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}d - e = 0 \\ a + b + c + d + e = 1 \end{cases}$$

<u>OPDRACHT 3</u>
Ontwerp zelf twee labyrinten : één met 4 kamers en één met 6 kamers. Kies een willekeurige startpositie voor de muis en zoek het antwoord op de vijf vragen die hierboven werden gesteld.

ONDERZOEKSOPDRACHT 7

HET BRANDPUNT VAN EEN PARABOOL

Een parabool is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de afstand tot een vast punt F (het brandpunt van de parabool) gelijk is aan de afstand tot een vaste rechte r (de richtlijn van de parabool).

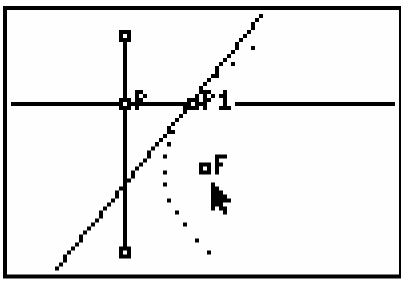


OPDRACHT 1

Maak op een blad papier een constructie van (enkele punten op) een parabool en baseer je hierbij op de bovenstaande tekening. Teken eerst een rechte r en kies ook een vast punt F. P is een willekeurig punt op de rechte r. Het snijpunt van de middelloodlijn van het lijnstuk [PF] en de loodlijn in P op r levert dan een punt P_1 op van de parabool met brandpunt F en richtlijn r.
Verklaar waarom deze constructie beantwoordt aan de bovenstaande definitie.

OPDRACHT 2

Voer deze constructie uit met het programma Cabri op de computer of met Cabri Junior op jouw grafische rekenmachine. Voor de werkwijze met Cabri Junior vind je de uitleg op www.t3vlaanderen.be (klik op 'Cahiers') in cahier nr. 11 van Koen Stulens.



OPDRACHT 3

a) Als men het assenstelsel zodanig kiest dat F als coördinaten (p/2, 0) heeft en dat de vergelijking van de richtlijn r gelijk is aan x = -p/2, dan heeft de parabool met F als brandpunt en r als richtlijn als vergelijking : $y^2 = 2px$.
Schrijf hiervoor een correct bewijs uit en verantwoord elke tussenstap.

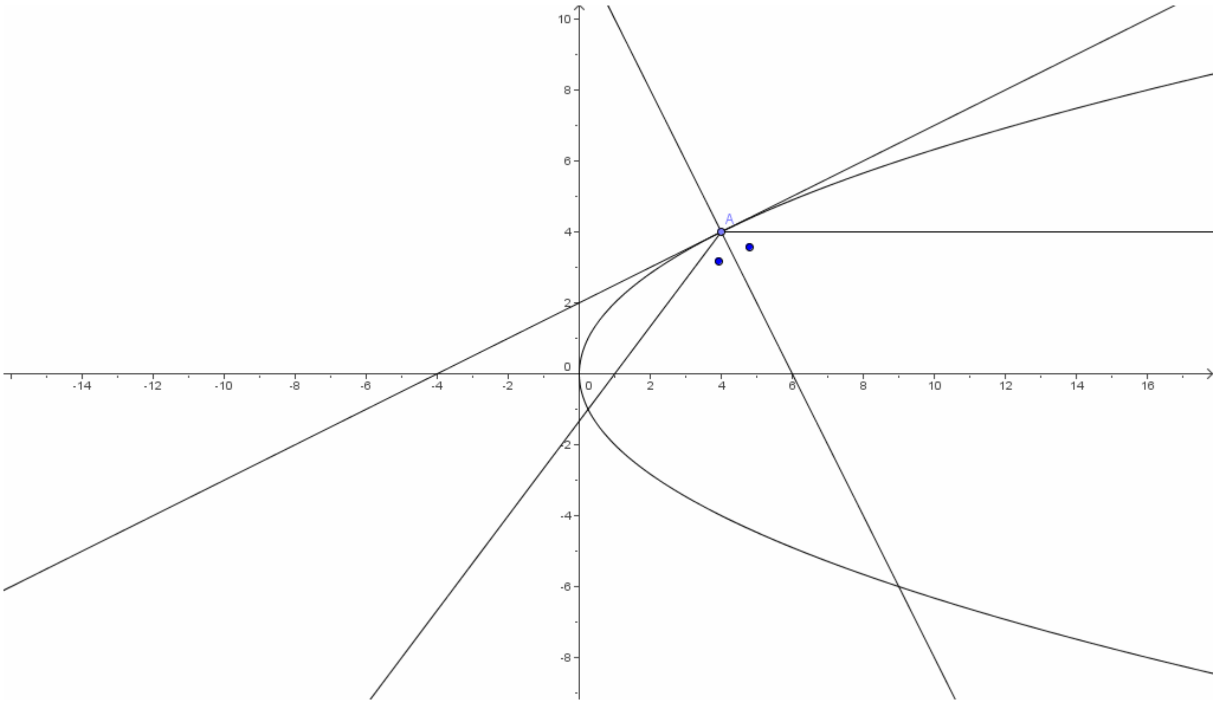
b) Toon aan dat de middelloodlijnen die in opdracht 1 werden getekend raaklijnen zijn aan de parabool.

OPDRACHT 4

Bij een parabolische spiegel wordt een bundel invallende lichtstralen die evenwijdig zijn met de as, weerkaatst in één punt, namelijk het brandpunt of focus van de spiegel.

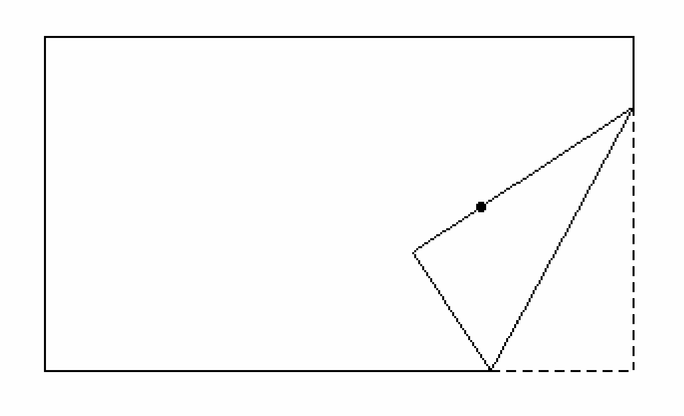
a) Hieronder staat de parabool $y^2 = 4x$ getekend met een lichtstraal evenwijdig met de as van de parabool die invalt in het punt A(4,4). In het punt A werden de raaklijn en de normaal (de loodlijn op de raaklijn) getekend. Stel de vergelijking op van de raaklijn en van de normaal in A(4,4). In welk punt snijdt deze raaklijn de x-as?
Bepaal ook de vergelijking van de raaklijn in het punt B(1,2) aan deze parabool en bepaal opnieuw het snijpunt van de raaklijn met de x-as is.
Kan je hieruit een vermoeden formuleren waardoor het mogelijk is de raaklijn te construeren in een willekeurig punt van deze parabool?
En is dit ook zo bij elke parabool met als vergelijking $y^2 = 2px$, waarbij p een willekeurig van-nul-verschillend reëel getal is?

b) Volgens de wet van Snellius (wat?) zijn de twee aangestipte hoekjes bij het punt A gelijk. Teken nu zelf nog een drietal andere invallende lichtstralen evenwijdig met de as van de parabool en teken er telkens de weerkaatste lichtstraal bij.
Waar ligt het brandpunt F van deze parabool?



OPDRACHT 5

Neem een A4-blad en zet hierop in op ongeveer vijf cm van de rechterrand een punt. Vouw dan het blad zodat de rechtse bladrand precies door het punt gaat. Wrijf goed over de vouw en vouw dan het blad weer open. Herhaal dit enkele keren met telkens een andere vouw. Je zal vaststellen dat zich een parabool uittekent met alle vouwen als raaklijnen, met het punt als brandpunt en met de rechterrand als richtlijn. Verklaar!



OPDRACHT 6

In het vierde jaar heb je geleerd dat de parabool y = ax² + bx + c via een passende verschuiving als functievoorschrift y = ax² krijgt. Dit functievoorschrift kan men ook schrijven als $x^2 = \frac{1}{a}y$ en bijgevolg is het brandpunt van deze parabool dan F$\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.

Vul het onderstaande programma aan zodat de coördinaten van de top en van het brandpunt van de parabool y = ax² + bx + c worden berekend, nadat de waarden voor de coëfficiënten a, b en c werden ingetypt.

```
PROGRAM:FOCUS
:ClrHome
:Disp “Y=AX²+BX+C”
:Prompt A,B,C
:ClrHome
:Disp “TOP T”
:Output(2,1,”XT=”)
:Output(2,4, …………….)
:Output(3,1,”YT=”)
:Output(3,4, ………….. .)
:Output(5,1,”BRANDPUNT F”)
:Output(6,1,”XF=”)
:Output(6,4, …………….)
:Output(7,1,”YF=”)
:Output(7,4, …………….)
```

Drie voorbeelden.

```
Y=AX²+BX+C
A=?-1
B=?-4
C=?-6
```

```
TOP T
XT=-2
YT=-2

BRANDPUNT F
XF=-2
YF=-2.25
```

```
Y=AX²+BX+C
A=?1
B=?-6
C=?8
```

```
TOP T
XT=3
YT=-1

BRANDPUNT F
XF=3
YF=-.75
```

```
Y=AX²+BX+C
A=?-0.5
B=?2
C=?0.5
```

```
TOP T
XT=2
YT=2.5

BRANDPUNT F
XF=2
YF=2
```

ONDERZOEKSOPDRACHT 8

DE VIJF PLATONISCHE LICHAMEN

In het oude Griekenland associeerde men de vier elementen met vier van de vijf regelmatige veelvlakken die ook wel de Platonische lichamen worden genoemd (waarom?) : de kubus of hexaëder met aarde, het regelmatig twintigvlak of icosaëder met water, het regelmatig achtvlak of octaëder met lucht en de regelmatige driezijdige piramide of tetraëder met vuur. Het vijfde regelmatig veelvlak is de dodecaëder of regelmatig twaalfvlak dat werd geassocieerd met de quintessens (wat?).

<u>OPDRACHT 1</u>

Zoek op het Internet informatie over de vijf regelmatige veelvlakken.
Stel een tabel op waarbij je voor elk van deze ruimtefiguren de volgende gegevens vermeldt :

- het aantal hoekpunten v (vertex, meervoud vertices is het Engels woord voor hoekpunt(en));
- het aantal ribben e (in het Engels : edges)
- het aantal zijvlakken f (in het Engels : faces).

Volgens de stelling van Euler is $v - e + f$ voor elk regelmatig veelvlak gelijk aan hetzelfde getal.
Welk getal is dit?

<u>OPDRACHT 2</u>

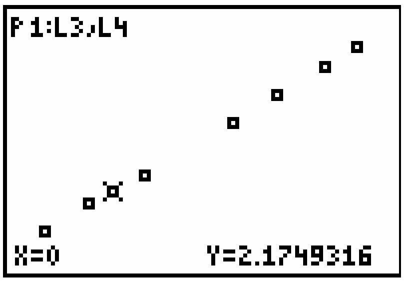
a) Johannes Kepler publiceerde in 1596 zijn beroemde illustratie ‘Mysterium Cosmographicum’.
Wat stelt dit voor?

b) Bespreek kort de drie wetten van Kepler voor de beweging van de planeten rond de zon.

c) Maak een tabel op met vijf kolommen waarin je voor de planeten uit ons zonnestelsel de volgende gegevens plaats :

- kolom 1 : de naam van de planeet
- kolom 2 : de omlooptijd P rond de zon (in jaar)
- kolom 3 : de gemiddelde afstand r tot de zon (in miljoen km)
- kolom 4 : log P
- kolom 5 : log r.

Ga na met behulp van jouw GRM dat de puntenkoppels (log P, log r) op een rechte liggen. Zet hiervoor de waarden voor P, r, log P en log r in de eerste vier lijsten en pas dan op de lijsten L_3 en L_4 lineaire regressie toe. Bepaal de getallen a en b waarvoor $\log P = a \cdot \log r + b$. Hoeveel is de waarde van a? Leg uit hoe je hiermee de derde wet van Kepler ‘terugvindt’.



Voor de aarde is (log P, log r) = (0; 2,1749…)

In 2005 verscheen een VWO-poster met informatie over de regelmatige veelvlakken. Op de VWO-website www.vwo.be vind je hierover heel wat nuttige informatie. In opdracht 3 vragen we een bewijs te construeren voor het feit dat er slechts vijf regelmatige veelvlakken kunnen bestaan. We gaan hierbij uit van de formule van Euler.

<u>OPDRACHT 3</u>

Je kan zelf ‘modellen’ van de regelmatige veelvlakken in elkaar knutselen via de informatie op de website http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher6.htm (klik de figuren aan).

Je vindt computermodellen op http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00349/toepassing_wisweb.html (applet ‘Doorzien’).

In opdracht 1 heb je gecontroleerd dat voor elk regelmatig veelvlak $v - e + f = 2$, waarbij v het aantal hoekpunten is (Eng. vertices), e het aantal ribben (Eng. edges) en f het aantal zijvlakken (Eng. faces).

Noem n het aantal zijden (of hoekpunten) van elk zijvlak. Dan is $nf = 2e$ (verklaar!).

Noem m het aantal ribben (of het aantal zijvlakken) dat in elk hoekpunt samenkomt. Dan is $mv = 2e$ (verklaar!).

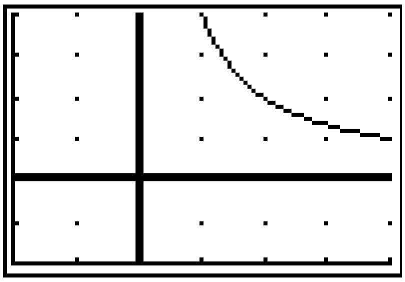
Maak nu gebruik van de drie bovenstaande formules om aan te tonen dat

$$m < \frac{2n}{n-2}.$$

Schets de grafiek van de functie $y = \dfrac{2x}{x-2}$.

Teken de verticale en de horizontale asymptoot van deze grafiek.

Er blijken vijf roosterpunten (punten met gehele coördinaten) onder de grafiek te liggen in het gebied waar m en n groter zijn dan 2 (vanwaar komt deze voorwaarde?). Dit zijn vijf puntenkoppels (n,m) waarvoor $m < \frac{2n}{n-2}$ (hoezo?) en bijgevolg mogen we hieruit besluiten dat er slechts vijf regelmatige veelvlakken kunnen bestaan.



Het koppel (n,m) noemt men het Schäfli-symbool van het regelmatig veelvlak.

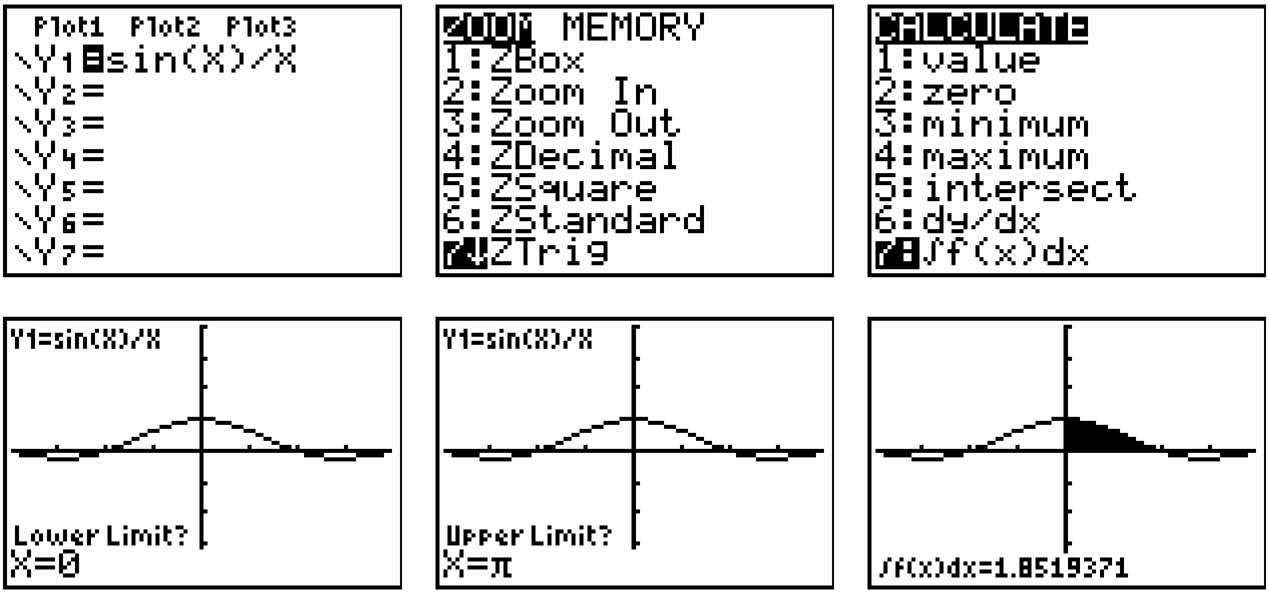
Stel een lijstje op waarbij je bij elk van de vijf mogelijke Schäfli-symbolen het corresponderend regelmatig veelvlak vermeldt.

ONDERZOEKSOPDRACHT 9

NUMERIEKE INTEGRATIE

Om de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)dx$ van een functie f over het interval [a,b] uit te rekenen, werkt de grafische rekenmachine met een zogenaamde numerieke integratiemethode. Hierbij krijgt men in feite een benadering voor de integraal.

We illustreren dit aan de hand van de bepaalde integraal $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$, waarbij we werken in MODE RADIAN (radialen). Hier is men wel aangewezen op een numerieke benadering omdat er voor de functie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ binnen de bekende reële functies geen primitieve functie kan gevonden worden.



Er bestaan drie vrij eenvoudige methoden voor numerieke integratie : de methode van de intervalmiddens, de trapeziumregel en de regel van Simpson. Het is de bedoeling dat je over elk van deze methoden informatie opzoekt. Ook wordt er gevraagd manueel een benadering te berekenen via elke methode voor een welbepaalde functie over een vastgelegd interval en dan via een programma op jouw grafische rekenmachine de numerieke benaderingen te berekenen.

METHODE VAN DE INTERVALMIDDENS

OPDRACHT 1

Zoek informatie over de methode van de intervalmiddens en bereken hiermee manueel een benaderde waarde voor de bepaalde integraal van de functie $y = x^2$ over het interval [0,8] wanneer je werkt met vier gelijke deelintervallen met lengte $h = 2$.

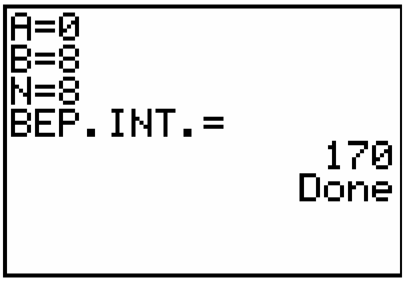
OPDRACHT 2

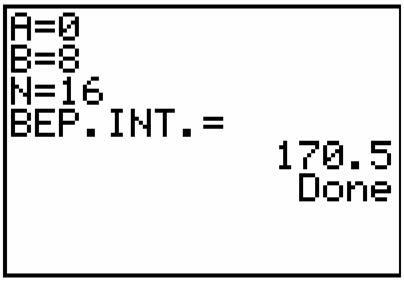
Hieronder staat een programma afgedrukt om bepaalde integralen te berekenen via de methode van de intervalmiddens. Verklaar bij elke programmaregel wat de bedoeling of het resultaat ervan is.

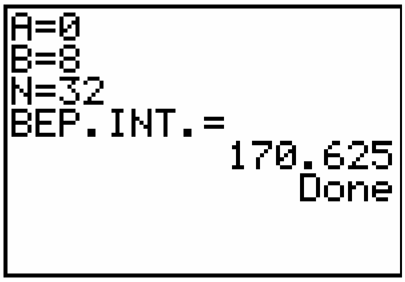
```
PROGRAM:INTMID
:ClrHome
:Input “A= “, A
:Input “B= “, B
:Input “N= “,N
:(B–A)/N → H
:0 → S
:For(I,A+H/2,B–H/2,H)
:S+Y1(I) → S
:End
:Disp “BEP. INT.=  “
:Disp S*H
```

Typ het programma in op jouw grafische rekenmachine.
Vooraleer je het programma kunt laten uitvoeren, moet je eerst het functievoorschrift intypen via Y=.

Hieronder staan de schermafdrukken voor de numerieke benaderingen van de integraal $\int_0^8 x^2 dx$ waarbij N achtereenvolgens gelijk werd gekozen aan 8, 16 en 32.







Bepaal de correcte waarde van de bepaalde integraal $\int_0^8 x^2 dx$ en vergelijk deze waarde met de gevonden benaderingen. Wat stel je vast?

<u>OPDRACHT 3</u>

Pas het bovenstaande programma toe om numerieke benaderingen te vinden voor de bepaalde integraal $\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx$ waarbij het aantal deelintervallen achtereenvolgens gelijk is aan 4, 8, 16 en 32.
Vergelijk de gevonden benaderingen met de waarde die het rekentoestel geeft via CALC – 7: $\int f(x)dx$. In feite gebruikt het rekentoestel hier nog een andere voorgeprogrammeerde benaderingsmethode, nl. de Gauss-Kronrodmethode.

TRAPEZIUMREGEL

<u>OPDRACHT 4</u>

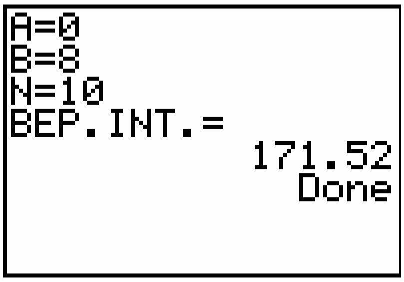
Zoek informatie over de trapeziumregel en bereken hiermee manueel een benaderde waarde voor de bepaalde integraal van de functie $y = x^2$ over het interval [0,8] wanneer je werkt met vier gelijke deelintervallen met lengte h = 2.

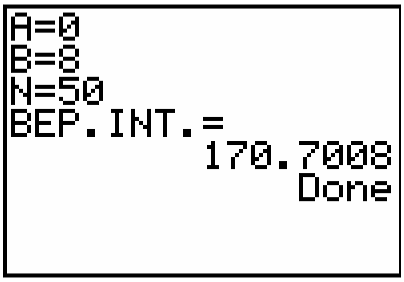
OPDRACHT 5

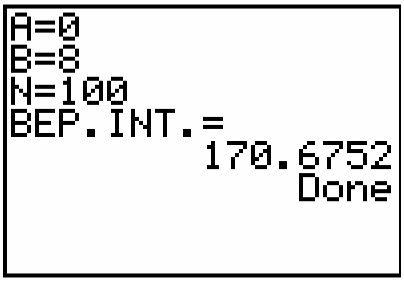
Hieronder staat een programma afgedrukt om bepaalde integralen te berekenen via de trapeziumregel. Verklaar bij elke programmaregel wat de bedoeling of het resultaat ervan is.

```
PROGRAM:TRAPEZ
:ClrHome
:Input “A= “, A
:Input “B= “, B
:Input “N= “,N
:(B–A)/N → H
:0 → S
:For(I,A,B,H)
:S+Y1(I) → S
:End
:2S –Y1(A) –Y1(B) → S
:Disp “BEP. INT.=  “
:Disp S*H/2
```

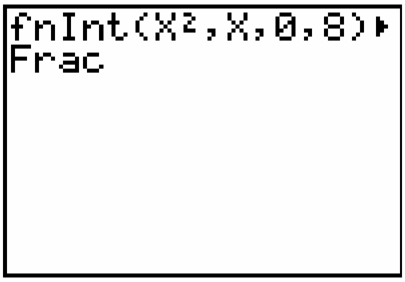
Typ het programma in op jouw grafische rekenmachine.
Vooraleer je het programma kunt laten uitvoeren, moet je eerst het functievoorschrift intypen via Y=.
Hieronder staan de schermafdrukken voor de numerieke benaderingen van de integraal $\int_0^8 x^2 dx$ waarbij N achtereenvolgens gelijk werd gekozen aan 10, 50 en 100.







Welke waarde geeft het rekentoestel wanneer je deze bepaalde integraal rechtstreeks op het basisscherm berekent (zie onderstaande schermafdruk)? Is dit de correcte waarde?



OPDRACHT 6

Pas het bovenstaande programma toe om numerieke benaderingen te vinden voor een bepaalde integraal die je via manueel rekenwerk correct kunt berekenen en waarbij je voor het aantal deelintervallen achtereenvolgens de waarden 10, 50 en 100 kiest. Kies zelf een functie y = f(x) en een integratie-interval.
Vergelijk de gevonden benaderingen met de waarde die het rekentoestel geeft via CALC – 7: $\int f(x)dx$.

REGEL VAN SIMPSON

Om $\int_a^b f(x)dx$ te berekenen met de regel van Simpson (ook wel de paraboolregel genoemd) wordt het interval [a,b] in n gelijke deelintervallen verdeeld met **n even**. De lengte van elk deelinterval is $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Dan neemt men telkens twee opeenvolgende intervallen samen en benadert de functie f door een parabool. Stellen we a = x_0 , a + h = x_1, a + 2h = x_2, … a + nh = x_n, dan vinden we via de regel van Simpson de volgende benadering:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{n-2})\big) + f(x_n)\right]}$$

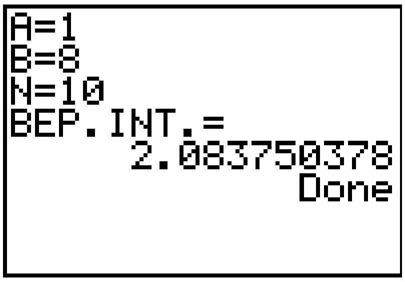
<u>OPDRACHT 7</u> (facultatief)
Bewijs de regel van Simpson.

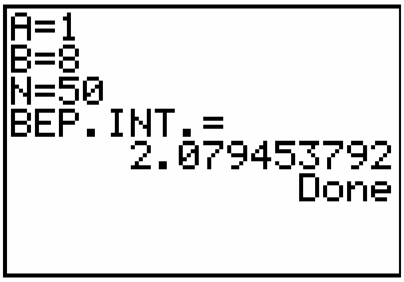
<u>OPDRACHT 8</u>

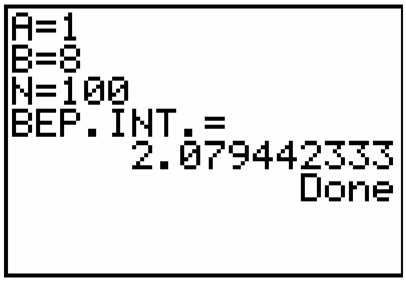
Hieronder staat een programma afgedrukt om bepaalde integralen te berekenen via de regel van Simpson. Verklaar bij elke programmaregel wat de bedoeling of het resultaat ervan is.

```
PROGRAM:TRAPEZ
:ClrHome
:Input "A= ", A
:Input "B= ", B
:Input "N= ",N
:(B–A)/N → H
:Y1(A)+Y1(B) → S
:For(I,A+H,B–H,2H)
:S+4Y1(I) → S
:End
:For(I,A+2H,B–2H,2H)
:S+2Y1(I) → S
:End
:Disp "BEP. INT.=  "
:Disp S*H/3
```

Typ het programma in op jouw grafische rekenmachine.
Vooraleer je het programma kunt laten uitvoeren, moet je eerst het functievoorschrift intypen via Y=.
Hieronder staan de schermafdrukken voor de numerieke benaderingen van de integraal $\int_1^8 \frac{1}{x}dx$ waarbij N achtereenvolgens gelijk werd gekozen aan 10, 50 en 100.







Bepaal via manueel rekenwerk de exacte waarde van deze integraal en vergelijk met de gevonden numerieke benaderingen.

ONDERZOEKSOPDRACHT 10

EXPLORATIEVE STATISTIEK

Bij beschrijvende statistiek bestaat een zinvolle oefening erin dat de leerlingen vertrekken van een bepaalde onderzoeksvraag, in functie hiervan een set gegevens verzamelen en hierop individueel een analyse uitvoeren. Daarna kunnen ze hun resultaten vergelijken met wat medeleerlingen hebben geconstateerd. Tenslotte kunnen ze hun resultaten samenvoegen en vanuit de meer omvangrijke dataset proberen tot een conclusie te komen.

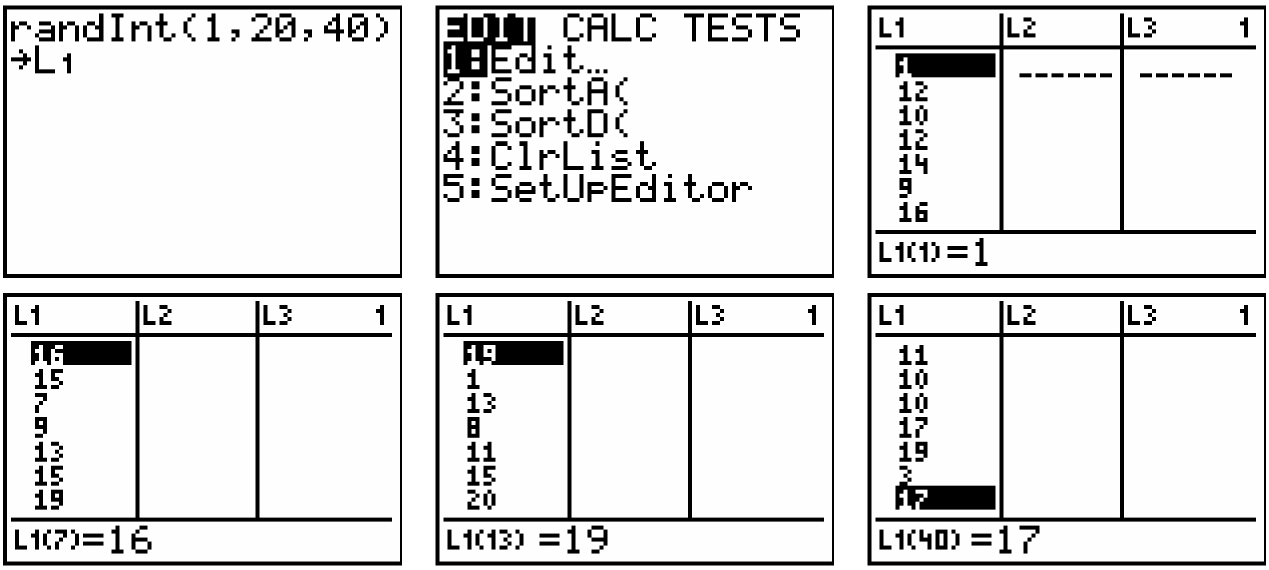
Uiteraard gaat men hiervoor best te werk met een representatieve steekproef. Dit vergt in de praktijk soms heel wat tijd. Daarom zullen we hier de grafische rekenmachine inschakelen voor een ‘simulatie’ met zogenaamde randomgetallen.

ONDERZOEKSVRAAG
Indien je aan 40 willekeurig gekozen voorbijgangers zou vragen een natuurlijk getal op te schrijven van 1 tot en met 20, hoeveel van die getallen zullen dan

- **een viervoud zijn**
- **een vijfvoud zijn**
- **een zesvoud zijn**
- **een priemgetal zijn**
- **kleiner zijn dan 6**
- **groter zijn dan 15?**

En hoeveel verwacht je als rekenkundig gemiddelde van alle opgeschreven getallen?

We simuleren dit experiment op de GRM en bewaren meteen de resultaten in lijst L_1. Via STAT-EDIT vragen we de lijst L_1 op :



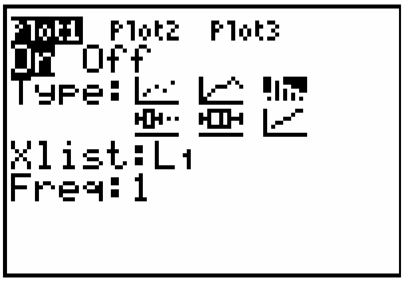
In het experiment bevat lijst L_1 de volgende getallen :

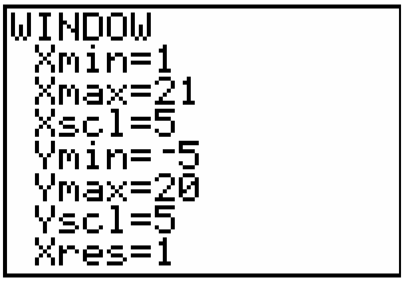
1	12	10	12	14	9	16	15
7	9	13	15	19	1	13	8
11	15	20	7	6	3	20	3
13	14	11	18	4	1	5	7
8	11	10	10	17	19	3	17

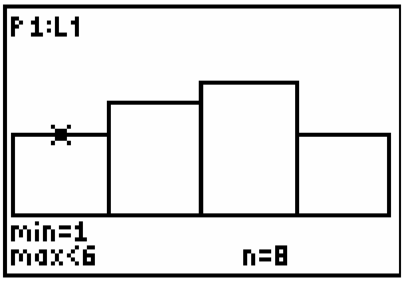
Via turven komen we tot de volgende bevinding :

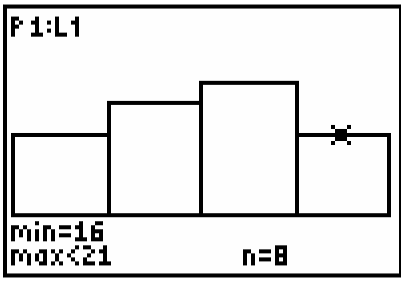
Eigenschap	Turven	Absolute frequentie	Relatieve frequentie
4-voud	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8	0,2
5-voud	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9	0,225
6-voud	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	0,1
priemgetal	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	17	0,425

Via een histogram bepalen we hoeveel getallen er kleiner zijn dan 6 en groter dan 15:





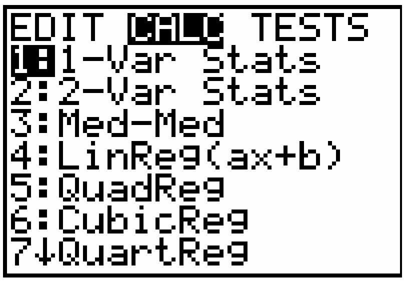


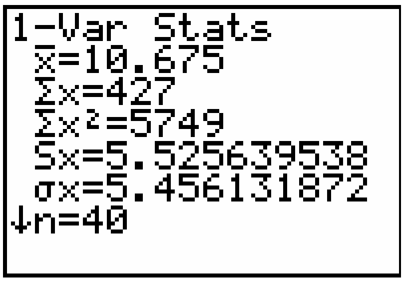


We bekomen als resultaat :

- van 1 tot en met 5 : 8 getallen
- van 6 tot en met 10 : 11 getallen
- van 11 tot en met 15 : 13 getallen
- van 16 tot en met 20 : 8 getallen.

Via STAT-CALC berekenen we het rekenkundig gemiddelde van de 40 getallen en dat blijkt 10,675 te zijn.





Verdeel de klas in groepjes en laat de leerlingen een antwoord geven op de volgende vragen.

<u>OPDRACHT 1</u>

a) Wat is de theoretische kans dat een willekeurig gekozen natuurlijk getal van 1 tot en met 20
   - een viervoud is
   - een vijfvoud is
   - een zesvoud is
   - een priemgetal is
   - kleiner is dan 6
   - groter is dan 15?

b) Hoeveel is het theoretisch rekenkundig gemiddelde van 40 lukraak gekozen natuurlijke getallen van 1 tot en met 20?

c) Voer een simulatie uit op jouw GRM waarbij er lukraak 40 natuurlijke getallen worden gekozen van 1 tot en met 20 en bepaal het aantal 4- , 5- en 6-vouden en het aantal priemgetallen (absolute en relatieve frequenties). Bepaal het aantal getallen kleiner dan 6 en het aantal getallen groter dan 15 door een histogram te tekenen op jouw GRM.

d) Vergelijk jouw resultaten met die van de andere leerlingen uit jouw groepje. Voeg nu eens alle resultaten samen en bereken opnieuw de relatieve frequenties. Wat stel je vast?

<u>OPDRACHT 2</u>

Leg uit wat de bedoeling is van de instructies die je op de onderstaande schermafdruk ziet staan.

```
L1/4→L2
{.25 3 2.5 3 3.…
int(L1/4)→L3
{0 3 2 3 3 2 4 …
sum(L2-L3=0)
               8
```

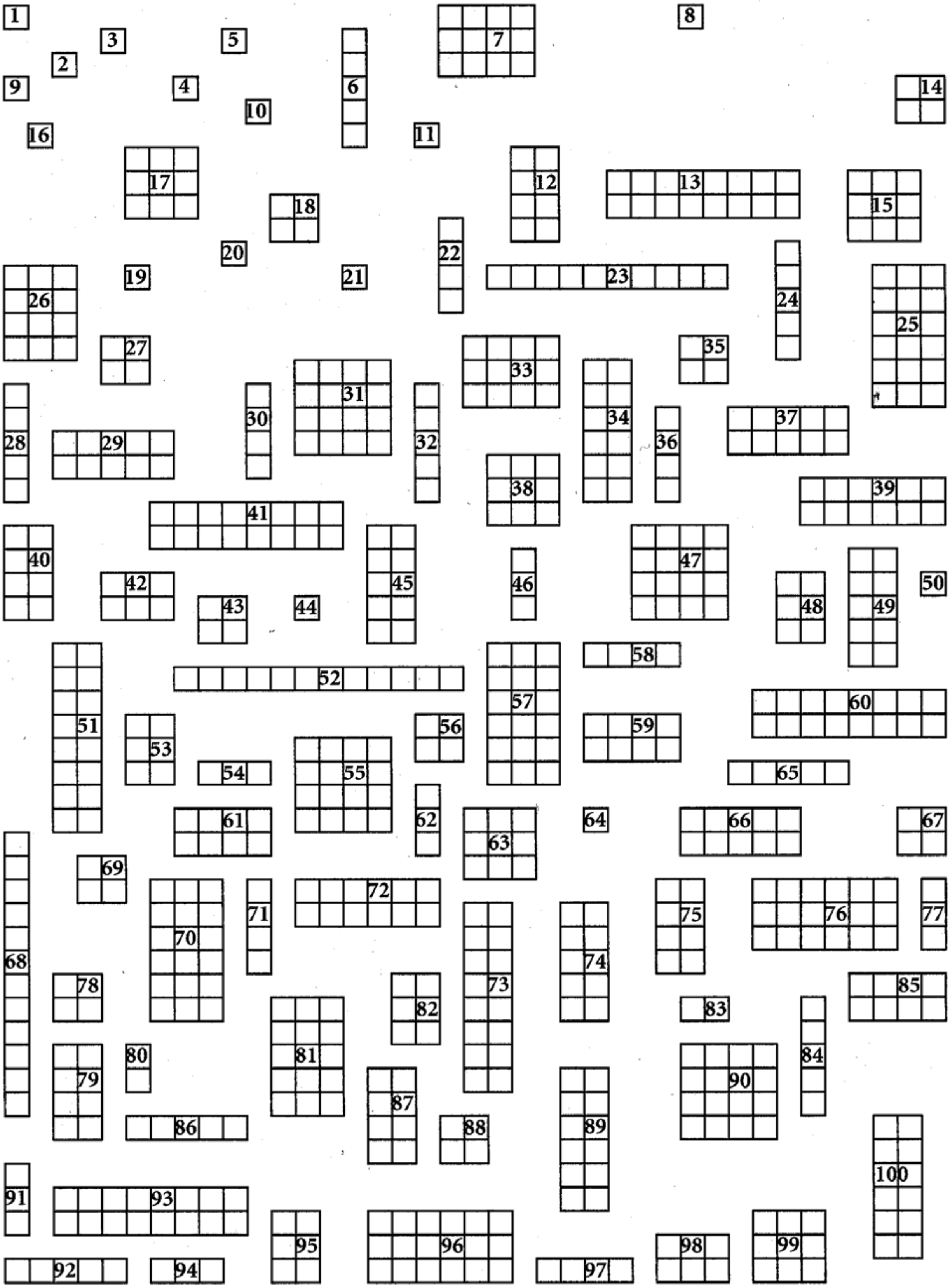
<u>OPDRACHT 3</u>

Voer het experiment van opdracht 1c werkelijk uit, m.a.w. vraag aan 40 personen om een natuurlijk getal op te schrijven van 1 tot en met 20.
Hoeveel van die getallen zijn
   - een viervoud
   - een vijfvoud
   - een zesvoud
   - een priemgetal
   - kleiner dan 6
   - groter dan 15?

Wat stel je vast?

<u>OPDRACHT 4</u> (idee aangereikt door Herman Callaert, professor in de statistiek, Universiteit Hasselt)

a) Bekijk gedurende 10 seconden de 100 vierhoeken op de volgende pagina en schat dan uit hoeveel vierkantjes deze vierhoeken gemiddeld bestaan. Stip hiervoor zes vierhoeken aan die je representatief vindt voor de totale collectie van vierhoeken en bereken van deze zes vierhoeken het gemiddeld aantal vierkantjes waaruit ze zijn opgebouwd.
b) Laat door jouw rekentoestel lukraak 6 natuurlijke getallen kiezen van 1 tot en met 100 via de instructie randInt(1,100,6). Zoek daarna op de volgende pagina de zes figuren die deze nummers dragen en bereken het gemiddeld aantal vierkantjes waaruit ze zijn opgebouwd.
c) Bereken correct het gemiddeld aantal vierkantjes waaruit de 100 vierhoeken zijn opgebouwd.
d) Vergelijk de resultaten van opdracht 4a en 4b met het correct gemiddelde dat in 4c werd berekend. Wat concludeer je hier uit?


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

ONDERZOEKSOPDRACHT 11

AFSTANDSBEPALING OP DE AARDBOL

naar een idee van het tijdschrift Uitwiskeling, jaargang 22, nr. 4 – oktober 2006
www.uitwiskeling.be

en met dank aan collega Philip Bogaert

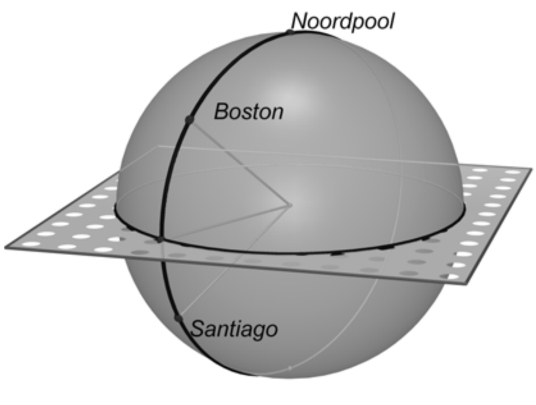
Het doel van deze opdracht is de afstand te bepalen tussen twee plaatsen A en B op de aardbol wanneer men van beide plaatsen de lengte- en de breedteligging kent.

Op een boloppervlak is de kortste verbinding tussen twee punten steeds een boog van een cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol. Een dergelijke cirkel noemen we in het vervolg een *grootcirkel*.

OPDRACHT 1
De steden Santiago (hoofdstad van Chili) en Boston (hoofdstad van de Amerikaanse staat Massachusetts) hebben dezelfde lengteligging , nl. 71° WL. De breedtegraden zijn respectievelijk 33° ZB en 42° NB. De gemiddelde straal van de aarde is 6378 km.

1.1 Bereken de afstand tussen Santiago en Boston in graden.

1.2 Bereken de afstand tussen Santiago en Boston in kilometer.



OPDRACHT 2
Voor het berekenen van de afstand tussen twee steden die op dezelfde breedtegraad liggen, moet men eerst de straal bepalen van de overeenkomstige breedtecirkel. Tokio en Gibraltar liggen allebei op 36° NB.

2.1 Bereken de afstand tussen Tokio en Gibraltar in graden.

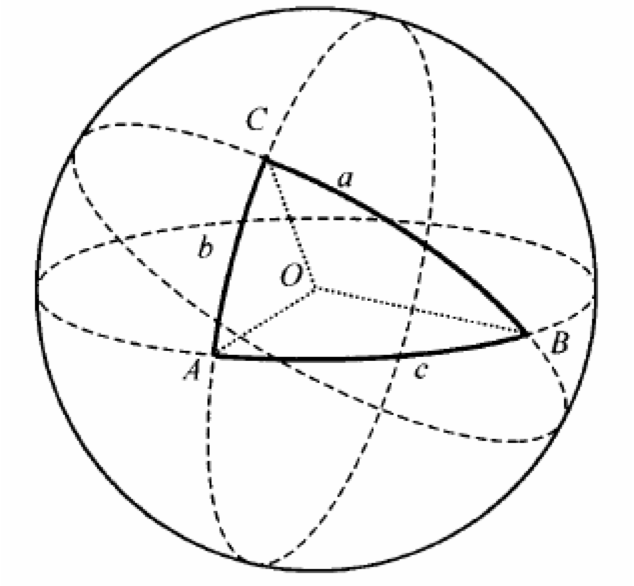
2.2 Bereken de afstand tussen Tokio en Gibraltar in kilometer.

Wanneer de twee plaatsen A en B echter niet op dezelfde meridiaan of dezelfde breedtecirkel liggen, moet men gebruik maken van boldriehoeksmeting om de kortste afstand tussen A en B te bepalen.

Wanneer twee zijden b en c en een ingesloten hoek α van een boldriehoek gegeven zijn, kan de derde zijde a berekend worden met de volgende formule:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha \, .$$

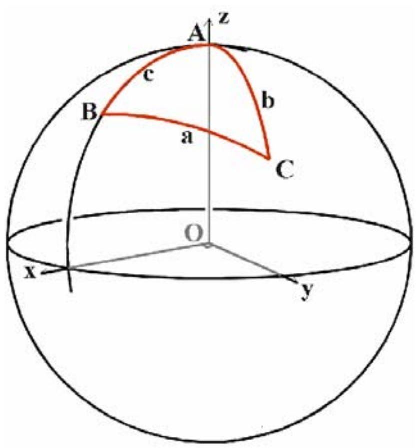
Deze formule staat bekend als de **cosinusregel** voor willekeurige boldriehoeken. Voor een bewijs van deze regel verwijzen we naar http://star-www.st-and.ac.uk/~fv/webnotes/chapter2.htm .



De hoek α van de boldriehoek ABC is de hoek tussen de raaklijnen aan de (gebogen) zijden in A. De zijden van de boldriehoek zijn bogen van grootcirkels en met de zijden die voorkomen in de cosinusregel bedoelt men in feite de corresponderende middelpuntshoeken van de bol.

Op de onderstaande figuur is dus volgens de cosinusregel :

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A \, .$$



Als het punt A de noordpool is en als B en C boven de evenaar en in het oostelijk halfrond liggen, dan is

b = 90° – het aantal graden noorderbreedte van C
c = 90° – het aantal graden noorderbreedte van B
A = het aantal graden oosterlengte van C – aantal graden oosterlengte van B.

<u>Voorbeeld.</u>

Een boldriehoek heeft zijden van 64° en 81° en heeft een ingesloten hoek van 100°. Hoe groot is de derde zijde?

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos 64^\circ \,.\, \cos 81^\circ + \sin 64^\circ \,.\, \sin 81^\circ \,.\, \cos 100^\circ \\ &= -0{,}085576\ldots\end{aligned}$$

zodat a = 94°54'33".

Als de straal van de bol waarop de driehoek ligt gelijk is aan 10 cm, dan is de lengte van de zijde a gelijk aan $\dfrac{94{,}909 \text{ x } 2\pi \text{ x } 10}{360}$ of ongeveer 16,6 cm.

```
cos⁻¹(cos(64)cos(
81)+sin(64)sin(8
1)cos(100))
      94.90915156
Ans*2π*10/360
      16.56477185
```

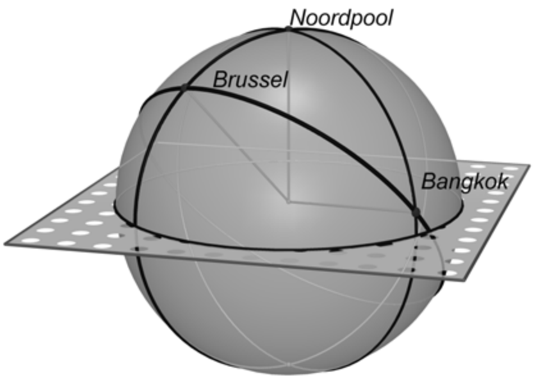
<u>OPDRACHT 3</u>

De coördinaten van Brussel zijn 50°50' NB en 4°20' OL. De coördinaten van Bangkok (hoofdstad van Thailand) zijn 13°15' NB en 100°31' OL. De afstand tussen Brussel en Bangkok moet worden gemeten op een grootcirkel. Daarvoor passen we de cosinusregel toe in de boldriehoek ABN met als derde hoekpunt de noordpool. Hierbij staat *A* voor B<u>a</u>ngkok, *B* voor <u>B</u>russel en *N* voor <u>n</u>oordpool.

2.1 Bereken drie gegevens van de boldriehoek ABN: de zijde AN, de zijde BN en de hoek $A\hat{N}B$.

2.2 Bereken de lengte van de boldriehoekszijde AB in graden, minuten en seconden.

2.3 Bereken de lengte van de boldriehoekszijde AB in kilometer. We nemen aan dat de omtrek van de aarde 40 000 km is.



OPDRACHT 4

Verklaar waarom men op de GRM (in MODE DEGREE) de volgende formules mag gebruiken om de afstand d te bepalen tussen twee willekeurige punten op aarde :

$$\cos a = \sin b_1 .\sin b_2 + \cos b_1 .\cos b_2 .\cos (l_1 - l_2)$$

en

$$d = \frac{40\,000\ \cos^{-1} a}{360}$$

met b_1 de breedteligging van de eerste plaats en b_2 de breedteligging van de tweede plaats;
met l_1 de lengteligging van de eerste plaats en l_2 de lengteligging van de tweede plaats;
b_1 en b_2 zijn positieve waarden bij noorderbreedte en negatieve waarden bij zuiderbreedte;
l_1 en l_2 zijn positieve waarden bij oosterlengte en negatieve waarden bij westerlengte.

Bereken hiermee via jouw GRM de afstand tussen Sydney (Australië) en Vancouver (Canada). De coördinaten van alle plaatsen op aarde kan je vinden op de website http://www.astro.com/atlas/horoscoop door daar de gewenste plaats als geboorteplaats in te typen.

Vergelijk het gevonden resultaat met wat je via één van de volgende websites vindt :
http://home.planet.nl/~hklein/afstand/cairo.htm
http://www.geobytes.com/CityDistanceTool.htm .

Kloppen de bovenstaande formules ook als beide plaatsen op dezelfde meridiaan liggen? Verklaar.

OPDRACHT 5

Schrijf een programma op jouw GRM dat toelaat de afstand tussen twee plaatsen op aarde te berekenen als je van beide plaatsen de coördinaten intypt.
Hieronder zie je hoe via dit programma de berekening kan verlopen om de afstand tussen Rome en Londen te berekenen.

```
PUNT A
BREEDTE=41.8
LENGTE=12.6
PUNT B
BREEDTE=51.5
LENGTE=-1/6
```

```
AFSTAND (IN KM)=
            1448
            Done
```

OPDRACHT 6

De VOLVO Oceaanrace is een zeilrace rond de wereld, waarbij de teams met hun schip in verschillende etappes rond de wereld zeilen. In 2001-2002 telde deze zeilrace 9 etappes.

ETAPPE 1	Southampton, Engeland, naar Kaapstad, Zuid-Afrika
ETAPPE 2	Kaapstad naar Sydney, Australië
ETAPPE 3	Sydney naar Auckland, Nieuw-Zeeland (via Hobart, Australië)
ETAPPE 4	Auckland naar Rio de Janeiro, Brazilië
ETAPPE 5	Rio de Janeiro naar Miami, U.S.A.
ETAPPE 6	Miami naar Baltimore en Annapolis, U.S.A.
ETAPPE 7	Baltimore en Annapolis naar La Rochelle, Frankrijk
ETAPPE 8	La Rochelle naar Göteborg, Zweden
ETAPPE 9	Göteborg naar Kiel, Duitsland

Zoek van alle vermelde plaatsen de coördinaten op de aardbol op en bereken hiermee via het programma op jouw GRM de lengte van elke etappe.

Welke etappe is de kortste en welke is de langste?

Hoeveel bedraagt de totale afstand van deze zeilrace?

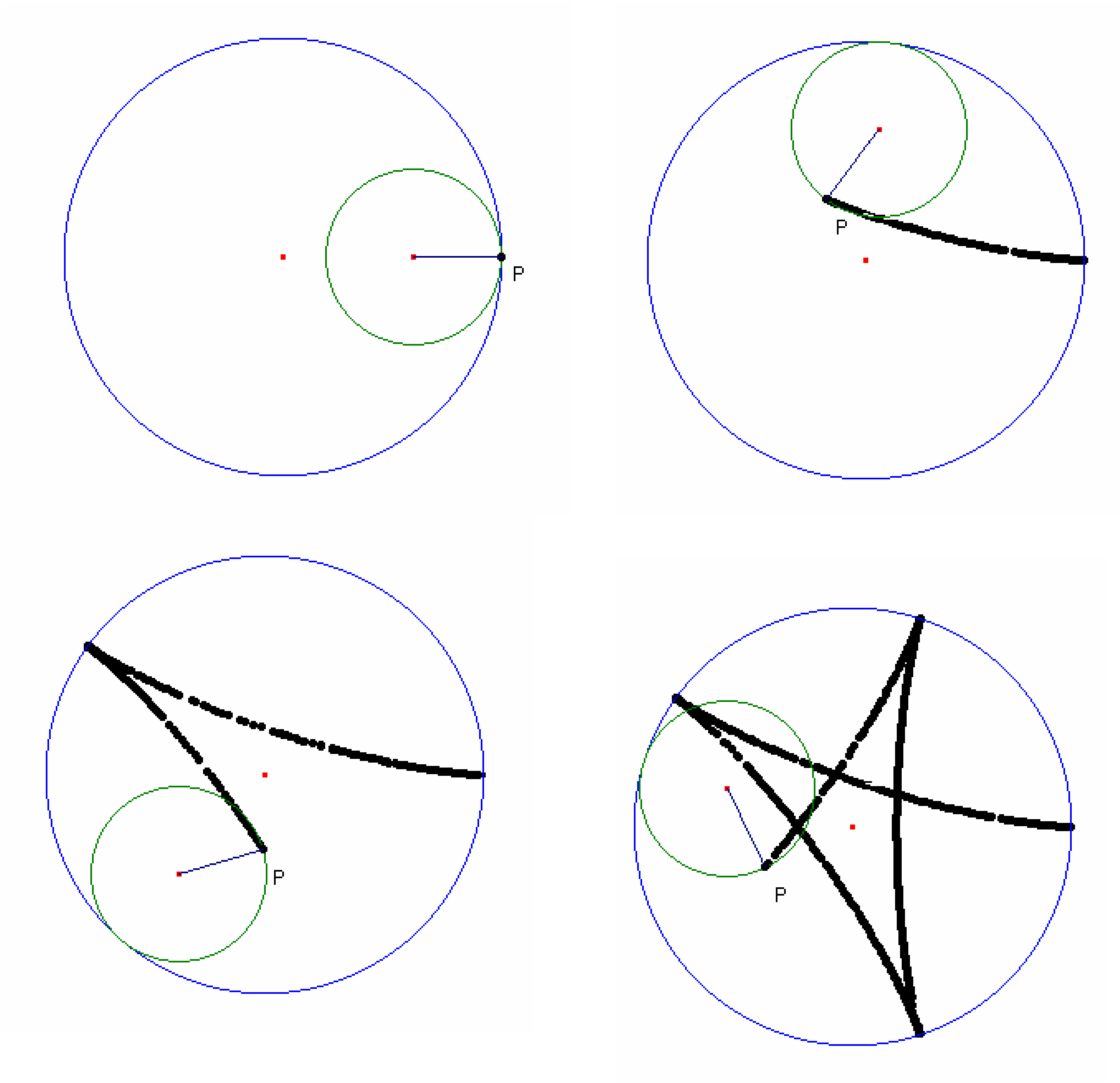
ONDERZOEKSOPDRACHT 12

DE ASTROÏDE

Een aantal meetkundige krommen zijn het resultaat van mechanische problemen. Een mooi voorbeeld hiervan in de zogenaamde hypocycloïde.

DEFINITIE.
Een **hypocycloïde** is de baan beschreven door een punt P op een cirkel met straal r die aan de binnenkant in een cirkel met straal R rolt.

Hieronder zie je hoe het punt P een hypocycloïde uittekent. De verhouding R/r is gelijk aan 2,5. Wanneer men deze verhouding verandert, bekomt men een hypocycloïde die er telkens weer anders uitziet.

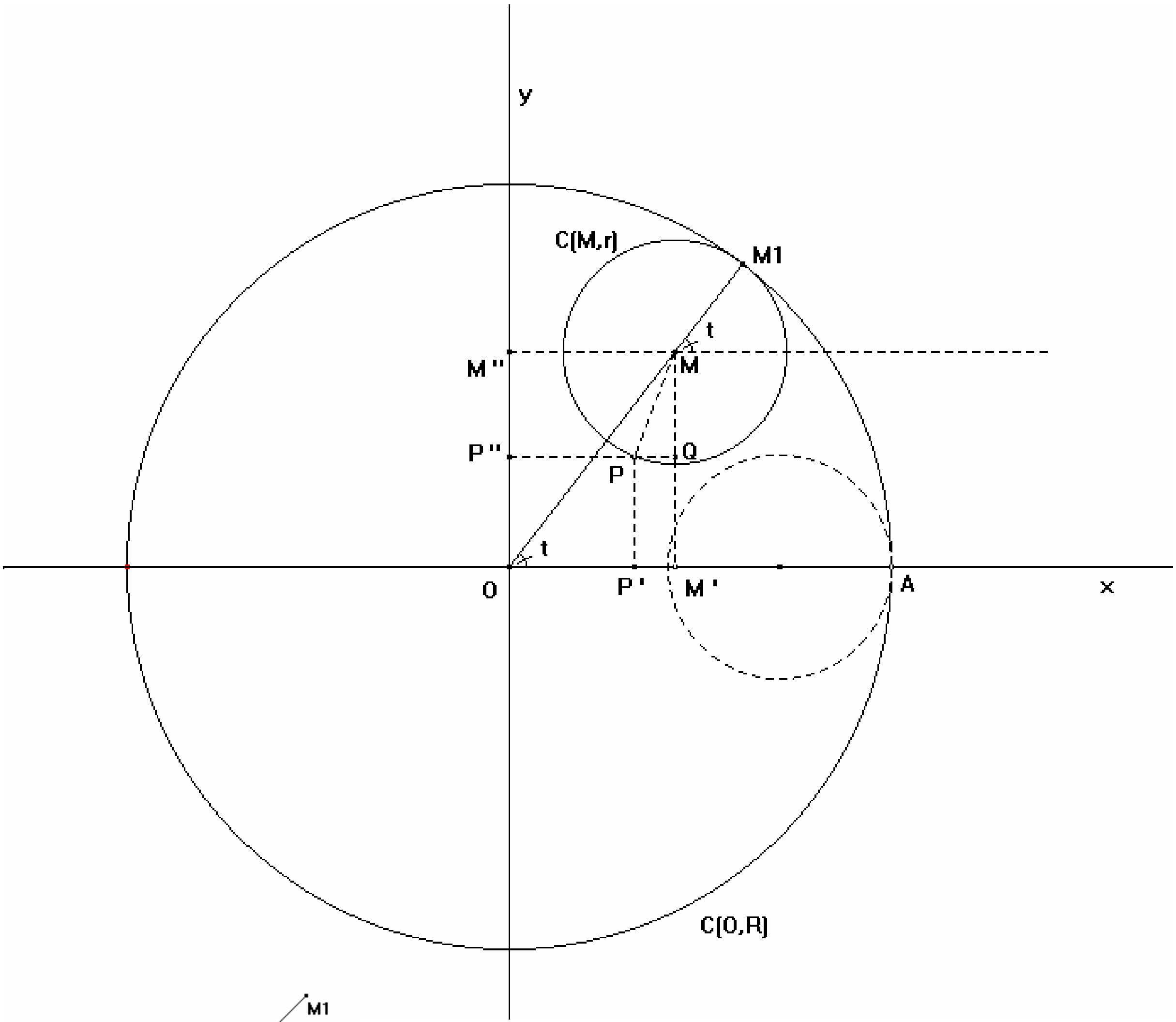


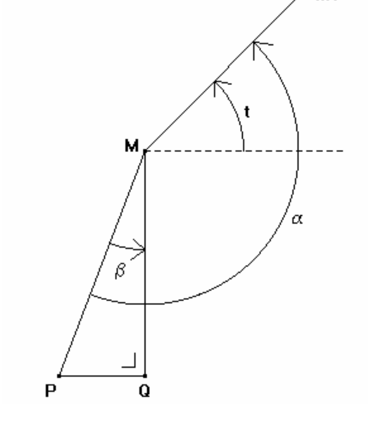
OPDRACHT 1

Een stel parametervergelijkingen van een hypocycloïde is

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \end{cases} \quad \text{met } t \in \mathrm{IR}\ .$$

Toon dit aan via de onderstaande tekeningen en de bijgevoegde tips.



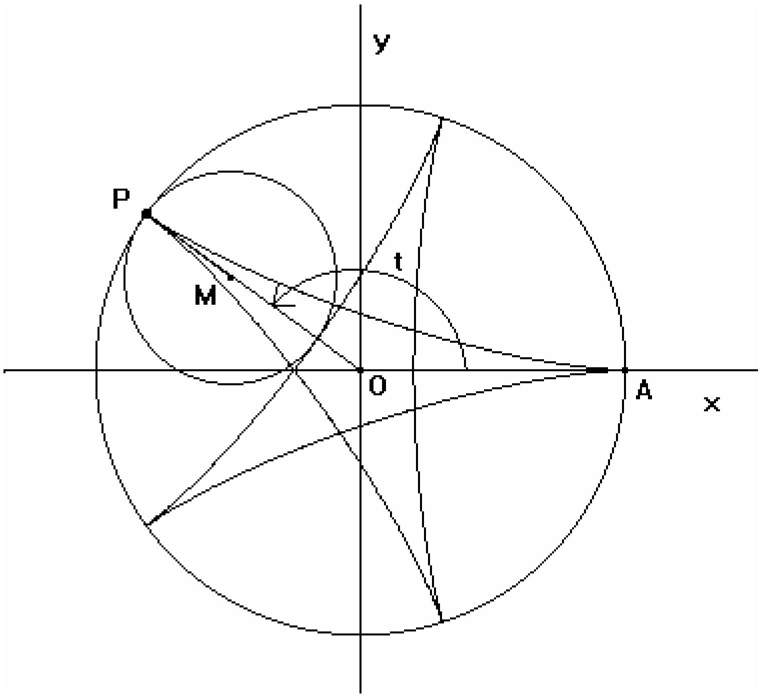


$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + t$$

(de kleine) boog AM_1 op de cirkel met straal R heeft dezelfde lengte als (de kleine) boog M_1P op de cirkel met straal r.

OPDRACHT 2

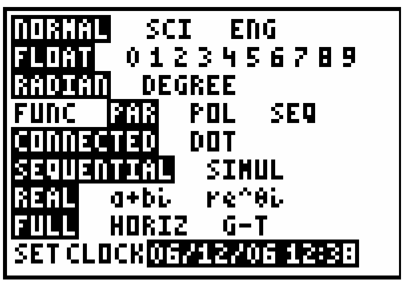
Als de kleine cirkel één volledige omwenteling heeft afgelegd, dan is de lengte van de (kleine) boog AP gelijk aan 2πr.

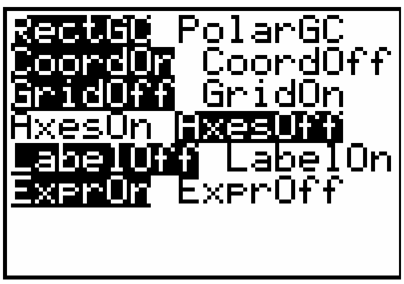


Verklaar waarom het punt P op de grote cirkel terechtkomt voor de opeenvolgende t-waarden
0, $\frac{2\pi r}{R}$, $\frac{4\pi r}{R}$, $\frac{6\pi r}{R}$, ...

OPDRACHT 3

Gebruik jouw GRM om een aantal hypocycloïden te plotten. Kies de onderstaande instellingen bij MODE en FORMAT en typ dan telkens de parametervergelijkingen in en schets de grafiek.





a) Voor R = 2 en r = 1 : Grafiek : ???

$$\begin{cases} x = ... \\ y = ... \end{cases}$$

b) Voor R = 3 en r = 1 : Grafiek : ???

$$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De hypocycloïde noemt men in dit geval een **deltoïde**.

c) Voor R = 4 en r = 1 : Grafiek : ???

$$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De hypocycloïde noemt men in dit geval een **astroïde**.

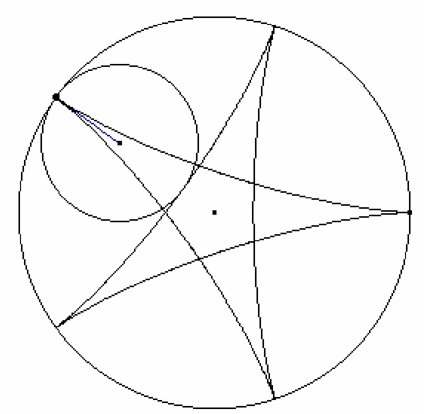
d) Voor R = 7 en r = 2 : Grafiek : ???

$$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

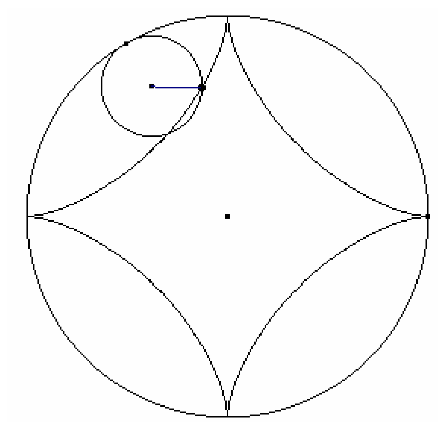
OPDRACHT 3

Hoeveel is $\frac{R}{r}$ op elk van de onderstaande figuren? Gebruik jouw GRM ter controle.

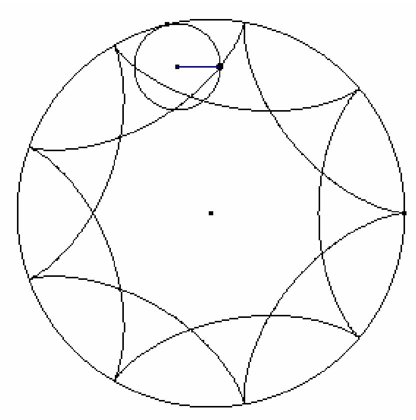
a)



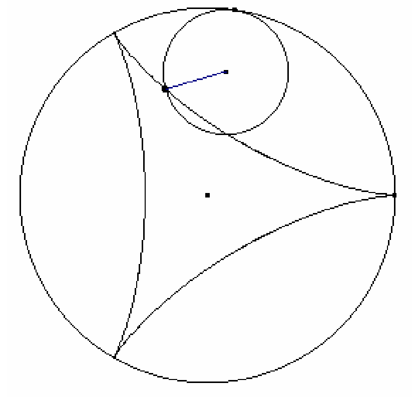
b)



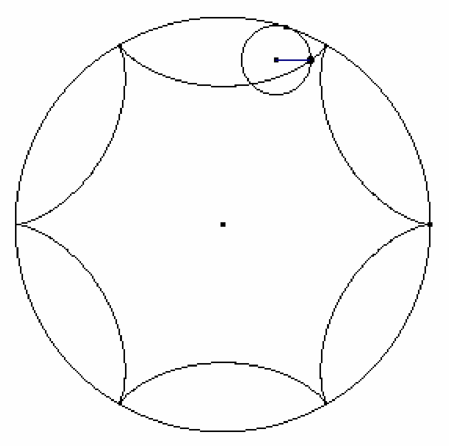
c)



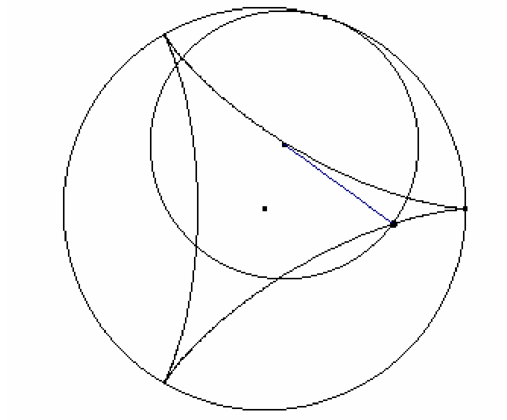
d)



e)



f)



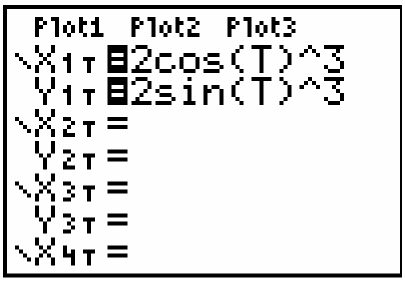
OPDRACHT 4

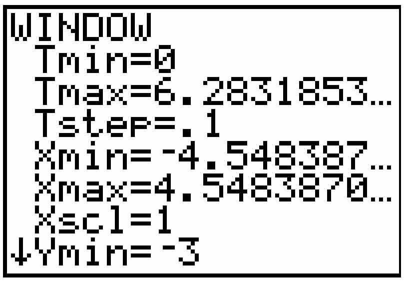
Wanneer R = 4r wordt de hypocycloïde een **astroïde**.

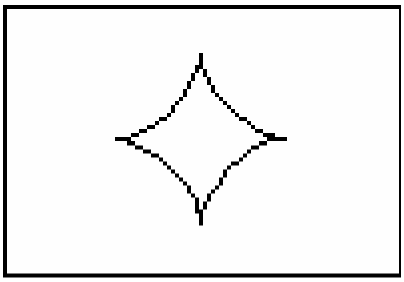
Toon aan dat een stel parametervergelijkingen van een astroïde bepaald is door :

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases} \quad \text{met } t \in \mathrm{IR} \text{ en } R \text{ de straal van de grote cirkel .}$$

Schets de astroïde met R = 2 met jouw GRM :







OPDRACHT 5

De oppervlakte van de astroïde

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0,2\pi[\text{ en } R > 0$$

is gelijk aan $\dfrac{3\pi R^2}{8}$. Toon aan.

OPDRACHT 6

De lengte van de astroïde

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0,2\pi[\text{ en } R > 0$$

is gelijk aan 6R. Toon aan.

Individuele evaluatie van de onderzoeksopdracht

NAAM :

KLAS :

	Ja	Nee
Is de opdracht (globaal) duidelijk gesteld?		
Welke suggestie(s) wil je geven?		
Heeft computergebruik meerwaarde opgeleverd?		
Wat viel mee of wat viel tegen?		
Waren de verwachtingen i.v.m. de uitwerking duidelijk geformuleerd?		
Welke suggestie(s) wil je geven?		
Heb je de afgesproken tijdsindeling kunnen respecteren?		
Hoeveel tijd heb je zelf aan de uitwerking besteed?		
Vind je het project goed georganiseerd (opdracht, verantwoordelijkheid die je krijgt, tijdstip, manier van werken, …)?		
Welke suggestie(s) wil je geven?		
Wat ging goed bij het samenwerken en wat ging minder goed?		
Wat heb je van de anderen geleerd?		
Wat zou je de volgende keer anders doen?		
Wat vind je van de manier van evalueren?		

LOGBOEK

KLAS :
SAMENSTELLING VAN DE GROEP :

Timing	Uitgewerkte opdracht en door wie?	Moelijkheidsgraad
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4
		1 2 3 4

Aandeel van de groepsleden in het uitvoeren van de onderzoeksopdracht

KLAS :
SAMENSTELLING VAN DE GROEP :

Wat was volgens jou het procentueel aandeel van het geleverde werk van elk groepslid in jouw groep? Geef bij elk lid een korte verantwoording voor de toegekende score.

Naam	Procentueel aandeel	Verantwoording
Jouw naam:		
Groepslid 2:		
Groepslid 3:		
	100 %	

Notities

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

In het leerplan voor de derde graad aso staat voor de studierichtingen met component wiskunde (leerplan A) het onderwerp ‘Onderzoekscompetenties’ als een verplicht onderdeel op het programma.

In de twee leerjaren van de derde graad zou hieraan ongeveer 4% van de lestijden moeten besteed worden. Dit komt neer op een totaal van ongeveer 12 lestijden. Uiteraard kan men hiervoor best een opdracht (of een paar opdrachten) voorzien in het vijfde en in het zesde jaar.

Dit cahier heeft als doel enkele inspirerende opdrachten aan te reiken. We hebben er voor geopteerd om de deelopdrachten strikt af te lijnen en er wordt verwacht dat de leerlingen gebruik maken van een grafische rekenmachine bij de uitwerking van de opdrachten.

Dr. LUC GHEYSENS is vakbegeleider wiskunde, medewerker van T³ Vlaanderen, jurylid van VWO en leraar wiskunde aan De Pleinschool in Kortrijk. Hij heeft een levendige belangstelling voor een didactisch verantwoord en actief wiskundeonderwijs, problem solving, ICT en speelse wiskunde.

TEXAS INSTRUMENTS